第 42 卷　第 8 期
Vol.42　No.8
山　东　大　学　学　报（理　学　版）
JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY
2007 年 8 月
Aug. 2007

文章编号:1671-9352(2007)08-0027-03

相对 Copure 投射模

邢建民[1,2]

(1. 山东大学　数学与系统科学学院，山东　济南　250100；2. 青岛科技大学数理学院，山东　青岛　266061)

摘要：定义了 n-Copure 投射模，给出了一个模作为 n-Copure 投射模的等价条件并证明了一些性质.

关键词：n-Copure 投射模；左（右）$\mathscr{C}$-分解；预包络

中图分类号：O153　　**文献标识码**：A

Relative Copure projective modules

XING Jian-min[1,2]

(1. School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China
2. College of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, Shandong, China)

Abstract: The n-Copure projective module is defined and some equivalent conditions of n-Copure projective modules are found. Finally, some properties of n-Copure projective modules are described.

Key words: n-copure projective modules; left(right)$\mathscr{C}$-resolution; preenvelope

相对模的理论在研究环的性质和覆盖理论中都有重要的意义. 在[1]中，E. E. Enochs 介绍了 Copure 内射模和 Copure 平坦模并讨论了与一些 preenvelope 的关系. Lixin Mao 和 Nanqing Ding 在[2]中推广到了相对 Copure 内射模和相对 Copure 平坦模并讨论了一些等价条件.因此讨论相对 Copure 投射模对于丰富相对模的理论是非常必要的.

1　预备知识

设 R 是一个有单位元的结合环，$\mathscr{C}$ 是左 R-模类，M 是左 R-模.在[3]中，介绍了态射 $\varphi: M\to C$ 是 $\mathscr{C}$-preenvelope 若 $C\in\mathscr{C}$ 且对任意的 $C'\in\mathscr{C}$，同态 $\mathrm{Hom}_R(\varphi, C'):\mathrm{Hom}(C, C')\to\mathrm{Hom}(M, C')$是满射；$\mathscr{C}$-preenvelope $\varphi: M\to C$ 称为 $\mathscr{C}$-envelope 若满射 $g: C\to C$ 满足 $g\varphi$ 是同构. 对偶的定义了 $\mathscr{C}$-precover 和 $\mathscr{C}$-cover. $\mathscr{C}$-envelopes ($\mathscr{C}$-covers)一般可能不存在.但一旦存在就是惟一的.

设 $\mathscr{C}$是左 R-模类，M 是左 R-模. M 的一个左(右)$\mathscr{C}$-分解[4]是一个 $\mathrm{Hom}(C,-)(\mathrm{Hom}(-,C))$正合复形

$$\cdots\to C_1\to C_0\to M\to 0\,(0\to M\to C^0\to C^1\to\cdots)$$

其中 C_i，$C^i\in\mathscr{C}$.

若$\cdots\to C_1\to C_0\to M\to 0$ 是 M 的左 $\mathscr{C}$-分解，令

$$K_0=M,\ K_1=\ker(C_0\to M),\ K_i=\ker(C_{i-1}\to C_{i-2}),\ i\geq 2.$$

第 n 个 kernel $K_n\,(n\geq 0)$称为 M 的 nth $\mathscr{C}$-syzygy.

若 $0\to M\to C^0\to C^1\to\cdots$是 M 的右 $\mathscr{C}$-分解，令

收稿日期:2007-03-20
基金项目:青岛科技大学科研启动基金资助项目
作者简介:邢建民(1978-　),男,博士，研究方向:代数学. E-mail:xingjianmin1978@163.com

$$L^0=M,\ L^1=\mathrm{coker}(M\to C^0),\ L^i=\mathrm{coker}(C^{i-2}\to C^{i-1}),\ i\geq 2.$$

第 n 个 cokernel $L^n(n\geq 0)$称为 M 的 nth $\mathscr{C}$-cosyzygy.

若 $\mathscr{C}$是投射模类(内射模)，则 $K_n(L_n)$简称为 nth syzygy(cosyzygy).

设 M 为左 R-模，定义 pd M 为 M 的投射维数，$E(M)$为 M 的内射包. 设 M,N 为左 R-模，$\mathrm{Hom}(M,N)$ $(\mathrm{Ext}^n(M,N))$意思是 $\mathrm{Hom}_R(M,N)(\mathrm{Ext}_R^n(M,N))$. 本文中所涉及其他定义见文献[1~4].

2 主要定理

定义 1 设 R 为环，n 是固定的正整数，$\mathscr{P}_n$ 是投射维数小于等于 n 的左 R-模类. 左 R-类 M 称为 n-Copure投射模，如果对任意的 $N\in\mathscr{P}_n$ 都满足 $\mathrm{Ext}^1(M,N)=0$.

引理 1 设 R 是左完备环，若对任意的投射左 R-模 N，都满足 $\mathrm{Ext}^i(M,N)=0,1\leq i\leq n+1$，则 M 的每个 rth syzygy 是$(n-r)$-Copure 投射模，其中 $0\leq r\leq n$. 特别的，M 是 n-Copure 投射模.

证明 设 r 是满足 $0\leq r\leq n$ 的正整数，K_r 是 M 的 rth syzygy，N 是左 R-模且 pd$N\leq n-r$. 则 $\mathrm{Ext}^1(K_r,N)\simeq \mathrm{Ext}^{r+1}(M,N)$. 另一方面，存在正合列 $0\to P_{n-r}\to\cdots\to P_1\to P_0\to N\to 0$ 其中 P_i 是投射的(因为 $\mathrm{pd}(N)\leq n-r$)，因此 $\mathrm{Ext}^{r+1}(M,N)\simeq\mathrm{Ext}^{n+1}(M,P_{n-r})=0$. 因此 $\mathrm{Ext}^1(K_r,N)=0$，所以 K_r 是$(n-r)$-Copure 投射模.

注 显然，0-Copure 投射模是 Copure 投射的. 若 $m\geq n$，则 m-Copure 投射模是 n-Copure 投射的.

定理 1 设 R 是环. 则对左 R-模 M 下列等价：

(1) M 是 n-Copure 投射模.

(2) 对任意的正合列 $0\to K\to P\to M\to 0$，其中 $P\in\mathscr{P}_n$，$K\to P$ 是 K 的 $\mathscr{P}_n$-preenvelope.

(3) M 是左 R-模 A 的 $\mathscr{P}_n$-preenvelope $f:A\to B$ 的 cokernel，其中 B 是投射的.

(4) 任意满足 $A\in\mathscr{P}_n$ 的正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 在 $\mathrm{Hom}(M,-)$作用下保持正合.

证明 由定义，(1)⇒(2)和(1)⇒(4)显然.

(2)⇒(3). 由条件存在正合列 $0\to K\to P\to M\to 0$，其中 $P\in\mathscr{P}_n$，则由(2)的条件可得(3).

(3)⇒(1). M 是左 R-模 A 的 $\mathscr{P}_n$-preenvelope $f:A\to B$ 的 cokernel，其中 B 是投射的. 则存在正合列 $0\to \mathrm{Imf}\to B\to M\to 0$. 因此对任意 $N\in\mathscr{P}_n$，有正合列 $\mathrm{Hom}(B,N)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Imf},N)\to\mathrm{Ext}^1(M,N)\to 0$. 由(3)易证 $\mathrm{Hom}(B,N)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Imf},N)\to 0$ 正合. 因此 $\mathrm{Ext}^1(M,N)=0$，则(1)得证.

(4)⇒(1). 对任意 $N\in\mathscr{P}_n$，存在正合列 $0\to N\to E(N)\to E(N)/N\to 0$，诱导出正合列 $\mathrm{Hom}(M,E(N))\to\mathrm{Hom}(M,E(M)/N)\to\mathrm{Ext}^1(M,N)\to 0$. 由(4)注意到 $\mathrm{Hom}(M,E(N))\to\mathrm{Hom}(M,E(M)/N)\to 0$ 正合. 因此 $\mathrm{Ext}^1(M,N)=0$.

命题 1 设 R 是环，则左 R-模 M 是投射的当且仅当 M 是 n-Copure 投射模且 $\mathrm{pd}(M)\leq n+1$.

证明 ⇒显然.

⇐考虑正合列 $0\to K\to P\to M\to 0$. 注意到 pd $K\leq n$(因为 pd $M\leq n+1$). 则 $\mathrm{Ext}^1(M,K)=0$，因此上面的正合列可列. 所以 M 是投射的.

下面定义 $\mathscr{CP}_n$ 为所有的 n-Copure 投射左 R-模类；$\mathscr{I}$ 为所有的内射 R-模类.

定理 2 设 R 是环，n 是固定的正整数. 则下列等价：

(1) $(\mathscr{CP}_n,\mathscr{CP}_n^{\perp})$是遗传的 cotorsion pair.

(2) 对任意的 $M\in\mathscr{CP}_n$，$N\in\mathscr{P}_n$. 满足 $\mathrm{Ext}^2(M,N)=0$.

(3) 对任意的 $M\in\mathscr{CP}_n$，$N\in\mathscr{P}_n$，以及任意的 $i\geq 1$. 满足 $\mathrm{Ext}^2(M,N)=0$.

若 $\sup\{\mathrm{pd}\ E\mid E\in\mathscr{I}\}\leq n+1$，则也与下列等价

(4) 对任意的 $m\geq n$，每个 n-Copure 投射左 R-模是 m-Copure 投射的.

(5) 每个 n-Copure 投射左 R-模是$(n+1)$-Copure 投射的.

证明 (1)⇒(2). 设 $M\in\mathscr{CP}_n$. 则存在正合列 $0\to K\to P\to M\to 0$，其中 P 投射的. 则 $K\in\mathscr{P}_n$. 因为

$(\mathscr{CP}_n, \mathscr{CP}_n^{\perp})$是遗传的. 因此对任意的 $N\in\mathscr{P}_n$, 可得 $\mathrm{Ext}^2(M, N)=0$.

(2)⇒(3).设 $F\in\mathscr{CP}_n$, $N\in\mathscr{P}_n$. 则由定义, $\mathrm{Ext}^1(F, N)=0$. 因此由归纳, 对任意的 $M\in\mathscr{CP}_n$, $N\in\mathscr{P}_n$, 以及任意的 $i\geq 1$.满足 $\mathrm{Ext}^2(M, N)=0$.

(3)⇒(1)显然.

(3)⇒(4). 设 $M\in\mathscr{CP}_n, N\in\mathscr{P}_m$, $m>n$.存在正合列 $0\to K_{m-n}\to P_{m-n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to N\to 0$ 其中 P_i 是投射的. 注意到 $K_{m-n}\in\mathscr{P}_n$,因此由(3), 我们得到

$$\mathrm{Ext}^1(M,N)\simeq\mathrm{Ext}^2(M,K_1)\simeq\cdots\simeq\mathrm{Ext}^{m-n+1}(M,K_{m-n})=0.$$

其中 K_i 是 M 得 ith syzygy, $i=1,2,\cdots m-n$. 因此 $M\in\mathscr{P}_n$.

(4)⇒(5)显然.

(5)⇒(2)设 $M\in\mathscr{CP}_n$, $N\in\mathscr{P}_n$,则存在正合列 $0\to N\to E\to K\to 0$,其中 E 内射的. 由假设 $E\in\mathscr{P}_{n+1}$, 因此 $K\in\mathscr{P}_{n+1}$. 又由(5) $M\in\mathscr{CP}_n$,因此 $\mathrm{Ext}^1(M,K)=0$,因此 $\mathrm{Ext}^2(M,N)=0$.

命题 2　对环 R 及固定的正整数 n,下列等价:

(1) 每个左 R-模是 n-Copure 投射模.

(2) $(\mathscr{CP}_n,\mathscr{P}_n)$是完备的遗传 cotorsion pair,且 $\mathscr{P}_n$ 中的每个左 R-模 M 都是 n-Copure 投射模.

证明　(1)⇒(2)显然.

(2)⇒(1).设 M 是任意的左 R-模. 由(2)和 Wakamatsu's Lemma, 存在正合列 $0\to M\to P\to L\to 0$ 其中 $P\in\mathscr{P}_n$, $L\in\mathscr{CP}_n$. 则由(2)得 $P\in\mathscr{CP}_n$. 又因为$(\mathscr{CP}_n,\mathscr{P}_n)$是遗传的,因此 $M\in\mathscr{CP}_n$.

定理 3　设 R 是环且 $\sup\{\mathrm{pd}\ E \mid E\in\mathscr{I}\}\leq n$, $n\geq 1$. 若 M 是$(n-1)$-Copure 投射左 R-模,则存在正合列 $0\to M\to P\to K\to 0$,其中 P 是投射的, K 是 n-Copure 投射模.

证明　考虑下列的 pullback 图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & L \arrow[d] \arrow[r, phantom, "="] & L \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\pi"'] & P(E) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[u, shift right, "i"'] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

其中 E 是内射模, P 是投射的. 注意到 $\mathrm{pd}L\leq n-1$(因为 $\mathrm{pd}\ E\leq n$). 因此 $\mathrm{Ext}^1(M,K)=0$(由于 M is $(n-1)$-Copure 投射模), 则 $0\to L\to Q\to C\to 0$ 是可列的. 因此 M 是 Q 的直和项. 设相应的投射和嵌入映射分别为 π 和 i. 下证 $fi:M\to P$ 是 M 的投射 preenvelope.

对任意投射模 P' 以及映射 $\varphi:M\to P'$. 因为 E 是 M 的内射包, 因此存在映射 $\psi:E\to P'$ 满足 $\varphi=\psi g$. 又因为 $g\pi=hf$, 我们可得 $\varphi=\psi g=\psi g\pi i=\psi hfi$.因此 φ 可通过 fi 分解. 因此 $fi:M\to P$ 是投射 preenvelope.

设 $K=\mathrm{coker}fi$, 存在正合列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{fi}P\longrightarrow K\longrightarrow 0$ 由定理 1 得 K 是 Copure 投射的.可以断言 K 也是 n-Copure 投射模. 事实上,设 $X\in\mathscr{P}_n$. 考虑正合列 $0\to D\to P(X)\to X\to 0$, 其中 $P(X)$是 X 的投射盖. 则 $D\in\mathscr{P}_{n-1}$. 因此得到正合列 $0=\mathrm{Ext}^1(M,D)\to\mathrm{Ext}^2(K,D)\to\mathrm{Ext}^2(P,D)=0$.因此 $\mathrm{Ext}^2(K,D)=0$.另一方面正合列 $0\to D\to P(X)\to X\to 0$ 诱导了 $0=\mathrm{Ext}^1(K,P(X))\to\mathrm{Ext}^1(K, X)\to\mathrm{Ext}^2(K, D)=0$.因此得到 $\mathrm{Ext}^1(K, X)=0$.

参考文献:

[1] Enochs E E, Jenda O M G. Copure injective resolution, flat resolutions and dimensions[J]. Comment Math, 1993, 34:203-211.

[2] Lixin Mao, Nanqing Ding. Relative copure injective and copure flat modules[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2007, 208:635-646.

[3] Enochs. Injective and flat covers, envelopes and resolvents[J]. Isral J Math, 1981, 39:189-209.

[4] Enochs O M G, Jenda. Relative homologival algebra[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

(编辑:李晓红)