图同构的一个充分必要条件

侯爱民
HOU Ai-min

东莞理工学院 计算机科学与技术系，广东 东莞 523808
Department of Computer Science and Technology，Dongguan University of Technology，Dongguan，Guangdong 523808，China
E-mail：zhham@163.com

HOU Ai-min.Necessary and sufficient condition of graphic isomorphism.Computer Engineering and Applications，2009，45（30）：57-61.

Abstract： How to determine the isomorphism of graphs is a difficult problem of graph theory，which is not completely solved so far.S.M.Ulam has proposed a conjecture concerning graphic isomorphism，named graph reconstruction.In this paper a new necessary and sufficient condition of graphic isomorphism is proved which is stated as following：two graphs are isomorphic if and only if their subgraphs are isomorphic and the new vertices as well as their adjancy edges are corresponding with the property of isomorphism.Based on the technique for unlimitedly generating the corresponding pairs of vertices，this condition is proved with the method of mathematical induction.

Key words： subgraphic isomorphism；graphic isomorphism；technique for unlimitedly generating the corresponding pairs of vertices

摘　要：图同构的判定性问题是图论理论中的一个难问题，至今没有得到彻底解决。Ulam 曾经提出过一个判定图同构的猜想，也称为图的重构猜想。提出了一个新的判定图同构的充分必要条件，即在子图同构的前提下，根据新增顶点及相应关联边的关系，判断母图同构的充分必要条件。基于具有同构关系的对应点无限衍生技术，采用数学归纳法证明了这个充分必要条件的成立。

关键词：子图同构；母图同构；对应点无限衍生技术
DOI：10.3778/j.issn.1002-8331.2009.30.018　**文章编号：**1002-8331（2009）30-0057-04　**文献标识码：**A　**中图分类号：**O157.5

1　引言

在研究图论的问题中，经常会遇到判断两个图是否同构；即从顶点和边的拓扑图结构上来看，两个图是否有可能以同样的方式画出。换句话说，当两个图同构时，两个图的顶点之间具有保持相邻关系的一一对应。不幸的是，判断两个图是否同构是一件困难的事情。

S.M.Ulam 曾经提出过一个判定图同构的猜想，也称为图的重构猜想：若存在双射函数 $f:V(G)\rightarrow V(H)$，使对任意的 $v\in V(G)$，有 $G-v\cong H-f(v)$，则称 H 是 G 的一个重构。重构问题也是图论中研究的经典问题之一，非常遗憾，这个猜想至今也没有解决。但是，围绕这个猜想已有若干论文发表。文献[1]研究了图 G 和 H 作为树出现时 Ulam 猜想的正确性。文献[2-4]扩展了 P.J.Kelly[1]的研究成果，提出了若干个判定树 G 和 H 同构的充分条件：所有的最大子树同构；子树 $T-v$ 同构，这里 v 是一个外围顶点；非同构的最大子树不存在。文献[5]研究了非对称树的可重构性。文献[6-9]研究了某些图的重构和边重构问题及参数的重构性。文献[10]研究了边型带权核子图的边可重构性。文献[11]研究了两类连通图（即子图加新顶点类，子图加新边类）同构的充分必要条件。这些成果对研究图重构问题具有积极的意义。

提出了一个新方法，即具有同构关系的对应点无限衍生技术。然后，采用数学归纳法证明了子图同构的前提下，判断母图（即子图加新顶点类）同构的充分必要条件：同构的两个图，各自增加一个顶点和与该顶点关联的若干条边，形成了两个新图。（1）这两个新图同构，当且仅当，新顶点的新关联边依然保持对应关系。（2）这两个新图不同构，当且仅当，新顶点的新关联边不保持对应关系。

2　基于子图同构的母图同构

定义 1　设两个有限图 G 和 H 同构，同构函数为 f。对于任意的 $u\in V(G)$，$v\in V(H)$，如果 $v=f(u)$，则称顶点 u 和 v 有对应关系，记为 $u\leftrightarrow v$。否则称顶点 u 和 v 没有对应关系，记为 $u\not\leftrightarrow v$。如果是有向图，则邻接点的函数关系必须保持相同的有向性。

定义 2　设两个有限图 G 和 H 同构，同构函数为 f。对于任意的 $e_G=(u_i,u_j)\in E(G)$，$e_H=(v_i,v_j)\in E(H)$，如果 $v_i=f(u_i)$ 且 $v_j=f(u_j)$ 或者 $v_j=f(u_i)$ 且 $v_i=f(u_j)$，则称边 e_G 和 e_H 有对应关系，记为 $e_G\leftrightarrow e_H$。否则称边 e_G 和 e_H 没有对应关系，记为 $e_G\not\leftrightarrow e_H$。如果是有向图，则边的函数关系必须保持相同的有向性。

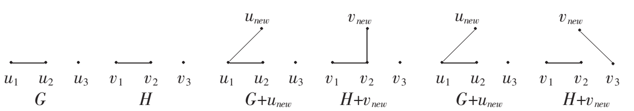
定义 3　设两个有限图 G 和 H 同构，同构函数为 f。G 增加新顶点 u_{new}，H 增加新顶点 v_{new}，且 f 增加新对应关系 $v_{new}=f(u_{new})$。如果 u_{new} 的所有关联边分别与 v_{new} 的所有关联边依次保持对应边关系，则称 u_{new} 和 v_{new} 具有新增的关联边保持对应关系。否则

作者简介：侯爱民（1963-），男，副教授，华南理工大学在读博士生，主要研究领域为人工智能、组合数学、图论。
收稿日期：2008-06-16　**修回日期：**2009-03-12

称 u_{new} 和 v_{new} 没有新增的关联边保持对应关系。如果是有向图，则边的函数关系必须保持相同的有向性。

根据定义1和定义2，知道，如果 $u\in V(G)$，$v\in V(H)$，且 $u\leftrightarrow v$，则有下列特性成立：(1)$deg(u)=deg(v)$。(2)u 的邻接点 u_{i1}，u_{i2}，$\cdots$，u_{ik}，分别与 v 的邻接点 v_{i1}，v_{i2}，$\cdots$，v_{ik}，各自保持对应关系，即 $u_{ij}\leftrightarrow v_{ij}(j=1,2,\cdots,k)$，$v_{ij}=f(u_{ij})$。(3)$u$ 的关联边分别与 v 的关联边各自保持对应关系，即$(u,u_{ij})\leftrightarrow(v,v_{ij})(j=1,2,\cdots,k)$，$v_{ij}=f(u_{ij})$。

根据定义3，知道，如果 $G\cong H$，且 $u_i\leftrightarrow v_i$，$u_i\in V(G)$，$v_i\in V(H)(i=1,2,\cdots,n)$。现在，$G$ 增加新顶点 u_{new}，且与 u_{i1}，u_{i2}，u_{i3} 邻接。H 增加新顶点 v_{new}，且与 v_{j1}，v_{j2}，v_{j3} 邻接。新顶点 u_{new} 和 v_{new} 没有新增的关联边保持对应关系，意味着 u_{i1}，u_{i2}，u_{i3} 决不与 v_{j1}，v_{j2}，v_{j3} 保持对应关系，即不存在任何的同构函数 f($G\cong H$ 下的同构函数)，使得：(1)$u_{i1}\leftrightarrow v_{j1}$，$u_{i2}\leftrightarrow v_{j2}$，$u_{i3}\leftrightarrow v_{j3}$；(2)$u_{i1}\leftrightarrow v_{j1}$，$u_{i2}\leftrightarrow v_{j3}$，$u_{i3}\leftrightarrow v_{j2}$；(3)$u_{i1}\leftrightarrow v_{j2}$，$u_{i2}\leftrightarrow v_{j1}$，$u_{i3}\leftrightarrow v_{j3}$；(4)$u_{i1}\leftrightarrow v_{j2}$，$u_{i2}\leftrightarrow v_{j3}$，$u_{i3}\leftrightarrow v_{j1}$；(5)$u_{i1}\leftrightarrow v_{j3}$，$u_{i2}\leftrightarrow v_{j1}$，$u_{i3}\leftrightarrow v_{j2}$；(6)$u_{i1}\leftrightarrow v_{j3}$，$u_{i2}\leftrightarrow v_{j2}$，$u_{i3}\leftrightarrow v_{j1}$。这6种情况中的任何一种情况出现，见图1。



(a)$G\cong H$ (b)u_{new} 和 v_{new} 具有关联边保持对应关系 (c)u_{new} 和 v_{new} 没有关联边保持对应关系

图1 同构图增加新顶点的情况

引理1 假设两个有限图 G 和 H 同构，$G\cong H$，并且 $v_i\in V(H)=f(u_i)$，$u_i\in V(G)(i=1,2,\cdots,n)$。则在 G 中删去边(u_j,u_k)，在 H 中删去边(v_j,v_k)，剩下的两个子图必同构。

证明 因为 $G\cong H$，且 $u_i\leftrightarrow v_i$，$u_i\in G$，$v_i\in H(i=1,2,\cdots,n)$。所以，存在同构函数 f，使得$(u_s,u_t)\in E(G)$，当且仅当，$(v_s,v_t)\in E(H)$，且 $v_s=f(u_s)$，$v_t=f(u_t)$。

现在，G 中删去边(u_j,u_k)，H 中删去对应边(v_j,v_k)后，G 中顶点并无减少，H 中顶点也无减少；只是各自减少了一条边，而其他剩余边依然保持对应关系。

即，$(u_s,u_t)\in E(G)$，当且仅当，$(v_s,v_t)\in E(H)$，且 $v_s=f(u_s)$，$v_t=f(u_t)$，且 $s,t\neq j,k$。

所以，$G-(u_j,u_k)\cong H-(v_j,v_k)$。即删去一条对应边后，剩余的子图依然同构。

定理1 同构的两个图，各自增加一个顶点和与该顶点关联的若干条边。如果新顶点的所有关联边依然保持对应关系，则形成的新图必同构。

证明 不失一般性，假设 $G\cong H$，$|V(G)|=|V(H)|=n$，且有 $u_i\leftrightarrow v_i$，$u_i\in V(G)$，$vi\in V(H)(i=1,2,\cdots,n)$。$u_i\leftrightarrow v_i$ 表示 u_i 与 v_i 保持对应关系。

现在，G 增加新节点 u_{new}，且与 u_{i1}，u_{i2}，$\cdots$，u_{ik} 邻接。H 增加新顶点 v_{new}。因为新顶点的关联边保持对应关系，所以 u_{new} 与 u_{i1}，u_{i2}，$\cdots$，u_{ik} 邻接，当且仅当，v_{new} 与 v_{i1}，v_{i2}，$\cdots$，v_{ik} 邻接。这里 $u_{i1}\leftrightarrow v_{i1}$，$u_{i2}\leftrightarrow v_{i2}$，$\cdots$，$u_{ik}\leftrightarrow v_{ik}$。$i1,i2,\cdots,ik$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个子串。显然，此时有 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$，$u_{ij}\leftrightarrow v_{ij}(j=1,2,\cdots,k)$，$u_i\leftrightarrow v_i$，(这里 $u_i\in V(G)-\{u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{ik}\}$，$v_i\in V(H)-\{v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{ik}\}$)，即在下标 $1,2,\cdots,n$ 中，去掉子串下标 $i1,i2,\cdots,ik$ 后，剩余的下标对应的顶点依然保持对应关系。所以，$G+u_{new}\cong H+v_{new}$。

定理2 同构的两个图，各自增加一个顶点和与该顶点关联的若干条边。如果新顶点至少存在一条关联边不保持对应关系，则形成的新图必不同构。

证明 假设原图为 G 和 H，新增顶点为 u_{new} 和 v_{new}。$V(G)=\{u_i|i=1,2,\cdots,n\}$，$V(H)=\{v_i|i=1,2,\cdots,n\}$。

首先，无需考虑新增顶点 u_{new} 和 v_{new} 都不带边，或都带 $n-1$ 条边。即 $deg(u_{new})=deg(v_{new})=0$，或 $deg(u_{new})=deg(v_{new})=n-1$。因为这两种情况下，它们违反"新顶点至少存在一条关联边不保持对应关系"的前提条件。

其次，证明 u_{new} 和 v_{new} 必然新增相同数目的关联边。

如若不然，则新增边显然不满足对应关系。因为 $G\cong H$，所以 $E(G)=E(H)$。因为新增边数不同，所以 $E(G+u_{new})\neq E(H+v_{new})$，所以 $G+u_{new}\ncong H+v_{new}$。

因此，只需要考虑 u_{new} 和 v_{new} 新增相同数目的关联边的情况。

对新增边数 k 进行归纳证明。

(1)$k=1$，增加1条边时，结论 $G+u_{new}\ncong H+v_{new}$ 成立。

不妨设在 $G+u_{new}$ 中 u_{new} 与 u_1 邻接，在 $H+v_{new}$ 中 v_{new} 与 v_n 邻接。且不存在任何的 $G\cong H$ 的同构函数 f，使得 $u_1\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

假设 1-1 若有 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且 $u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$。

则必有 u_{i1}，$u_{i2}\in V(G)$，v_{j1}，$v_{j2}\in V(H)$，使得 $u_{new}\leftrightarrow v_{j1}$，$u_1\leftrightarrow v_{j2}$，$u_{i1}\leftrightarrow v_{new}$，$u_{i2}\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应，见图2所示。虚线圈代表 G 和 H 的结构。

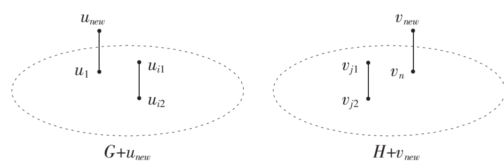


图2 $G+u_{new}\backcong H+v_{new}$，且 $u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

删去 u_{new} 和 v_{new} 后，在 G 和 H 中有 $u_1\not\leftrightarrow v_{j2}$。因为对于无向简单图，有 $deg(u_1)=deg(v_{j2})-1$。对于有向简单图，有 $deg^+(u_1)+deg^-(u_1)=deg^+(v_{j2})+deg^-(v_{j2})-1$。对于含环图，因为边$(u_1,u_1)\in E(G)\Leftrightarrow$边$(v_{j2},v_{j2})\in E(H)$，所以 u_1 有环$\Leftrightarrow v_{j2}$ 有环，所以依然有 $deg(u_1)=deg(v_{j2})-1$ 或 $deg^+(u_1)+deg^-(u_1)=deg^+(v_{j2})+deg^-(v_{j2})-1$。既然 $deg(u_1)\neq deg(v_{j2})$，则 $u_{1w}\not\leftrightarrow v_{j2}$。

既然删去 u_{new} 和 v_{new} 后，在 G 和 H 中有 $u_1\not\leftrightarrow v_{j2}$。所以在 H 中必然存在另外一个顶点 v_{j3}，使得在 $G\cong H$ 中有 $u_1\leftrightarrow v_{j3}$。

因为在新图 $G+u_{new}$ 和 $H+v_{new}$ 中，由于 $deg(u_1)=deg(v_{j3})+1$ 之缘故，有 $u_1\not\leftrightarrow v_{j3}$。所以在 G 中必存在另外一个顶点 u_{i3}，使得在 $G+u_{new}\backcong H+v_{new}$ 中有 $u_{i3}\leftrightarrow v_{j3}$，见图3所示。

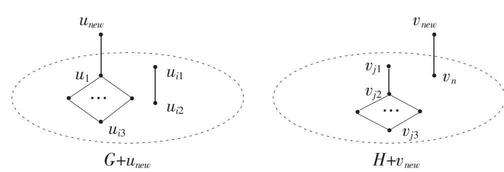


图3 $G+u_{new}\backcong H+v_{new}$，且 $u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

重复上述过程，删掉 u_{new} 和 v_{new} 后，在 G 中有两个 u_1(即 u_1 和 u_{i3}，它们分别和 v_{j3} 保持同构关系的对应点关系)，而在 H 中仅一个 v_{j3} 与它们对应，所以在 H 中必存在另外一个顶点 v_{j4}，使得在 $G\cong H$ 中，有 $u_1\leftrightarrow v_{j3}$，$u_{i3}\leftrightarrow v_{j4}$ 或 $u_1\leftrightarrow v_{j4}$，$u_{i3}\leftrightarrow v_{j3}$。使具有同构关系的对应点保持平衡，见图4所示。

因为在新图 $G+u_{new}$ 中，只有一个 u_{i3}，而在 $H+v_{new}$ 中却有两个 v_{j3}，v_{j4} 与之对应，所以在 G 中必存在另外一个顶点 u_{i4}，使具有同构关系的对应点保持平衡，见图5所示。

G 中多出一个顶点 u_{i4}，又导致 H 图中再多出一个顶点。反

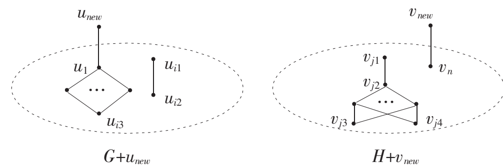


图4　$G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且$u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

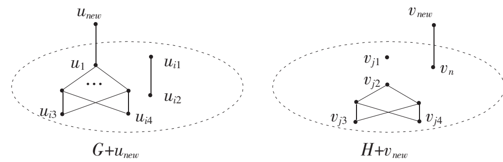


图5　$G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且$u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

过来，又导致G图中再多出一个顶点。如此这样，一直下去，G和H为了保持具有同构关系的对应点的平衡，会导出无穷多个顶点。因为$|V(G)|=|V(H)|=n$是有限图，所以导出无穷多个顶点是不可能的事情。所以，假设不成立。

假设1–2　若有$G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且$u_{new}\leftrightarrow v_{new}$。

因为$G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且u_{new}仅与u_1邻接，v_{new}仅与v_n邻接，且$u_{new}\leftrightarrow v_{new}$。所以必有$u_1\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

删去顶点u_{new}和v_{new}，及其关联的边(u_{new},u_1)和(v_{new},v_n)后，在剩下的子图G和H中，依然有$u_1\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

而这又与前提“不存在任何的$G\cong H$的同构函数f，使得$u_1\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应”产生矛盾。

所以，假设$u_{new}\leftrightarrow v_{new}$不成立。

在$G+u_{new}\cong H+v_{new}$的假设下，既有$u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$不成立，又有$u_{new}\leftrightarrow v_{new}$不成立，显然自相矛盾。

所以，假设$G+u_{new}\cong H+v_{new}$不成立，即形成的新图必不同构。

（2）$k=2$，增加2条边时，结论$G+u_{new}\ncong H+v_{new}$成立。

不妨设在$G+u_{new}$中，u_{new}与u_1,u_2邻接；在$H+v_{new}$中，v_{new}与v_{n-1},v_n邻接。且不存在任何的同构函数f，使得：（2–1）$u_1\leftrightarrow v_{n-1}$，$u_2\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。（2–2）$u_1\leftrightarrow v_n$，$u_2\leftrightarrow v_{n-1}$，其余顶点一一对应。这两种情况中的任何一种成立。

假设2–1　若有$G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且$u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$。

则必有$u_i,u_{i1},u_{i2}\in V(G)$；$v_j,v_{j1},v_{j2}\in V(H)$，使得：

（2–1–1）$u_{new}\leftrightarrow v_j$，$u_1\leftrightarrow v_{j1}$，$u_2\leftrightarrow v_{j2}$，$v_{new}\leftrightarrow u_i$，$v_{n-1}\leftrightarrow u_{i1}$，$v_n\leftrightarrow u_{i2}$，其余顶点一一对应。

或者（2–1–2）$u_{new}\leftrightarrow v_j$，$u_1\leftrightarrow v_{j1}$，$u_2\leftrightarrow v_{j2}$，$v_{new}\leftrightarrow u_i$，$v_{n-1}\leftrightarrow u_{i2}$，$v_n\leftrightarrow u_{i1}$，其余顶点一一对应。

或者（2–1–3）$u_{new}\leftrightarrow v_j$，$u_1\leftrightarrow v_{j2}$，$u_2\leftrightarrow v_{j1}$，$v_{new}\leftrightarrow u_i$，$v_{n-1}\leftrightarrow u_{i1}$，$v_n\leftrightarrow u_{i2}$，其余顶点一一对应。

或者（2–1–4）$u_{new}\leftrightarrow v_j$，$u_1\leftrightarrow v_{j2}$，$u_2\leftrightarrow v_{j1}$，$v_{new}\leftrightarrow u_i$，$v_{n-1}\leftrightarrow u_{i2}$，$v_n\leftrightarrow u_{i1}$，其余顶点一一对应。

这$2!\times 2!=4$种情况之一成立。

不妨假设第（2–1–1）种情况成立。见图6所示。删掉u_{new}和v_{new}后，$u_1\not\leftrightarrow v_{j1}$，$u_2\not\leftrightarrow v_{j2}$。所以，在$H$中必存在另外2个顶点$v'_{j1},v'_{j2}$，使得在$G\cong H$中，有$u_1\leftrightarrow v'_{j1}$，$u_2\leftrightarrow v'_{j2}$。

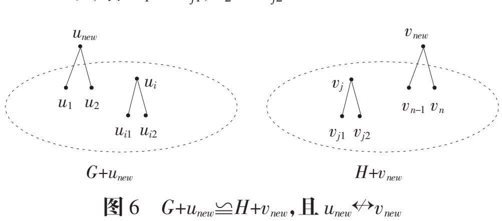


图6　$G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且$u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

因为在新图中，$u_1\not\leftrightarrow v'_{j1}$，$u_2\not\leftrightarrow v'_{j2}$，所以在$G$中必存在另外2个顶点$u'_{i1},u'_{i2}$，使得在$G+u_{new}\cong H+v_{new}$中，有$u'_{i1}\leftrightarrow v'_{j1}$，$u'_{i2}\leftrightarrow v'_{j2}$。见图7所示。

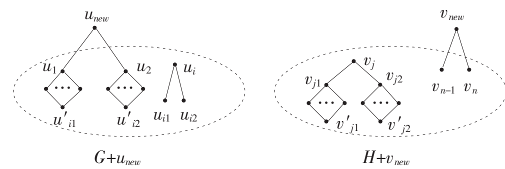


图7　$G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且$u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

重复上述过程，删掉u_{new}和v_{new}后，G中有两组具有同构关系的对应点类，每组由2个顶点组成，（例如，$\{u_1,u'_{i1}\}$组，$\{u_2,u'_{i2}\}$组），而在H中虽有两组具有同构关系的对应点类，但每组由1个顶点组成，（例如，$\{v'_{j1}\}$组，$\{v'_{j2}\}$组）。所以，在H中必存在另外2个顶点v''_{j1},v''_{j2}，分别与u_1和u_2对应，以便使得具有同构关系的对应点保持平衡。见图8所示。

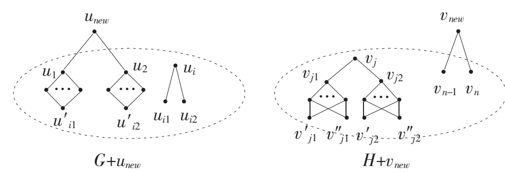


图8　$G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且$u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

这样一来，又导致在G图中存在另外的2个顶点u''_{i1},u''_{i2}，使新图中具有同构关系的对应点保持平衡。见图9所示。

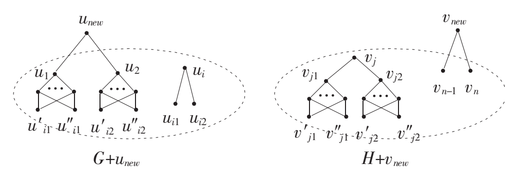


图9　$G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且$u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

G中多出2个顶点u''_{i1},u''_{i2}，又导致H图中多出2个顶点，反过来又导致G图中再多出2个顶点。

如此这样，一直下去，G和H为了保持具有同构关系的对应点的平衡，会导致出无穷多个顶点。因为$|V(G)|=|V(H)|=n$是有限图，所以导出无穷多个顶点是不可能的事情。所以，假设不成立。所以，第（2–1–1）种情况不成立。

与此类似，采用相同的方法，可以证明情况（2–1–2），（2–1–3），（2–1–4）都不成立。

所以，在$G+u_{new}\cong H+v_{new}$下，$u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$不成立。

假设2–2　若有$G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且$u_{new}\leftrightarrow v_{new}$。下面分$2!\times 2!+1=5$种情况进行分析：

（2–2–1）$u_1\leftrightarrow v_{n-1}$，$u_2\not\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

（2–2–2）$u_1\not\leftrightarrow v_{n-1}$，$u_2\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

（2–2–3）$u_1\leftrightarrow v_n$，$u_2\not\leftrightarrow v_{n-1}$，其余顶点一一对应。

（2–2–4）$u_1\not\leftrightarrow v_n$，$u_2\leftrightarrow v_{n-1}$，其余顶点一一对应。

（2–2–5）$u_1\not\leftrightarrow v_{n-1}$，$u_1\not\leftrightarrow v_n$，$u_2\not\leftrightarrow v_{n-1}$，$u_2\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

针对（2–2–1）情况。因为$u_{new}\leftrightarrow v_{new}$，$u_1\leftrightarrow v_{n-1}$，$G+u_{new}\cong H+v_{new}$。所以，由引理1知，在$G+u_{new}$图中删去边$(u_{new},u_1)$，在$H+v_{new}$图中删去边$(v_{new},v_{n-1})$，剩下的子图同构。而此时有$u_{new}\leftrightarrow v_{new}$，$u_2\not\leftrightarrow v_n$。根据前面的$k=1$的归纳假设知，这种情况不会出现。矛盾。采用（2–2–1）的证明方法，依次可以证明从（2–2–2）到（2–2–4）这些情况都不会出现。

针对(2-2-5)情况。因为 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$，且 $deg(u_{new})=deg(v_{new})=2$，$u_{new}$ 邻接的顶点仅为 u_1,u_2；v_{new} 邻接的顶点仅为 v_{n-1},v_n。又新图同构 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$，所以这种情况（即 $u_1\not\leftrightarrow v_{n-1},u_1\not\leftrightarrow v_n,u_2\not\leftrightarrow v_{n-1},u_2\not\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应）是不可能出现。

所以，在 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$ 的情况下，只可能有下面 2! =2 种情况之一出现。

(2-3-1)$u_1\leftrightarrow v_{n-1},u_2\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

(2-3-2)$u_1\leftrightarrow v_n,u_2\leftrightarrow v_{n-1}$，其余顶点一一对应。

如同前面的证明过程，毫无疑问，只要删去顶点 u_{new} 和 v_{new}，及其各自相关的边 (u_{new},u_1)，(u_{new},u_2)，(v_{new},v_{n-1})，(v_{new},v_n)；所得子图同构 $G\cong H$，且有下列 2! =2 种情况之一成立。

(2-4-1)$u_1\leftrightarrow v_{n-1},u_2\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

(2-4-2)$u_1\leftrightarrow v_n,u_2\leftrightarrow v_{n-1}$，其余顶点一一对应。

显然，这与前提"不存在任何的同构函数 f，使得(2-1)情况（即(2-4-1)情况），和(2-2)情况（即(2-4-2)情况），这两种情况之一成立"产生矛盾。

所以，假设 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$ 不成立。

在 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$ 的假设下，既有 $u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$ 不成立，又有 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$ 不成立，显然自相矛盾。

所以，假设 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$ 不成立，即形成的新图必不同构。

(3)假设，增加 $k=m$ 条边时，结论 $G+u_{new}\ncong H+v_{new}$ 成立。

(4)下面证当增加 $k=m+1$ 条边时，结论 $G+u_{new}\ncong H+v_{new}$ 依然成立。

不妨设在 $G+u_{new}$ 中，u_{new} 与 $u_1,u_2,\cdots,u_m,u_{m+1}$ 邻接；在 $H+v_{new}$ 中，v_{new} 与 $v_{n-m},v_{n-m+1},\cdots,v_{n-1},v_n$ 邻接。且不存在任何的同构函数 f，使得：(4-1)$u_1\leftrightarrow v_{n-m},u_2\leftrightarrow v_{n-m+1},\cdots,u_m\leftrightarrow v_{n-1},u_{m+1}\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。(4-2)$u_1\leftrightarrow v_{n-m},u_2\leftrightarrow v_{n-m+1},\cdots,u_m\leftrightarrow v_n,u_{m+1}\leftrightarrow v_{n-1}$，其余顶点一一对应。…(4-($m$+1)!)$u_1\leftrightarrow v_n,u_2\leftrightarrow v_{n-1},\cdots,u_m\leftrightarrow v_{n-m+1},u_{m+1}\leftrightarrow v_{n-m}$，其余顶点一一对应。这($m$+1)! 种情况中的任何一种成立。

假设 4-1 若有 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且 $u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$。则必有 $u_i,u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{im},u_{im+1}\in V(G)$；$v_j,v_{j1},v_{j2},\cdots,v_{jm},v_{jm+1}\in V(H)$，使得：

(4-1-1)$u_{new}\leftrightarrow v_j,u_1\leftrightarrow v_{j1},u_2\leftrightarrow v_{j2},\cdots,u_{m+1}\leftrightarrow v_{jm+1},v_{new}\leftrightarrow u_i,v_{n-m}\leftrightarrow u_{i1},v_{n-m+1}\leftrightarrow u_{i2},\cdots,v_n\leftrightarrow u_{im+1}$，其余顶点一一对应。

或者(4-1-2)$u_{new}\leftrightarrow v_j,u_1\leftrightarrow v_{j1},u_2\leftrightarrow v_{j2},\cdots,u_{m+1}\leftrightarrow v_{jm+1},v_{new}\leftrightarrow u_i,v_{n-m}\leftrightarrow u_{i1},v_{n-m+1}\leftrightarrow u_{i2},\cdots,v_{n-1}\leftrightarrow u_{im+1},v_n\leftrightarrow u_{im}$，其余顶点一一对应。

…

或者(4-1-(m+1)!)$u_{new}\leftrightarrow v_j,u_1\leftrightarrow v_{j1},u_2\leftrightarrow v_{j2},\cdots,u_{m+1}\leftrightarrow v_{jm+1},v_{new}\leftrightarrow u_i,v_{n-m}\leftrightarrow u_{im+1},v_{n-m+1}\leftrightarrow u_{im},\cdots,v_{n-1}\leftrightarrow u_{i2},v_n\leftrightarrow u_{i1}$，其余顶点一一对应。

…

或者(4-1-(m+1)!×(m+1)!)$u_{new}\leftrightarrow v_j,u_1\leftrightarrow v_{jm+1},u_2\leftrightarrow v_{jm},\cdots,u_m\leftrightarrow v_{j2},u_{m+1}\leftrightarrow v_{j1},v_{new}\leftrightarrow u_i,v_{n-m}\leftrightarrow u_{im+1},v_{n-m+1}\leftrightarrow u_{im},\cdots,v_{n-1}\leftrightarrow u_{i2},v_n\leftrightarrow u_{i1}$，其余顶点一一对应。

这(m+1)! ×(m+1)! 种情况之一成立。

不妨假设第(4-1-1)种情况成立。见图 10 所示。删掉 u_{new} 和 v_{new} 后，$u_1\not\leftrightarrow v_{j1},u_2\not\leftrightarrow v_{j2},\cdots,u_{m+1}\not\leftrightarrow v_{jm+1}$。所以，在 H 中必存在另外 m+1 个顶点 $v'_{j1},v'_{j2},\cdots,v'_{jm+1}$，使得在 $G\cong H$ 中，有 $u_1\leftrightarrow v'_{j1}$，$u_2\leftrightarrow v'_{j2},\cdots,u_{m+1}\leftrightarrow v'_{jm+1}$。

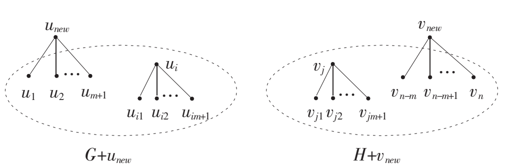


图 10 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且 $u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

因为在新图中，$u_1\not\leftrightarrow v'_{j1},u_2\not\leftrightarrow v'_{j2},\cdots,u_{m+1}\not\leftrightarrow v'_{jm+1}$，所以在 G 中必存在另外 m+1 个顶点 $u'_{i1},u'_{i2},\cdots,u'_{im+1}$，使得在 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$ 中，有 $u'_{i1}\leftrightarrow v'_{j1},u'_{i2}\leftrightarrow v'_{j2},\cdots,u'_{im+1}\leftrightarrow v'_{jm+1}$。见图 11 所示。

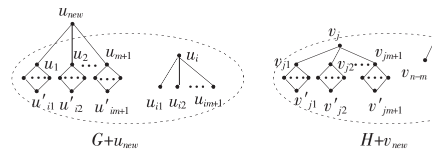


图 11 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且 $u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

重复上述过程，删掉 u_{new} 和 v_{new} 后，G 中有两两一组构成的具有同构关系的对应点类 m+1 个，每组由 2 个顶点组成，(例如，$\{u_1,u'_{i1}\}$组，$\{u_2,u'_{i2}\}$组，…，$\{u_{m+1},u'_{im+1}\}$组)，而在 H 中只有单顶点一组构成的具有同构关系的对应点类 m+1 个，但每组由 1 个顶点组成，(例如，$\{v'_{j1}\}$组，$\{v'_{j2}\}$组，…，$\{v'_{jm+1}\}$组)。所以，在 H 中必存在另外 m+1 个顶点 $v''_{j1},v''_{j2},\cdots,v''_{jm+1}$，分别与 $u_1,u_2,\cdots,u_{m+1}$ 对应，以便使得具有同构关系的对应点保持平衡。见图 12 所示。

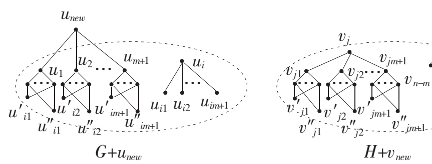


图 12 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且 $u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$

这样一来，又导致在 G 图中存在另外的 m+1 个顶点 $u''_{i1},u''_{i2},\cdots,u''_{im+1}$，使新图中具有同构关系的对应点保持平衡。$G$ 图中多出的 m+1 个顶点，又导致 H 图中多出 m+1 个顶点，反过来又导致 G 图中再多出 m+1 个顶点。

如此这样，一直下去，G 和 H 为了保持具有同构关系的对应点的平衡，会导致出无穷多个顶点。因为$|V(G)|=|V(H)|=n$ 是有限图，所以导出无穷多个顶点是不可能的事情。所以，假设不成立。所以，第(4-1-1)种情况不成立。

与此类似，采用相同的方法，可以证明情况(4-1-2)，…，(4-1-(m+1)!)，…，(4-1-(m+1)! ×(m+1)!)都不成立。

所以，在 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$ 下，$u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$ 不成立。

假设 4-2 若有 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$。下面分 m×(m+1)! ×(m+1)! +1 种情况进行分析：

(4-2-1)$u_1\leftrightarrow v_{n-m},u_2\not\leftrightarrow v_{n-m+1},\cdots,u_{m+1}\not\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

(4-2-2)$u_1\leftrightarrow v_{n-m},u_2\leftrightarrow v_{n-m+1},u_3\not\leftrightarrow v_{n-m+2},\cdots,u_{m+1}\not\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

…

(4-2-m)$u_1\leftrightarrow v_{n-m},u_2\leftrightarrow v_{n-m+1},\cdots,u_m\leftrightarrow v_{n-1},u_{m+1}\not\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

(4-2-(m+1))$u_1\leftrightarrow v_{n-m},u_2\not\leftrightarrow v_{n-m+1},\cdots,u_m\not\leftrightarrow v_n,u_{m+1}\not\leftrightarrow v_{n-1}$，其余顶点一一对应。

…

(4-2-m×(m+1)! ×(m+1)!)$u_1\leftrightarrow v_n,u_2\leftrightarrow v_{n-1},\cdots,u_m\leftrightarrow v_{n-m+1},u_{m+1}\not\leftrightarrow v_{n-m}$，其余顶点一一对应。

(4-2-m×(m+1)! ×(m+1)! +1)$u_1\not\leftrightarrow v_{n-m},u_1\not\leftrightarrow v_{n-m+1},\cdots,u_1\not\leftrightarrow v_n,u_2\not\leftrightarrow v_{n-m},u_2\not\leftrightarrow v_{n-m+1},\cdots,u_2\not\leftrightarrow v_n,\cdots,u_{m+1}\not\leftrightarrow v_{n-m},u_{m+1}\not\leftrightarrow v_{n-m+1},\cdots,u_{m+1}\not\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

针对(4-2-1)情况。因为 $u_{new}\leftrightarrow v_{new},u_1\leftrightarrow v_{n-m}$，$G+u_{new}\cong H+v_{new}$。

所以，由引理 1 知，在 $G+u_{new}$ 图中删去边（u_{new}，u_1），在 $H+v_{new}$ 图中删去边（v_{new}，v_{n-m}），剩下的子图同构。而此时有 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$，$u_2\not\leftrightarrow v_{n-m+1}$，…，$u_{m+1}\not\leftrightarrow v_n$。根据前面的 $k=m$ 的归纳假设知，这种情况不会出现。矛盾。

针对（4-2-2）情况。因为 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$，$u_1\leftrightarrow v_{n-m}$，$u_2\leftrightarrow v_{n-m+1}$，$G+u_{new}\cong H+v_{new}$。所以，由引理 1 知，在 $G+u_{new}$ 图中删去边（u_{new}，u_1），（u_{new}，u_2），在 $H+v_{new}$ 图中删去边（v_{new}，v_{n-m}），（v_{new}，v_{n-m+1}），剩下的子图同构。而此时有 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$，$u_3\not\leftrightarrow v_{n-m+2}$，…，$u_{m+1}\not\leftrightarrow v_n$。根据前面的 $k=m-1$ 的归纳假设知，这种情况不会出现。矛盾。

采用（4-2-1）和（4-2-2）的证明方法，结合归纳假设 $k=1,2,\cdots,m$；依次可以证明从（4-2-3）到（4-2-m×（m+1）！×（m+1）！），这些情况都不会出现。

针对（4-2-m×（m+1）！×（m+1）！+1）情况。因为 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$，且 $deg(u_{new})=deg(v_{new})=m+1$，$u_{new}$ 邻接的顶点仅为 $u_1,u_2,\cdots,u_m,u_{m+1}$；$v_{new}$ 邻接的顶点仅为 $v_{n-m},v_{n-m+1},\cdots,v_{n-1},v_n$。又新图同构 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$，所以这种情况（即 $u_1\not\leftrightarrow v_{n-m}$，$u_1\not\leftrightarrow v_{n-m+1}$，…，$u_1\not\leftrightarrow v_n$，$u_2\not\leftrightarrow v_{n-m}$，$u_2\not\leftrightarrow v_{n-m+1}$，…，$u_2\not\leftrightarrow v_n$，…，$u_{m+1}\not\leftrightarrow v_{n-m}$，$u_{m+1}\not\leftrightarrow v_{n-m+1}$，…，$u_{m+1}\not\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应）是不可能出现。

所以，在 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$，且 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$ 的情况下，只可能有下面（m+1）！种情况之一出现。

（4-3-1）$u_1\leftrightarrow v_{n-m}$，$u_2\leftrightarrow v_{n-m+1}$，…，$u_m\leftrightarrow v_{n-1}$，$u_{m+1}\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

（4-3-2）$u_1\leftrightarrow v_{n-m}$，$u_2\leftrightarrow v_{n-m+1}$，…，$u_m\leftrightarrow v_n$，$u_{m+1}\leftrightarrow v_{n-1}$，其余顶点一一对应。

…

（4-3-（m+1）！）$u_1\leftrightarrow v_n$，$u_2\leftrightarrow v_{n-1}$，…，$u_m\leftrightarrow v_{n-m+1}$，$u_{m+1}\leftrightarrow v_{n-m}$，其余顶点一一对应。

如同前面的证明过程，毫无疑问，只要删去顶点 u_{new} 和 v_{new}，及其各自相关的边（u_{new}，u_1），（u_{new}，u_2），…，（u_{new}，u_{m+1}），（v_{new}，v_{n-m}），（v_{new}，v_{n-m+1}），…，（v_{new}，v_n）；所得子图同构 $G\cong H$，且有下列（m+1）！种情况之一成立。

（4-4-1）$u_1\leftrightarrow v_{n-m}$，$u_2\leftrightarrow v_{n-m+1}$，…，$u_m\leftrightarrow v_{n-1}$，$u_{m+1}\leftrightarrow v_n$，其余顶点一一对应。

（4-4-2）$u_1\leftrightarrow v_{n-m}$，$u_2\leftrightarrow v_{n-m+1}$，…，$u_m\leftrightarrow v_n$，$u_{m+1}\leftrightarrow v_{n-1}$，其余顶点一一对应。

…

（4-4-（m+1）！）$u_1\leftrightarrow v_n$，$u_2\leftrightarrow v_{n-1}$，…，$u_m\leftrightarrow v_{n-m+1}$，$u_{m+1}\leftrightarrow v_{n-m}$，其余顶点一一对应。

显然，这与前提“不存在任何的同构函数 f，使得（4-1）情况（即（4-4-1）情况），（4-2）情况（即（4-4-2）情况），…，和（4-（m+1）！）情况（即（4-4-（m+1）！）情况），这（m+1）！种情况之一成立”产生矛盾。

所以，假设 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$ 不成立。

在 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$ 的假设下，既有 $u_{new}\not\leftrightarrow v_{new}$ 不成立，又有 $u_{new}\leftrightarrow v_{new}$ 不成立，显然自相矛盾。

所以，假设 $G+u_{new}\cong H+v_{new}$ 不成立，即形成的新图必不同构。

至此，当 $k=m+1$ 时命题依然成立。

所以，根据归纳法原则，本定理命题成立。

推论 1　同构的两个图，各自增加一个顶点和与该顶点关联的若干条边，形成了两个新图。

（1）这两个新图同构，当且仅当，新顶点的新关联边依然保持对应关系。

（2）这两个新图不同构，当且仅当，新顶点的新关联边不保持对应关系。

证明：由定理 1 和定理 2 的否定命题，可以得出推论 1 的（1）成立。

另一方面，由定理 2 和定理 1 的否定命题，可以得出推论 1 的（2）成立。

3　结束语

图同构的判定性问题，由于缺乏有效而简洁的充分必要条件，因此不容易解决。S.M.Ulam 提出了一个判定图同构的猜想，也称为图的重构猜想：若存在双射函数 $f:V(G)\rightarrow V(H)$，使对任意的 $v\in V(G)$，有 $G-v\cong H-f(v)$，则称 H 是 G 的一个重构。虽然围绕这个猜想，产生了许多有积极意义的研究成果[1-11]；但是，非常遗憾，至今没有完全解决 Ulam 猜想。

为了寻找图同构的判定方法，提出了一个新技术，即具有同构关系的对应点无限衍生技术。利用这个技术，采用数学归纳法证明了下述思想：同构的两个图，各自增加一个顶点和与该顶点关联的若干条边，形成了两个新图。（1）这两个新图同构，当且仅当，新顶点的新关联边依然保持对应关系。（2）这两个新图不同构，当且仅当，新顶点的新关联边不保持对应关系。

参考文献：

[1] Kelly P J.A congruence theorem for trees[J].Pacific J Math，1957（7）：961-968.

[2] Bondy J A.On Kelly's congruence for trees[J].Proc Cambridge Philos Soc，1969，65：1-11.

[3] Harary F，Palmer E.The reconstruction of a tree from its maximal subtrees[J].Canadian J Math，1966，18：803-810.

[4] Manvel B.Reconstructing of trees[J].Canadian J Math，1970，22：55-60.

[5] J.Nešetřil.A congruence theorem for asymmetric trees[J].Pacific J Math，1971，37：771-778.

[6] Kocay W L.Some new methods in reconstruction theory[C]//A Lecture Notes in Math C，952.[S.l.]：Springer，1982：89-114.

[7] Xie Li-tong，Fan Hong-bing.On reconstructible local subgraphs[J].J Advances in Math，1996，25：65-70.

[8] Xie Li-tong，Fan Hong-bing.A new result on reconstructible local subgraphs[J].J Advances in Math，1997，26：440-444.

[9] 谢力同，刘桂真.领域伪相似点的可重构性[J].数学物理学报，1997（12）：225-228.

[10] 龙和平，谢力同，严谨，等.边型带权核子图的边可重构性[J].山东大学学报：理学版，2002，37：105-107.

[11] 刘桂真，禹继国，谢力同.两类图同构的充分必要条件[J].山东大学学报：理学版，2003，38：1-3.