文章编号:1671-9352(2008)03-0043-05

奇性($k,n-k$)共轭边值问题解的存在惟一性

王建国,高庆龄
(山东省教育学院数学系, 山东 济南 250013)

摘要:讨论奇性($k,n-k$)共轭边值问题解的存在惟一性,建立了存在惟一性定理,给出了解的迭代,以及解关于参数的连续性和单调性。

关键词:共轭边值问题; 全连续算子; 解的存在惟一性
中图分类号:O175;O177.91　**文献标志码**:A

Existence and uniqueness of solution for singular ($k,n-k$) conjugate boundary value problems

WANG Jian-guo, GAO Qing-ling
(Department of Mathematics, Educational Institute of Shandong, Jinan 250013, Shandong, China)

Abstract: Nonlinear singular ($k,n-k$) conjugate boundary value problems were considered. The existence and uniqueness of the solution and the continuity and monotone of solutions on parameter λ were discussed, and some results were established.

Key words: conjugate boundary value problems; completely continuous operator; existence and uniqueness of the solution

1　引言与准备

设 $1\leqslant k\leqslant n-1$,考查($k,n-k$)共轭边值问题

$$(-1)^{n-k}x^{(n)}=\lambda p(t)f(x),\ t\in(0,1),\tag{1}$$

$$x^{(i)}(0)=0,\ x^{(j)}(1)=0,\ 0\leqslant i\leqslant k-1,\ 0\leqslant j\leqslant n-k-1。\tag{2}$$

近十几年来,问题(1),(2)深受重视,出现了一系列的研究文章[1-3]。这些已有的结果主要是在 $p(t)$带有或不带有奇性情况下的解或多解存在性以及解的性质,但对解的存在性惟一性尚未给予充分研究。本文在 $p(t)$带有奇性的情况下,对一类非线性函数项讨论了问题(1),(2)解的存在惟一性。

$x(t)$是问题(1),(2)的解是指 $x\in C^n(0,1)\cap C^k[0,1)\cap C^{n-k}(0,1]$, 并且 $x(t)$满足(1),(2)。如果始终假设:

(Ⅰ) $f(t)$为$[0,+\infty)$上的非负可积函数;

(Ⅱ) $p(t)$为$(0,1)\to(0,+\infty)$上的连续函数, 并且$0<\int_0^1 h(t)p(t)\mathrm{d}t<+\infty$。其中 $h(t)$的定义见下文,

则 $x(t)$ 是问题(1),(2) 的解当且仅当 $x(t)$ 是积分方程

$$x(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)p(s)f(x(s))\mathrm{d}s\tag{3}$$

收稿日期:2007-10-30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371066)
作者简介:王建国(1965-　),男,教授,研究方向为非线性泛函分析.Email: jgw0801@163.com

在 $C[0,1]$ 中的解。其中 $G(t,s)$ 是对应的齐次方程的格林函数[1]:

$$G(t,s)=\frac{1}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\begin{cases}\int_0^{s(1-t)}\tau^{n-k-1}(\tau+t-s)^{k-1}\mathrm{d}\tau, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\ \int_0^{t(1-s)}\tau^{k-1}(\tau+s-t)^{n-k-1}\mathrm{d}\tau, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1。\end{cases}$$

容易证明 $G(t,s)$ 满足 $\alpha(t)g(s)\leqslant G(t,s)\leqslant\alpha(t)h(s)$, 其中

$$\alpha(t)=\frac{t^k(1-t)^{n-k}}{(k-1)!(n-k-1)!},\ g(s)=\frac{s^{n-k}(1-s)^k}{(n-1)},\ h(s)=\frac{s^{n-k-1}(1-s)^{k-1}}{\min\{k,n-k\}}。$$

对任意的 $x\in C[0,1]$, 令 $Ax(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)f(x(s))\mathrm{d}s$, 则在假设(Ⅰ),(Ⅱ)下, $A:C[0,1]\to C[0,1]$, 并且 $AP\subset P_\alpha$, 这里 $P=\{x\in C[0,1]:x(t)\geqslant 0,t\in[0,1]\}$, $P_\alpha=\{kx\in P$:存在 $a>0,b>0$,使得 $a\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant b\alpha(t),t\in[0,1];k\geqslant 0\}$, P 是 $C[0,1]$ 中的锥。显然, $x(t)$ 是问题(1),(2)的正解当且仅当 x 是 λA 在 P 中的不动点。

对任意的 $x\in C[0,1]$, 令 $Bx(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)x(s)\mathrm{d}s$, 则在假设(Ⅱ)下, B 是 $C[0,1]$ 上的正有界线性算子,并且是 α- 有界的,因此, B 有惟一的正特征值 λ_1 对应惟一的就范正特征向量 $\boldsymbol{\varphi}=\varphi(t)$, $\varphi(t)=\lambda_1\int_0^1 G(t,s)p(s)\varphi(s)\mathrm{d}s$,并且其代数重数为1。

本文中还将使用以下已知结果[4,5]:

引理 0 设 P 是 Banach 空间 E 中的正规锥, $A:[u_0,v_0]\to E$ 是全连续的增算子,它满足 $u_0\leqslant Au_0\leqslant Av_0\leqslant v_0$,那么 A 在 $[u_0,v_0]$ 中必有最大不动点 x^* 与最小不动点 x_*,并且若令 $u_n=Au_{n-1},v_n=Av_{n-1}(n=1,2,\cdots)$,那么 $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}v_n$, $x_*=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

2 主要结论

关于非线性项 $f(u)$,我们列出以下假设

(H1) 对任意的 $u>0,0<k<1$,都有 $f(ku)>kf(u)$;

(H2) $f(u)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数, $f(0+)=f(0)$。

引理 1 若 $f(u)$ 满足(H1),(H2),则 $f(u)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数,并且 $\frac{f(u)}{u}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减。

证明 由(H2),对任意的 $u>0$, $f(u+0)$ 与 $f(u-0)$ 均存在有限,且 $f(u-0)\leqslant f(u)\leqslant f(u+0)$。若 $f(u+0)>f(u)$, 取 $k>1$, 使 $kf(u)<f(u+0)$, 由(H1), $f(u+0)\leqslant f(ku)<kf(u)$, 矛盾。若 $f(u-0)<f(u)$,取 $k<1$, 使 $kf(u)>f(u-0)$, 则由(H1), $f(u-0)\geqslant f(ku)>kf(u)$, 矛盾。所以, $f(u-0)=f(u)=f(u+0)$,即 $f(u)$ 在 $u>0$ 时连续。

由(H1),对任意的 $u>0,k>1$,都有 $\frac{f(ku)}{ku}<\frac{kf(u)}{ku}=\frac{f(u)}{u}$,所以 $\frac{f(u)}{u}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减。

由引理1, $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{f(u)}{u}$ 与 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}$ 均存在(允许为 $+\infty$)。以下记 $a=\lim\limits_{u\to 0+}\frac{f(u)}{u}$, $b=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}$,则 $a>b$。因此,在假设(H1)、(H2)之下可以得到,对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $r>0,d>0,M>0$ 使得:

当 $0<u\leqslant r$ 时, $f(u)>(a-\varepsilon)u$,(这时 $a<+\infty$);或 (4)

当 $0<u\leqslant r$ 时, $f(u)>du$,(这时 $a=+\infty$); (5)

对任意的 $u>0$, $f(u)<(b+\varepsilon)u+M$。 (6)

定理 1 若 $f(u)$ 满足(H1),(H2),则对任意的 $\lambda\in\left(\frac{\lambda_1}{a},\frac{\lambda_1}{b}\right)$,问题(1),(2)存在惟一解, 并且可迭代求解。

证明 首先由引理1知 A 是 $C[0,1]$ 上的全连增续算子,并且由假设(H1)可以推出:对任意的 $x\in P_\alpha$,

$0<k<1$,都存在 $\eta>0$,使得 $A(kx)\geqslant(1+\eta)kAx$。

当 $a<+\infty$ 时,取 $\varepsilon<\min\left\{a-\dfrac{\lambda_1}{\lambda},\dfrac{\lambda_1}{\lambda}-b\right\}$,取 $r>0,M>0$ 使式(4),(6)成立;当 $a=+\infty$ 时,取 $\varepsilon<\dfrac{\lambda_1}{\lambda}-b,d>\dfrac{\lambda_1}{\lambda}$,取 $r>0,M>0$ 使式(5),(6)成立。

选取 $k_1>0$ 使 $\|k_1\varphi\|\leqslant r$,记 $u_0(t)=k_1\varphi(t)$,则

$$\lambda Au_0(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)p(s)f(u_0(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda(a-\varepsilon)\int_0^1G(t,s)p(s)u_0(s)\mathrm{d}s=\frac{\lambda(a-\varepsilon)}{\lambda_1}u_0(t)\geqslant u_0(t),(a<+\infty)$$

或者

$$\lambda Au_0(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)p(s)f(u_0(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda d\int_0^1G(t,s)p(s)u_0(s)\mathrm{d}s=\frac{\lambda d}{\lambda_1}u_0(t)\geqslant u_0(t),(a=+\infty),$$

即 $\lambda Au_0\geqslant u_0$。其次,选取 k_2,使 $k_2>\dfrac{\lambda M\int_0^1h(s)p(s)\mathrm{d}s}{(\lambda_1-\lambda(b+\varepsilon))\int_0^1g(s)p(s)\varphi(s)\mathrm{d}s}$,并记 $v_0(t)=k_2\varphi(t)$。由于 $\int_0^1G(t,s)p(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha(t)\int_0^1h(s)p(s)\mathrm{d}s$,

$$v_0(t)=\lambda_1\int_0^1G(t,s)p(s)v_0(t)\mathrm{d}s\geqslant k_2\lambda_1\alpha(t)\int_0^1g(s)p(s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

故有

$$\begin{aligned}\lambda Av_0(t)&=\lambda\int_0^1G(t,s)p(s)f(v_0(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1G(t,s)p(s)[(b+\varepsilon)v_0(s)+M]\mathrm{d}s=\\&\frac{\lambda(b+\varepsilon)}{\lambda_1}v_0(t)+\lambda M\int_0^1G(t,s)p(s)\mathrm{d}s\leqslant\\&v_0(t)-(1-\frac{\lambda(b+\varepsilon)}{\lambda_1})k_2\lambda_1\alpha(t)\int_0^1g(s)p(s)\varphi(s)\mathrm{d}s+\lambda M\alpha(t)\int_0^1h(s)p(s)ds=\\&v_0(t)-\left[k_2(\lambda_1-\lambda(b+\varepsilon))\int_0^1g(s)p(s)\varphi(s)\mathrm{d}s+\lambda M\int_0^1h(s)p(s)\mathrm{d}s\right]\alpha(t)\leqslant v_0(t),\end{aligned}$$

即 $\lambda Av_0\leqslant v_0$。

所以,$\lambda A:[u_0,v_0]\to[u_0,v_0]$,故由引理0知 λA 在$[u_0,v_0]$中至少有一个不动点,并且若令 $u_n=\lambda Au_{n-1}$,$v_n=\lambda Av_{n-1},n=1,2,\cdots$,那么$\{u_n\}$与$\{v_n\}$均收敛,并且$\{u_n\}$与$\{v_n\}$的极限都是 λA 的不动点。

下证 λA 至多有一个正不动点。设 $x_1=\lambda Ax_1,x_2=\lambda Ax_2$,则存在正数 $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ 使得 $\alpha_1\alpha\leqslant x_1\leqslant\beta_1\alpha$,$\alpha_2\alpha\leqslant x_2\leqslant\beta_2\alpha$,于是有 $x_1\geqslant\alpha_1\alpha=\dfrac{\alpha_1}{\beta_2}\beta_2\alpha\geqslant\dfrac{\alpha_1}{\beta_2}x_2$,因此若令 $k_0=\sup\{k:x_1\geqslant kx_2\}$,则 $k_0>0,x_1\geqslant k_0x_2$。下证 $k_0\geqslant1$,不然若 $k_0<1$,则

$$x_1=\lambda Ax_1\geqslant\lambda A(k_0x_2)\geqslant\lambda k_0(1+\eta)A(x_2)=k_0(1+\eta)x_2,$$

这与 k_0 的定义矛盾,所以 $x_1\geqslant x_2$。同理可证 $x_1\leqslant x_2$,所以 $x_1=x_2$,惟一性得证。证毕。

对任意的 $\lambda\in\left(\dfrac{\lambda_1}{a},\dfrac{\lambda_1}{b}\right)$,以 $x(t;\lambda)$ 表示问题(1),(2)的惟一正解,那么有

定理 2　在假设(H1),(H2)满足时,$x(t;\lambda)$ 是关于 λ 的单调递增的连续函数,并且 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1/a}\|x(t;\lambda)\|=0,\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1/b}\|x(t;\lambda)\|=\infty$。

证明　首先证明 $x(t;\lambda)$ 关于 λ 单调递增。事实上,对 $\lambda',\lambda''\in\left(\dfrac{\lambda_1}{a},\dfrac{\lambda_1}{b}\right)$,$\lambda'>\lambda''$,存在最大的 $k_0>0$,使 $x(t;\lambda')\geqslant k_0x(t;\lambda'')$。下证 $k_0\geqslant1$,不然若 $k_0<1$,则

$$x(t;\lambda')=\lambda'Ax(t;\lambda')\geqslant\lambda'A(k_0x(t;\lambda''))>\lambda'k_0Ax(t;\lambda'')=\frac{\lambda'}{\lambda''}k_0x(t;\lambda''),$$

这与 k_0 的定义矛盾,所以 $x(t;\lambda') \geqslant x(t;\lambda'')$。

其次证明 $x(t;\lambda)$ 关于 λ 是连续的。对任意的 $\lambda_0 \in \left(\frac{\lambda_1}{a},\frac{\lambda_1}{b}\right)$,由 $x(t;\lambda)$ 关于 λ 的单调递增性知,在 λ_0 附近 $x(t;\lambda)$ 是序有界的,从而在 $C[0,1]$ 是有界的,所以对任意的序列 $\lambda_n \to \lambda_0(n\to\infty)$, $\{x(t;\lambda_n)\}(x(t;\lambda_n) = \lambda_n Ax(t;\lambda_n))$ 是 $C[0,1]$ 中的有界序列,因此由 A 的全连续性知 $\{x(t;\lambda_n)\}$ 在 $C[0,1]$ 中至少有一收敛子列(不妨设,该子列即为 $\{x(t;\lambda_n)\}$),设其极限为 x_0,在 $x(t;\lambda_n) = \lambda_n Ax(t;\lambda_n)$ 中令 $n\to\infty$ 得 $x_0 = \lambda_0 Ax_0$,再由 $\lambda_0 A$ 正不动点的惟一性得 $x_0 = x(t;\lambda_0)$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x(t;\lambda_n) = x(t;\lambda_0)$,所以 $x(t;\lambda)$ 在 $\left(\frac{\lambda_1}{a},\frac{\lambda_1}{b}\right)$ 中连续。

下证 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1/a}\|x(t;\lambda)\| = 0$。若 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1/a}\|x(t;\lambda)\| \neq 0$,则存在 $\lambda_n \to \lambda_1/a$,存在 $\tau > 0$,使 $\|x(t;\lambda_n)\| \geqslant \tau$。由于 A 全连续并且 $x(t;\lambda)$ 关于 λ 单调,故 $\{x(t;\lambda_n)\}$ 在 $C[0,1]$ 中至少有一收敛子列(不妨设,该子列即为 $\{x(t;\lambda_n)\}$),设其极限为 x_0,它满足 $x_0 = \frac{\lambda_1}{a}Ax_0$, $\|x_0\| \geqslant \tau$。显然 $\frac{\lambda_1}{a}$ 不能为0,即 $a < +\infty$;同时还存在正数 δ_1,δ_2,使得 $\delta_1\alpha \leqslant x_0 = \frac{\lambda_1}{a}Ax_0 \leqslant \delta_2\alpha$。由 $\alpha = \alpha(t)$ 的定义,存在区间 $[\eta,\xi] \subset [0,1]$ 使 $\alpha(t) \geqslant \frac{1}{2}\|\alpha\|$, $\forall t\in[\eta,\xi]$,于是, $x_0(t) \geqslant \frac{\delta_1}{2}\|\alpha\| \triangleq r_0$, $\forall t\in[\eta,\xi]$。由于 $\frac{f(u)}{u}$ 严格单调递减且 $a = \lim\limits_{u\to 0+}\frac{f(u)}{u}$,故对任意的 $u \geqslant 0$, $f(u) \leqslant au$;当 $u \geqslant r_0$, $f(u) \leqslant \frac{f(r_0)}{r_0}u$,所以

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\lambda_1}{a}Ax_0 = \frac{\lambda_1}{a}\int_0^1 G(t,s)p(s)f(x_0(s))\mathrm{d}s = \\
&\frac{\lambda_1}{a}\left[\int_\eta^\xi G(t,s)p(s)f(x_0(s))\mathrm{d}s + \int_{[0,1]/[\eta,\xi]} G(t,s)p(s)f(x_0(s))\mathrm{d}s\right] \leqslant \\
&\frac{\lambda_1}{a}\left[\frac{f(r_0)}{r_0}\int_\eta^\xi G(t,s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s + a\int_{[0,1]/[\eta,\xi]} G(t,s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s\right] = \\
&\frac{\lambda_1}{a}\left[\left(\frac{f(r_0)}{r_0} - a\right)\int_\eta^\xi G(t,s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s + a\int_0^1 G(t,s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s\right] = \\
&\lambda_1\int_0^1 G(t,s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s - \left(a - \frac{f(r_0)}{r_0}\right)\int_\eta^\xi G(t,s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s \leqslant \\
&\lambda_1\int_0^1 G(t,s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s - \left(a - \frac{f(r_0)}{r_0}\right)\alpha(t)\int_\eta^\xi g(s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s \leqslant \\
&\lambda_1 Bx_0(t) - \left(a - \frac{f(r_0)}{r_0}\right)\int_\eta^\xi g(s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s\left(\int_0^1 h(s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s\right)^{-1} Bx_0(t),
\end{aligned}
$$

记 $\varepsilon_0 = (a - \frac{f(r_0)}{r_0})\int_\eta^\xi g(s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s\left(\int_0^1 h(s)p(s)x_0(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}$,则由上式得

$$
x_0 \leqslant (\lambda_1 - \varepsilon_0)Bx_0, \tag{7}
$$

式(7)表明全连续线性算子 B 具有对应有正特征函数的正特征值 $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 - \varepsilon_0$,这与 λ_1 是 B 的惟一对应有正特函数的正特征值矛盾,所以 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1/a}\|x(t;\lambda)\| = 0$。

最后证明 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1/b}\|x(t;\lambda)\| = \infty$。容易证明在 $b = 0$ 时成立,下设 $b > 0$。若不然,类似上段的证明可得,存在 $\lambda_n \to \lambda_1/b$,存在 $\rho > 0$,使 $\|x(t;\lambda_n)\| \leqslant \rho$,并且 $\{x(t;\lambda_n)\}$ 在 $C[0,1]$ 中收敛到 x^*,它满足 $\|x^*\| \leqslant \rho$, $x^* = \frac{\lambda_1}{b}Ax^*$,因此存在 $t_1 > 0$,使得 $x^* \geqslant t_1\varphi$,令 $t_0 = \sup\{t: x^* \geqslant t\varphi\}$,则 $x^* \geqslant t_0\varphi$,下证 $t_0 \geqslant 1$;事实上若 $t_0 < 1$,则

$$
x^* = \frac{\lambda_1}{b}Ax^* \geqslant \frac{\lambda_1}{b}A(t_0\varphi) \geqslant \frac{\lambda_1}{b}(1+\eta)t_0 A\varphi \geqslant \frac{\lambda_1}{b}(1+\eta)t_0 bB\varphi = (1+\eta)t_0\varphi,
$$

这与 t_0 的定义矛盾,所以 $x^* \geqslant \varphi$。由于当 $0 \leqslant u \leqslant 2\rho$ 时, $f(u) \geqslant \frac{f(2\rho)}{2\rho}u > bu$,故当 $\|x\| \leqslant 2\rho$ 时, $Ax \geqslant$

$\frac{f(2\rho)}{2\rho}Bx > bBx$,因此有$\left(取\ \omega = \frac{f(2\rho)}{2\rho b} - 1\right)$,

$$x^* = \frac{\lambda_1}{b}Ax^* \geqslant \frac{\lambda_1}{b}A\varphi \geqslant \frac{\lambda_1}{b}\frac{f(2\rho)}{2\rho}B\varphi = (1+\omega)\varphi,$$

$$x^* = \frac{\lambda_1}{b}Ax^* \geqslant \frac{\lambda_1}{b}A((1+\omega)\varphi) \geqslant \frac{\lambda_1}{b}\frac{f(2\rho)}{2\rho}(1+\omega)B\varphi = (1+\omega)^2\varphi,\cdots,$$

由此可以得到,存在正整数 n,使 $\|x^*\| \geqslant (1+\omega)^n\|\varphi\| > \rho$,这与 $\|x^*\| \leqslant \rho$ 矛盾。所以

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1/b}\|x(t;\lambda)\| = \infty。$$

参考文献:

[1] KONG Lingbin, WANG Junyu. The Green's function for $(k,n-k)$ conjugate boundary value problems and its applications[J]. J Math Anal Appl, 2001, 255:404-422.

[2] ELOE P W, HENDERSON J. Singular nonlinear $(k,n-k)$ conjugate boundary value problems[J]. J Differential Equations, 1997, 133:136-151.

[3] WANG Jianguo, QI Shishuo. Global continua of positive solutions of $(k, n-k)$ conjugate boundary value problems[J]. 应用泛函分析学报,2003,18:220-230.

[4] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科技出版社,2001.

[5] 郭大钧,孙经先. 非线性积分方程[M]. 济南:山东科技出版社,1987.

(编辑:李晓红)