计量逻辑学中的收敛理论

韩邦合[1,2],李永明[1,3]
HAN Bang-he[1,2],LI Yong-ming[1,3]

1.陕西师范大学 数学与信息科学学院,西安 710062
2.西安电子科技大学 理学院 数科系,西安 710126
3.陕西师范大学 计算机科学学院,西安 710062
1.College of Mathematics and Information Science,Shaanxi Normal University,Xi'an 710062,China
2.School of Science,Xidian University,Xi'an 710126,China
3.College of Computer Science,Shaanxi Normal University,Xi'an 710062,China
E-mail:bhhan@mail.xidian.edu.cn

HAN Bang-he,LI Yong-ming.Convergency theory in quantitative logic.Computer Engineering and Applications,2009,45(30):4-5.

Abstract: The convergency theory of quantitative logic is given.The concepts of convergency and strong convergencyin logic metric spaces are presented.Characterizations and the relations of the two conceptsdistance are proved.
Key words: truth degree;similarity degree;pseudo-metric;distance convergency;valuational convergency;net convergency;quantitative logic;approximate reasoning

摘 要:初步给出了计量逻辑学中的收敛理论。提出了逻辑度量空间中的度量收敛,赋值收敛和网收敛概念,对它们做出刻画并初步论证了它们之间的关系。
关键词:真度;相似度;伪度量;度量收敛;赋值收敛;网收敛;计量逻辑学;近似推理
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.30.002 **文章编号:**1002-8331(2009)30-0004-02 **文献标识码:**A **中图分类号:**O141.1

1 引言

众所周知,数理逻辑是以符号化为特点的形式化理论,它注重形式推理而不重视数值计算。与此相反,数值计算的目的则在于借助各种计算手段采用插值、迭代、差分或概率估算方法研究各类计算问题,它关注问题的求解以及误差估算而很少使用形式推理方法。王国俊教授于文献[1-3]中将数值逻辑与概率计算相结合提出了一个新的研究分支计量逻辑学。其主要内容为:在多值逻辑系统中提出了公式的真度概念。基于此,提出了公式间的相似度与伪度量,研究了所得逻辑度量空间的基本性质,提出并研究了逻辑理论的发散度与相容度概念,给出了三种近似推理模式。

收敛性是研究不确定性推理的一种重要工具。而计量逻辑学中的收敛理论,目前尚没有相关的概念和讨论。在 n 值逻辑系统中就计量逻辑学中的收敛问题进行研究。下面首先给出所需要的预备知识。

2 预备知识

设 $F(S)$ 是全体命题(公式)之集,即,$F(S)$ 是由原子公式之集 S 生成的 $(\neg,\vee,\rightarrow)$ 型自由代数,$A=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 的公式,赋值域 $w=w_n=\{0,\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\}$。分别用 $x_1,\cdots,x_m$ 取代 $p_1,p_2,\cdots,p_m$,并把 A 中的逻辑连接词 $\neg,\vee,\rightarrow$ 换为 W 中的运算 $\neg,\vee,\rightarrow$,则得 m 元函数 $\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m):w^m\rightarrow w$,称 $\overline{A}$ 为 A 所诱导的函数。W 中的 $\neg,\vee$ 运算为线性补和取大运算 $\rightarrow$ 取决于 n 值逻辑系统。在 Lukasiewicz n 值逻辑系统 L_n 和 R_0 型 n 值逻辑系统 L_n^* 中,$\rightarrow$ 分别为 Lukasiewicz 蕴涵算子 $\forall a,b\in[0,1]$,$\rightarrow_L$ 和 R_0 蕴涵算子 $\rightarrow_o$。这里 $\forall a,b\in[0,1]$,$a\rightarrow_L b=(1-a+b)\wedge 1$;$a\leqslant b$ 时,$a\rightarrow_o b=1$,否则 $a\rightarrow_o b=(1-a)\vee b$。

定义 1[1] 设 $A=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 的公式,$\overline{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 为 A 所诱导的函数,令

$$\tau_n(A)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}|\overline{A}^{-1}(\frac{i}{n-1})|$$

这里 $|E|$ 表示集合 E 中元素的个数,称 $T_n(A)$ 为公式 A 在 n 值逻辑系统中的真度。

基金项目:博士学科点专项基金(No.20080718000)。
作者简介:韩邦合(1981-),男,在读博士研究生,研究方向:计算智能、软约束、赋值代数、不确定性推理;李永明(1966-),男,教授,博士生导师,主要研究方向:非经典计算理论、计算智能、模糊系统分析、量子逻辑与量子计算、格上拓扑学。
收稿日期:2009-06-22 **修回日期:**2009-08-28

定义 2[1] 设 $A,B\in F(S)$，令

$\xi(A,B)=\tau_n((A\to B)\wedge(B\to A))$

称 $\xi(A,B)$ 为 A 与 B 之间的相似度。

设 $\xi:F(S)\times F(S)\to[0,1]$ 是相似度函数，令

$\rho(A,B)=1-\xi(A,B),A,B\in F(S)$

由文献[1]可知 ρ 是 $F(S)$ 上的伪度量，称 $(F(S),\rho)$ 为逻辑度量空间。

定义 3[1] 设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论，即 $\Gamma\subset F(S)$，令

$div(\Gamma)=\sup\{\rho(A,B)|A,B\in D(\Gamma)\}$

称 $div(\Gamma)$ 为 Γ 的发散度。

定理 1[1] 设 $A,B,C\in F(S)$，若 $A\to B$ 是重言式，则 $\tau(A)\leqslant\tau(B)$。

定义 4[2] 设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论，即 $\Gamma\subset F(S)$，$B\in F(S)$，$\varepsilon>0$，若 $\rho(B,D(\Gamma))<\varepsilon$，则称 B 为 Γ 的Ⅰ-型误差小于 ε 的结论，简记为 $B\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$。

3　近似推理中的收敛理论

基于度量、赋值和网提出三种收敛性，它们分别是度量收敛、赋值收敛与网收敛，并且初步讨论了它们之间的关系，提出了若干需要进一步研究的问题。

定义 5 设 $(F(S),\rho)$ 为一逻辑度量空间，$\{A_n\}$ 是一个公式序列，$A\in F(S)$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(A_n,A)=0$，则称 $\{A_n\}$ 度量收敛于 A，且 A 为 A_n 的度量极限点。

例 1 设 $\perp$ 为一矛盾式，$A_n=p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n$，则可知由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(p_n,\perp)=0$，所以 $\perp$ 是公式序列 $\{A_n\}$ 的度量极限点；同理，设 $B_n=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_n$，$T$ 为一重言式，则 T 是公式序列 $\{B_n\}$ 的度量极限点。

引理 1 设 $(F(S),\rho)$ 为一逻辑度量空间，$\{A_n\}$ 是一个公式序列，$A\in F(S)$ 则 A 为 $\{A_n\}$ 的度量极限点当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ 使得当 $n>N$ 时，$\rho(A_n,A)<\varepsilon$，即 A_n 为 $\{A\}$ 的Ⅰ-型误差小于 ε 的结论，简记为 $A_n\in D_\varepsilon^1(\{A\})$。

定理 2 设 $(F(S),\rho)$ 为一逻辑度量空间，$\{A_n\}$ 是一个公式序列，若 $\{A_n\}$ 的度量极限点存在，则度量极限点在逻辑等价的意义是唯一的。

证明 假设 A,B 是 $\{A_n\}$ 的两个度量极限点且不逻辑等价，则在 n 值逻辑系统中，$\rho(A,B)>0$ 记 $\rho(A,B)=\delta$，则由引理 1 可知 $\exists N$ 使得当 $n>N$ 时，$\rho(A_n,A)<1/3\delta$，$\rho(A_n,B)<1/3\delta$，根据距离空间的性质可知 $\rho(A,B)<2/3\delta$，矛盾。

定义 6 设 $(F(S),\rho)$ 为一逻辑度量空间，$\{A_n\}$ 是一个公式序列，$A\in F(S)$，若 $\forall v>\Omega$，$\lim\limits_{n\to+\infty}v(A_n)=v(A)$，则称 $\{A_n\}$ 赋值收敛于 A，且 A 为 $\{A_n\}$ 的赋值极限点。

定理 3 设 $(F(S),\rho)$ 为一逻辑度量空间，$\{A_n\}$ 是一个公式序列，若 $\{A_n\}$ 的赋值极限点存在，则赋值极限点在逻辑等价的意义是唯一的。

一个自然的问题是度量收敛与赋值收敛之间有什么关系？初步有如下结论：

定理 4 设 $(F(S),\rho)$ 为一逻辑度量空间，$\{A_n\}$ 是一个公式序列，则 $\{A_n\}$ 的度量极限点未必是 $\{A_n\}$ 的赋值极限点。

例 2 设 $A_n=p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n$，由例 1 可知 $\perp$ 是 $\{A_n\}$ 的度量极限点，取 $v\in\Omega$ 使得 $v(p_i)=1$，$\forall i\in N^+$，然而 $v(\perp)=0$，故 $\perp$ 不是 $\{A_n\}$ 的赋值极限点。

关于度量收敛与赋值收敛之间的关系在这里提出两个问题：

问题 1 在 n 值逻辑度量空间中下述命题是否成立。

A 为 $\{A_n\}$ 的赋值极限点当且仅当 $\exists N$ 使得当 $n>N$ 时，A_n 与 A 逻辑等价。

容易得到，如果 S 为有限集，那么问题 1 的回答是肯定的。

问题 2 赋值收敛是否必度量收敛？即 $\{A_n\}$ 的赋值极限点是否是 $\{A_n\}$ 的度量极限点。

关于问题 2 一个自然的结论是：如果问题 1 的结论是肯定的，那么在 n 值逻辑度量空间中 $\{A_n\}$ 的赋值极限点一定是 $\{A_n\}$ 的度量极限点。

定义 7 设 $(F(S),\rho)$ 为一逻辑度量空间，设 $(D,\leqslant)$ 是一定向集，称映射 $S:D\to F(S)$ 为 $F(S)$ 中的网。$\forall n\in D$，令 $S_n=A_n$，则网 S 又可以表示为 $\{A_n:n\in D\}$。

定义 8 设 $(F(S),\rho)$ 为一逻辑度量空间，$A\in F(S)$，对于任意的 $\varepsilon\in(0,1]$，记 $U_A^\varepsilon=\{B|\tau_n(A\to B)>1-\varepsilon,B\in F(S)\}$，$V_A^\varepsilon=\{C|\tau_n(C\to A)>1-\varepsilon,C\in F(S)\}$ 分别称 U_A^ε，V_A^ε 为 A 的一个上 ε 开球域和一个下 ε 开球域。

定义 9 设 $(F(S),\rho)$ 为一逻辑度量空间，设 $(D,\geqslant)$ 是一定向集 S 是 $F(S)$ 中的网，$S=\{A_n:n\in D\}$。

（1）如果对于 A 的任意一个上 ε 开球域 U_A^ε，存在 $n_0\in D$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，$A_n\in U_A^\varepsilon$，则称网 $\{A_n:n\in D\}$ 上收敛于 A。记为 $S\to^U A$。

（2）如果对于 A 的任意一个下 ε 开球域 V_A^ε，存在 $n_0\in D$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，$A_n\in V_A^\varepsilon$，则称网 $\{A_n:n\in D\}$ 下收敛于 A。记为 $S\to^D A$。

（3）如果网 $\{A_n:n\in D\}$ 既上收敛于 A 又下收敛于 A，则称网 $\{A_n:n\in D\}$ 收敛于 A 记为 $S\to A$。

（4）特别地，若 D 为正整数集合，$\geqslant$ 为常规序，则 $\{A_n:n\in D\}$ 为一公式序列。如果网 $\{A_n:n\in D\}$ 收敛于 A，则也称公式序列 $\{A_n:n\in D\}$ 网收敛于 A。

定理 5 设 $(F(S),\rho)$ 为逻辑度量空间，$\{A_n\}$ 是一个公式序列，若 $\{A_n\}$ 度量收敛于 A，则序列 $\{A_n\}$ 网收敛于 A。

证明 根据定理 1，有 $\tau_n((A\to B)\wedge(B\to A))\leqslant\tau_n(A\to B)$，$\tau_n((A\to B)\wedge(B\to A))\leqslant\tau_n(B\to A)$。

所以 $\tau_n((A\to B)\wedge(B\to A))\leqslant\tau_n(A\to B)\wedge\tau_n(B\to A)$。

若 $\rho(A,B)=1-\tau_n((A\to B)\wedge(B\to A))<\varepsilon$，那么 $\tau_n((A\to B)\wedge(B\to A))>1-\varepsilon$。从而 $\tau_n(A\to B)>1-\varepsilon$，$\tau_n(B\to A)>1-\varepsilon$。若 $\{A_n\}$ 度量收敛于 A，则根据引理 1 可知对于任意的 $\varepsilon\in(0,1]$，$\exists N$ 使得当 $n>N$ 时，$\rho(A_n,A)<\varepsilon$，由以上分析可知 $\tau_n(A\to A_n)>1-\varepsilon$，$\tau_n(A_n\to A)>1-\varepsilon$。根据定义 8 可知 $A_n\in U_A^\varepsilon$，$A_n\in V_A^\varepsilon$。从而公式序列 $\{A_n\}$ 网收敛于 A。

最后给出关于收敛性下一步需要研究的问题：设 $(F(S),\rho)$ 为逻辑度量空间，$\{A_n\}$ 是一个公式序列，进一步讨论序列 $\{A_n\}$ 网收敛于其他两种收敛性还有什么关系。

参考文献：

[1] Wang Guo-jun，Zhou Hong-jun.Quantatitive logic[J].Information Sciences，2009（179）：226-247.

（下转 12 页）