文章编号:1671-9352(2007)04-0067-04

利用嵌套L—型分解算法求解生产计划多阶段随机规划模型

张立伟,张　玲
（山东科技大学　信息科学与工程学院,山东　青岛　266510）

摘要:利用随机规划理论,根据企业在制定生产和供应计划时受到的限制,建立了一类多阶段随机规划模型. 利用嵌套L—型分解算法求解模型,使企业生产成本最小化,依此增进企业的经济效益.

关键词:生产供应计划;多阶段随机规划模型;总成本最低;嵌套L—型分解算法
中图分类号:O23　　　**文献标识码**:A

Optimization model of production and supply planning of multi-stage stochastic programming by the nested L-shaped decomposition method

ZHANG Li-wei and ZHANG Ling
(College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, Shandong, China)

Abstract: Based on stochastic programming theory, some restricted conditions about production and supply planning are considered. The multi-stage stochastic programming model is established based on that consideration. The model is solved with the nested L-shaped decomposition method. By doing so, the minimum profit is obtained.

Key words: production and supply planning; multi-stage stochastic programming; the lowest cost; nested-L-shaped decomposition method

在生产经营过程中,为了使收益最大或者生产成本最小,企业总是根据实际情况,考虑生产供应计划问题,通过制定合理的计划来达到要求. 市场需求受到许多因素的影响,如天气,消费者的个人收入、爱好,国民经济发展水平等. 因此,市场需求是不确定的,如果利用固定的规划很难解决问题. 本文将市场需求及单位生产成本的不确定性考虑进去,结合企业的实际情况,提出了一种多阶段随机规划模型,从而能够制定比较合理的计划.

多阶段随机规划作为一个优化模型,适用于经济活动的各个领域. 许多研究者用这一模型解决实际问题:郭文旌[1]研究了当终止时间不确定时的多阶段最优投资组合问题,Shabbir[2]建立了不确定性条件下供应链网络设计的随机规划模型.

1　多阶段随机规划生产供应计划模型

1.1　制定生产供应计划的因素分析

在建立模型的过程中,考虑如下影响计划的几个因素:

(1) 阶段性. 企业一般根据市场需求按阶段制定计划,这对于企业的长期发展具有重要意义.

(2) 市场需求. 由于市场的需求会由于各种因素的影响而变化,而需求的变化又会导致生产成本和企

收稿日期:2006-05-28
作者简介:张立伟(1979-　),男,硕士,研究方向为计算机辅助几何设计及散乱数据的计算机拟合.

业效益的改变,因此,企业需要根据最优性原则制定相应的计划,使产品的供应满足市场的需求.

(3) 生产能力. 在生产时,要受到企业内部正常生产能力的限制. 通常,在某一阶段的产品产量不会超过企业内部的生产能力.

(4) 市场供应. 在需求比较大的情况下,一般要从几个渠道获得产品来保证供应.

1.2 多阶段随机规划模型的建立

企业要制定一个 H 阶段的生产供应计划,首先假定:(1) 企业在每一阶段正常生产能力不会超过 P. (2) 在第一阶段,市场需求是已知的,设为 d,从第二阶段开始,订单随市场需求而变化,是随机的,设阶段 t 的订单为 $d^t(\omega)(t=2,3,\cdots H)$.其中 ω 为随机参数,可以定义为:$\omega \overset{\text{def}}{=} \{\omega^t : t=1,\cdots H\}$. (3) 设在每一阶段的供应有 n 个渠道,第一个渠道为正常生产,产量为 x_1^t,单位成本为 c_1^t;库存量为 x_2^t,单位库存花费为 c_2^t; 其它供应渠道产品的量分别为 $x_i^t(i=3,\cdots n)$,单位成本为 $c_i^t(i=3,\cdots n)$.因此,令 $c^t=(c_1^t,c_2^t,\cdots c_n^t)^T$,$x^t=(x_1^t,x_2^t,\cdots x_n^t)^T$,从第二阶段开始,$c_i^t,x_i^t(i=1,\cdots n;t=2,\cdots H)$均受到随机事件的影响.因此,$c^t,x^t(t=2,\cdots H)$是可测函数:$x^t:\omega \to x^t(\omega)$;$c^t:c \to c^t(\omega)$.

根据以上假设,对于目标函数,除了产品成本和贮存费用 $c^t(\omega)^T x^t(\omega)$外,由于下一个阶段的产量是在不知道真实需求的条件下的一个量,可能会因不满足订单需求或产品积压而产生惩罚费用,只有下一个阶段的随机事件 ω 实现后才可知惩罚费用,即惩罚费用也为随机变量的函数.

我们的目的是求生产费用最小及惩罚的期望值最小,因此得到如下目标函数:

$$C=\min_{x^1} c^{1T}x^1+\bar{Q}^2(x^1).$$

对所有的 t,令 $\bar{Q}^t(x^{t-1})=E_{\xi^t}[Q^t(x^{t-1},\xi^t(\omega))]$. 对于 $t(t=2,3,\cdots H-1)$,有

$$Q^t(x^{t-1},\xi^t(\omega))=\min c^t(\omega)^T x^t(\omega)+\bar{Q}^{t+1}(x^t).$$

对最后一个阶段 H,有 $Q^H(x^{H-1},\xi^H(\omega))=\min\ c^H(\omega)x^H(\omega)$,即 $\bar{Q}^{H+1}(x^H)=0$.从而整个问题的数学模型为

$$C=\min_{x^1} c^{1T}x^1+\bar{Q}^2(x^1) \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^n x_i^1-2x_2^1=d,\\ x_1^1\le P,\\ x_i^1\ge 0,\ i=1,2,\cdots n,\end{cases} \tag{1.2}$$

且对于 $t=2,3,\cdots H-1$,有

$$\bar{Q}^t(x^{t-1})=E_\zeta[Q^t(x^{t-1},\zeta^t(\omega))]. \tag{1.3}$$

其中

$$Q^t(x^{t-1},\xi^t(\omega))=\min c^t(\omega)^T x^t(\omega)+\bar{Q}^{t+1}(x^t) \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t. }\ & x_2^{t-1}+\sum_{i=1}^n x_i^t-2x_2^t=d^t(\omega),\\ & x_1^t\le P,\\ & x_i^t\ge 0,\ i=1,2,\cdots n,\\ & \bar{Q}^{H+1}(x^H)=0.\end{aligned} \tag{1.5}$$

2 模型求解及实例分析

2.1 模型求解

对于复杂的多阶段随机规划问题求解起来非常困难,一般利用逼近方法求解(见参考文献[3,4]).当发生的事件为离散事件时,可以利用等价确定性规划的分解算法来实现. 下面对式(1.1)~(1.5)中含离散型随机变量的情况讨论求解.

离散情况下,分解方法可以分为按方案分解和按阶段分解.嵌套 L—型分解算法是一种按阶段分解算法,其基本的思想是在式(1.4)的 $\bar{Q}^{t+1}(x^t)$中加入切平面,而且加入其它的切平面到 x^t 中,x^t 对所有的儿子方案都能执行. 切平面代表 $\bar{Q}^{t+1}(x^t)$连续的线性逼近. 由于 $\bar{Q}^{t+1}(x^t)$的多面体结构,这一过程在有限步迭代后收敛到(1.2)~(1.5)的最优解.

每个阶段的补偿矩阵为固定补偿,为叙述方便,将约束条件(1.2),(1.5)变为:

$$W^t x^t(\omega) = d^t(\omega) - T^{t-1}(\omega) x^{t-1}\ W^1 x^1 = d, \tag{1.6}$$

$$x^t(\omega) \geq 0. \tag{1.7}$$

对于每一个阶段 $t(t = 1,2,\cdots H-1)$ 和在这个阶段的每个方案 k,$(k = 1,2,\cdots K^t, K^t$ 为每阶段的方案数.)有下面的子问题,它产生直到阶段 t 的切平面:

$$\min\ c_k^{tT} x_k^t + \theta_k^t \tag{1.8}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} W^t x_k^t = d_k^t - T_k^{t-1} x_{\alpha(k)}^{t-1}, & (1.9) \\ D_{k,j}^t x_k^t \geq h_{k,j}^t,\ j = 1,\cdots r_{k,j}^t & (1.10) \\ E_{k,j}^t x_k^t + \theta_k^t \geq e_k^t,\ j = 1,2,\cdots s_{k,j}^t, & (1.11) \\ x_k^t \geq 0. & (1.12) \end{cases}$$

式中 $\alpha(k)$ 是方案 k 在阶段 $t-1$ 的父亲结点. $x_{\alpha(k)}^{t-1}$ 是此方案的当前解. 对于 $t = 1$,初始条件为 $W^1 x^1 = d$. 为了指明阶段和方案,记作子问题为 NLDS(t,k). $D^t(j)$ 记为阶段 $t-1$ 方案 j 在阶段 t 的儿子方案.

算法 2.1　嵌套 L—型分解算法(参见[5])

Step 0　令 $t = 1$, $k = 1$, $r_k^t = s_k^t = 0$, 对所有的 t 和 k 将约束 $\theta_k^t = 0$ 加入(1.8) ~ (1.12)中,令 DIR = FORE. 转 Step 1.

Step 1　解当前问题 NLDS(t,k).

如果不可行且 $t = 1$,那么停止,原问题不可行;如果不可行且 $t > 1$,则令 $r_{\alpha(k)}^{t-1} = r_{\alpha(k)}^{t-1} + 1$,令 DIR = BACK. 通过对偶基本解 $\pi_k^t, \rho_k^t \geq 0$ 获得不可行条件,满足 $(\pi_k^t)^T W^t + (\rho_k^t)^T D_k^t \leq 0$,但 $(\pi_k^t)^T(d_k^t - T_k^{t-1} x_{\alpha(k)}^{t-1}) + (\rho_k^t)^T h_k^t > 0$. 令 $D_{\alpha(k), r_{\alpha(k)}^{(t-1)}}^{t-1} = (\pi_k^t)^T T_k^{t-1}$, $d_{\alpha(k), r_{\alpha(k)}^{t-1}}^{t-1} = \pi_k^t h_k^t + (\rho_k^t)^T h_k^t$. 令 $t = t-1$, $k = \alpha(k)$,转 Step 1.

如果可行,更新 x_k^t, θ_k^t 的值,保存约束(1.9) ~ (1.12)的互补基本对偶乘子分别为 $(\pi_k^1, \rho_k^t, \sigma_k^t)$. 如果 $k < K^t$,令 $k = k+1$,转(1.8);否则 $(k = K^t)$,如果 DIR = FORE,且 $t < H$,令 $t = t+1$,转 Step 1;如果 $t = H$,令 DIR = BACK,转 Step 2.

Step 2. 对阶段 $t-1$ 所有的方案 $j = 1,\cdots K^{t-1}$,计算

$$E_j^{t-1} = \sum_{k \in D^t(j)} \frac{p_k^t}{p_j^{t-1}} (\pi_k^t)^T T_k^{t-1}$$

和

$$e_j^{t-1} = \sum_{k \in D^t(j)} \frac{p_k^t}{p_j^{t-1}} \left[(\pi_k^t)^T d_k^t + \sum_{i=1}^{r_k} (\rho_{ki}^t)^T h_{ki}^t + \sum_{i=1}^{s_k} (\sigma_{ki}^t)^T e_{ki}^t \right].$$

在指标 $D^t(j)$ 的所有方案的条件期望是 $\bar{\theta}_j^{t-1} = e_j^{t-1} - E_j^{t-1} x_j^{t-1}$. 如果约束 $\theta_j^{t-1} = 0$ 出现在 NLDS$(t-1,j)$ 中,那么去掉它,令 $s_j^{t-1} = 1$,将约束(1.11)和 E_j^{t-1} 以及 e_j^{t-1} 加入 NLDS$(t-1,j)$ 中.

如果 $\bar{\theta}_j^{t-1} > \theta_j^{t-1}$,那么令 $s_j^{t-1} = s_j^{t-1} + 1$,将约束(1.11)和 E_j^{t-1} 以及 e_j^{t-1} 加入 NLDS$(t-1,j)$ 中.

如果 $t = 2$ 且没有约束加入 NLDS(1)$(j = K^1 = 1)$ 中,那么 x_1^1 是最优解,算法停止. 否则,令 $t = t-1$, $k = 1$. 若 $t = 1$,令 DIR = FORE,转 Step 1.

2.2　实例分析

某企业制定为期 6 个月的生产计划,每两个月为一个阶段,每个阶段正常产量不会超过 4 000 台,每台成本 100 元;在订单增加的月份,考虑从加班生产的渠道获得产品,但单位成本增加为 300 元,假定第一个阶段的需求为 2 000 台,第 2,3 阶段的订单依赖于天气因素,为不确定的. 假定每个阶段的订单可能为 2 000 台或 4 000 台,且为等可能的,每台每个阶段的库存费用为 50 元.

利用上述模型建立如下方案:

第 1 阶段:

$$\min\ 100x_1^1 + 50x_2^1 + 300x_3^1 + EQ_{\xi^2}^2(x_1^1, x_2^1, x_3^1, \xi^2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1^1 - x_2^1 + x_3^1 = 2\,000, \\ x_1^1 \leq 4\,000, \\ x_i^1 \geq 0,\ i = 1,2,3. \end{cases} \tag{2.1}$$

第2阶段：

$$\min 100x_1^2+50x_2^2+300x_3^2+EQ_{\xi^3}^3(x_1^2,x_2^2,x_3^2,\xi^3)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_2^1+x_1^2-x_2^2+x_3^2=d^2(\omega),\\ x_1^2\le 4\,000,\\ x_i^2\ge 0,\ i=1,2,3.\end{cases}\tag{2.2}$$

第3阶段：

$$\min 100x_1^3+50x_2^3+300x_3^3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_2^2+x_1^3-x_2^3+x_3^3=d^3(\omega),\\ x_1^3\le 4\,000,\\ x_i^3\ge 0,\ i=1,2,3.\end{cases}\tag{2.3}$$

令 $x_{ik}^t(i=1,2,3;t=2,3)$分别代表阶段 t 利用方案 k 的正常产量、加班的产量和库存量，则(2.1)~(2.3)可以转化为如下规划问题：

$$\min 100x_1^1+50x_2^1+300x_3^1+\sum_{k=1}^{2}p_k^2(100x_{1k}^2+50x_{2k}^2+300x_{3k}^2)+\sum_{k=1}^{4}p_k^3(100x_{1k}^3+50x_{2k}^3+300x_{3k}^3)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1^1-x_2^1+x_3^1=2\,000,\\ x_2^1\le 4\,000,\\ x_{2k}^1+x_{1k}^2-x_{2k}^2+x_{3k}^2=d_k^2,\\ x_{1k}^2\le 4\,000 \quad k=1,2,\\ x_{2\alpha(k)}^2+x_{1k}^3(1)-x_{2k}^3+x_{3k}^3=d_k^3,\\ x_{1k}^3\le 4\,000 \quad k=1,\cdots 4,\\ x_{ik}^t\ge 0 \quad i=1,2,3;k=1,2,\cdots K^t;\ t=1,2,3.\end{cases}\tag{2.4}$$

其中，在第3阶段，$\begin{cases}\alpha(k)=1,\ k=1,2,\\ \alpha(k)=2,\ k=3,4;\end{cases}$ $p_k^2=0.5,\ k=1,2;\ p_k^3=0.25,\ k=1,\cdots 4;\ d_1^2=2\,000,\ d_2^2=6\,000,\ d^3=(2\,000,\ 4\,000,\ 2\,000,\ 4\,000)^T$. 应用嵌套L—型分解算法求解(2.4)，可以求得如表1的结果.

表1 输出结果

Table 1 The output of the plan

	方案1	方案2	方案3	方案4
阶段1	4 000, 0, 2 000			
阶段2	2 000, 0, 2 000	4 000, 0, 0		
阶段3	0, 0, 0	4 000, 0, 0	2 000, 0, 0	4 000, 2 000, 0

表中每个方框中的数字代表 $x^t=(x_1^t,x_2^t,x_3^t)(t=1,2,3)$，即每个阶段的正常产量、额外产量和库存量；企业总的生产成本预计为125万元.

3 结语

对于已建立的大规模生产供应计划的多阶段随机规划模型，它的适用范围是很广的，许多动态的经济问题和生产问题通过选取适当的决策变量和状态变量，也可以用该模型进行描述.

参考文献：

[1] 郭文旌，胡奇英. 不确定终止时间的多阶段最优投资组合[J]. 管理科学学报，2005，8(2)：13~19.

[2] Shabbir Ahmed, Marc Goetschalckx, Alexander Shapiro. A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 167(1):96~115.

[3] 韦增欣，莫降涛. 补偿随机规划的一种新数值方法[J]. 数学年刊A辑，2002，5(23A)：601~610.

[4] A Shapiro. Stochastic programming by monte carlo simulation methods[J]. [ZB/OL]http://dochost.rz.hu-berlin.de/speps/, 2005-10-23.

（编辑：冯保初）