第 42 卷 第 5 期
Vol.42 No.5
山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY
2007 年 5 月
May 2007

文章编号:1671-9352(2007)05-0014-05

点关联较少 3-面的平面图的全染色

孙向勇[1,2]

(1. 山东经济学院 统计与数学学院,山东 济南 250014;
2. 山东大学 系统与科学学院,山东 济南 250100)

摘要:证明了对每点至多关联 2 个 3-面的平面图,全染色猜想成立. 对每点至多关联 2 个 3-面且 $\Delta(G)\geq 8$ 的平面图,有 $\chi_T(G)=\Delta(G)+1$. 对每点至多关联 $\lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$ 个 3-面且 $\Delta(G)\geq 9$ 的平面图,有 $\chi_T(G)=\Delta(G)+1$.

关键词:平面图; 全染色; 全染色数

中图分类号:O157.5 **文献标识码:**A

The total coloring of planar graphs with a few 3-faces incidents with vertex

SUN Xiang-yong[1,2]

(1. School of Statistics and Math., Shandong Economic Univ., Jinan 250014, Shandong, China;
2. School of Mathematics, Shandong Univ., Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: It is proved that for a planar graph G which every vertex is incident with at most two 3-faces, the total coloring conjecture is true. Moreover, the total chromatic number of G is $\Delta(G)+1$ if $\Delta(G)\geq 8$. The total chromatic number of a planar graph G is $\Delta(G)+1$ if $\Delta(G)\geq 9$ and every vertex is incident with at most $\lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$ 3-faces.

Key words: planar graph; total coloring; total chromatic number

0 引言

本文只考虑无向简单平面图. 给定一个平面图 G,分别用 $V(G)$, $E(G)$, $F(G)$表示 G 的点集,边集,面集. G 的一个顶点或一条边,我们称为 G 的一个元素. G 的全 k 染色是指用 k 种颜色对 G 的顶点和边同时进行染色,使得相邻或相关联的元素染不同的颜色. G 的全染色数 $\chi_T(G)$是指 G 的全 k 染色中的最小整数 k. 给定图 G,用 $d(v)$表示点 v 的度数,$\Delta(G)$表示 G 的最大度,也可简写为 Δ, $r(f)$表示面 f 的度数,即面 f 所关联的边的个数. 其余概念可见[1]. 关于图的全染色,behzad[2] 和 Vizing[3] 曾提出猜想:任何一个简单图 G 一定是全 $\Delta+2$ 可染的,这就是著名的全染色猜想.

当 $\Delta(G)\leq 2$ 时,猜想是显然成立的. 当 $\Delta(G)=3$ 时,Rosenfeld[4] 和 Vijayaditya[5] 已证明这个猜想是正确的,$\Delta(G)=4$[6] 和 $\Delta(G)=5$[7] 时也证明了它的正确性.

对于平面图的情形,当 $\Delta(G)\geq 9$ 时,Borodin[8] 首先证明了全染色猜想成立,当 $\Delta(G)=8$ 时,Yap[9] 也证明了其正确性. 此后,Sanders 和 Zhao[10] 证明了 $\Delta(G)\leq 7$ 的平面图一定是全 9 可染的,那么至今只剩下$\Delta(G)=6$ 的平面图是否是全 8 可染的还有待解决.

此外,1989 年,Sanchez-Arroyo[11] 证明了确定图 G 的全染色数是一个 NP 完备问题. 1997 年,Borodin[12] 证明了 $\Delta(G)\geq 11$ 的平面图 G,其全染色数是 $\Delta(G)+1$. 2004 年 Wu 和 Wang[13] 证明了 $\Delta(G)\geq 7$,不含 4 圈平面图的全染色数是 $\Delta(G)+1$. 2006 年 Sun[14] 证明了 $\Delta(G)\geq 8$ 且 3-圈不重点平面图的全染色数是 $\Delta(G)+1$.

收稿日期: 2006-09-29
作者简介:孙向勇(1971-),女,讲师,硕士研究生,主要研究方向:图的染色理论及应用.

本文运用特殊子图,欧拉公式和重新赋值的方法对平面图的全染色问题进行了探讨,得出了每点至多关联2个3-面的平面图,全染色猜想是成立的. 同时对每点至多关联2个3-面且$\Delta(G)\geq 8$的平面图G,有$\chi_T(G)=\Delta(G)+1$. 对每点至多关联$\lfloor\Delta(G)/2\rfloor$个3-面且$\Delta(G)\geq 9$的平面图$G$,有$\chi_T(G)=\Delta(G)+1$.

1 符号和引理

为了描述图的特殊结构,我们引入下面的符号. k-顶点表示度是k的顶点,$(\leq k)$-顶点和$(\geq k)$-顶点分别表示度至多是k和度至少是k的顶点. (j,k)边表示j-顶点与k-顶点相连的边,其中$j\leq k$. $(\leq j,\leq k)$边表示$(\leq j)$-顶点与$(\leq k)$-顶点相连的边,其中$j\leq k$. 一个(i,j,k)-3面表示该3-面关联的3个顶点分别是i-顶点,j-顶点和k-顶点,其中$i\leq j\leq k$. 一个$(\leq i,\leq j,\leq k)$-3面表示该3-面关联的3个顶点分别是$(\leq i)$-顶点,$(\leq j)$-顶点和$(\leq k)$-顶点,且$i\leq j\leq k$,其余类似定义. 例如:一个$(3,\leq 6,\leq 6)$-3面表示一个3-面关联的三个顶点分别是3-顶点,另两个是(≤ 6)-顶点.

以下部分考虑的是连通的嵌入到平面上的平面图,我们用$|V|,|E|,|F|$分别表示G的顶点个数,边的个数和面的个数. 根据Euler公式,我们有$|V|-|E|+|F|=2$.

设$x\in V(G)\cup F(G)$. 如果$x\in V(G)$,$\deg(x)$表示顶点x的度,如果$x\in F(G)$,$\deg(x)$表示面x的度. 如果G中的x被赋值,即$\mathrm{ch}(x)=\deg(x)-4$,那么我们称G已被分配值. 当G被分配值后,我们可以得到如下引理.

引理 1 设G是一个连通的已被分配值的嵌入到平面上的平面图,那么$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)<0$.

证明 因为$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)=\sum_{x\in V(G)}[\deg(x)-4]+\sum_{x\in F(G)}[\deg(x)-4]$,由于点的度之和是2倍的边数,面的度之和也是2倍的边数,从而$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)=4|E|-4|V|-4|F|$,再由Euler公式,嵌入到平面上的连通图一定有$|V|-|E|+|F|=2$,从而上式等于$(-8)<0$.

推论 1 设G是一个连通的已被分配值的嵌入到平面上的图,那么G至少有一个(≤ 3)-顶点或者一个3-面.

证明 假设G既没有(≤ 3)-顶点,也没有3-面,那么G的每一个顶点的度和面的度全都大于或等于4,从而$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)\geq 0$,这与引理1矛盾.

2 每点至多关联2个3-面的平面图的全染色

定理 1 每点至多关联2个3-面的平面图,全染色猜想成立.

证明 当$\Delta(G)\neq 6$时,全染色猜想是成立的,这可见文献[8~10]. 因而只须证明$\Delta(G)=6$时的情况. 假设G是每点至多关联2个3-面,且$\Delta(G)\leq 6$的不能全8可染的极小图,那么有以下两个断言成立.

断言 1 G必包含以下(1),(2),(3)之一特殊子图.

(1) uv边,使得$d(u)+d(v)\leq 8$;且$\min\{d(u),d(v)\}\leq 3$;

(2) $(4,4,\geq 4)$-3面;

(3) $(3,6,6)$-3面.

假设G不包含上述之一特殊子图. 并设G中的$x\in V(G)\cup F(G)$已被赋值为$\mathrm{ch}(x)$,即$\mathrm{ch}(x)=\deg(x)-4$,由引理1知$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)<0$. 接着,对$G$的顶点和面按以下规则被调整赋值为$\mathrm{ch}'(x)$,使得$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}'(x)=\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)$. 以下证明,调整赋值后,对任意$x\in V(G)\cup F(G)$,$\mathrm{ch}'(x)\geq 0$,从而$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}'(x)\geq 0$与引理1矛盾. 规则定义如下:

R1:6-顶点分给它关联的3-面$\frac{1}{2}$;分给它相邻的3-顶点$\frac{1}{3}$;

R2:5-顶点分给它关联的3-面$\frac{1}{2}$.

首先讨论面的情况,设$f\in F(G)$. 当$r(f)=3$时,由假设知f不会关联2-顶点. 否则G就包含$(\leq 2,\leq$

6)边. f 也不会关联 3-顶点,否则 G 就包含$(\le 3,\le 5)$边或$(3,6,6)$-3 面. 又 f 不能是$(4,4,\ge 4)$-3 面,从而 f 是$(\ge 4,\ge 5,\ge 5)$-3 面. 根据 R2,$ch'(f)\ge ch(f)+\frac{1}{2}\times 2=3-4+1=0$. 当 $r(f)\ge 4$ 时,$ch'(f)=ch(f)\ge 0$.

下面讨论点的情况,设 $v\in V(G)$. 首先 $d(v)\ne 2$,否则与假设矛盾. 当 $d(v)=3$ 时,由假设知它的邻点全为 6-顶点. 由 R1,$ch'(v)=ch(v)+\frac{1}{3}\times 3=3-4+1=0$. 当 $d(v)=4$ 时,$ch'(v)=ch(v)=0$. 当 $d(v)=5$ 时,因 v 至多关联 2 个 3-面,且与 v 相邻的顶点的度至少是 4,所以 $ch'(v)\ge ch(v)-\frac{1}{2}\times 2=5-4-1=0$. 当 $d(v)=6$ 时,由于不含$(\le 3,\le 5)$边和$(3,6,6)$-3 面,则 v 关联 2 个 3-面和至多 3 个 3-顶点相邻,或 v 关联 1 个 3-面和至多 4 个 3-顶点相邻, 或 v 至多只与 6 个 3-顶点相邻但不关联任何 3-面. 所以 $ch'(v)\ge ch(v)-\max\{\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 3,\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 4,\frac{1}{3}\times 6\}=0$.

总上,如果 G 不含特殊子图,那么 $\sum_{x\in V(G)\cup F(G)} ch'(x)\ge 0$,这与引理 1 矛盾. 从而 $\Delta(G)\le 6$ 时,极小图 G 必含某个特殊子图.

断言 2　设 G 是一个不能全 8 可染的极小图,则 G 不含以上任一特殊子图.

(1) 假设 G 是一个不能全 8 可染的极小图,且 G 含 uv 边,使得 $d(u)+d(v)\le 8$,且 $\min\{d(u),d(v)\}\le 3$. 则由 G 的极小性,图 $G'=G-uv$ 可全 8 染色. 不妨设 $d(u)\le 3$,先去掉 u 顶点的染色,则至少有一种颜色可染 uv 边,然后再染 u,从而得到图 G 的一个全 8 染色,这与 G 的极小性矛盾.

(2) 设 G 是一个不能全 8 可染的极小图,且 G 含$(4,4,\ge 4)$-3 面,$(4,4)$边记作 uv 边,w-顶点的度 $d(w)\ge 4$. 由 G 的极小性,图 $G'=G-uv$ 有全 8 染色 φ. 假设与 uv 边相邻的边在 G' 中的染色集合是 C,如果 w 顶点的颜色 $\varphi(w)\notin C$,则染 uv 边以颜色 $\varphi(w)$即可使 G 有全 8 染色. 如果 w 顶点的颜色 $\varphi(w)\in C$,不妨设与 u 顶点关联的某边 us 的染色 $\varphi(us)=\varphi(w)$,此时先去掉 u 顶点的染色,则至少有一种颜色可染 uv,而 $d(u)=4$,并且 w 顶点和 us 边染同一颜色,从而至少有一种颜色可染 u 顶点,这样 G 也可全 8 染色,与 G 的极小性矛盾.

(3) 设 G 是一个不能全 8 可染的极小图,且 G 含$(3,6,6)$-3 面,$(6,6)$边记作 uw 边,v 顶点的度是 3. 由 G 的极小性,图 $G'=G-uv$ 有全 8 染色 φ. 先抹去 v 顶点上的染色,设 G 中与 uv 边相邻的 7 条边和 u 顶点构成的集合为 S,S 中每个元素的染色构成的集合为 C.则$|S|=8$,$|C|\le 8$.

如果$|C|\le 7$,则至少有 1 种颜色可染 uv 边. 因而设$|C|=8$,并且设与 v 顶点相邻的第三个邻点是 s,由(2)知 $d(s)=6$. 设 w 顶点上的染色和它邻边上的染色集合为 H,如果 sv 边上的染色 $\varphi(sv)\notin H$,则重染 uw 边以 $\varphi(sv)$,从而至少有一颜色可染 uv 边. 如果 $\varphi(sv)\in H$,则先染 uv 边以 vw 边上的颜色,再重染 vw 边. 因 $\varphi(sv)\in H$,所以至少有一种颜色可染 vw 边. 最后再染 v 顶点,可使 G 也有全 8 染色,与 G 的极小性矛盾.

由以上断言 1、断言 2 可知定理 1 成立.

3　当 $\Delta(G)\ge 8$ 时,每点至多关联 2 个 3-面的平面图的全染色

定理 2　对 $\Delta(G)\ge 8$,且每点至多关联 2 个 3-面的平面图,有 $x_T(G)=\Delta(G)+1$.

证明　假设 G 是满足定理条件的一个极小反例. 则可得到如下(a)、(b)、(c)、(d)、(e)结论.

(a) G 是 2-连通的.

(b) G 不包含偶圈 $v_1v_2\cdots v_{2t}v_1$,使得 $d(v_1)=d(v_3)=\cdots=d(v_{2t-1})=2$.

(c) G 不含边 uv 使得 $\min\{d(u),d(v)\}\le\lfloor\Delta(G)/2\rfloor$且 $d(u)+d(v)\le\Delta(G)+1$.

(d) G_2 是 G 中与 2-度点关联的边生成的子图,则(1) G_2 是一森林. (2) G_2 包含一个匹配 M,使得 M 饱含 G 中所有的 2-顶点.

(e) 设 $X=\{v\mid d_G(v)\le 3\}$,Y 是 X 的邻点集合,即 $Y=\bigcup_{x\in X}N(x)$,K 是由 X,Y 导出的二部子图. 如果 $X\ne\phi$,且 $\Delta\ge 6$,那么 G 包含一个二部子图 $B=(X,Y)$,使得对 $x\in X$,$d_B(x)=1$ 和 $y\in Y$,$d_B(y)\le 2$.

(a)证明可见文献[15].即如果 G 有割边或割点 x,且 $x_T(G-x)=\Delta+1$,容易证明 $x_T(G)=\Delta+1$.(b)证明见[8],(b)说明极小图 G 不会含偶圈,否则,与 G 的极小性矛盾.(c)证明见[16].(c)说明2-顶点只能与最大度点相邻,3-顶点只能与 $\geq(\Delta-1)$-顶点相邻.否则,与 G 的极小性矛盾.(d)和(e)的证明见[13].

由(d)可以得到 $d(v)=2$ 的点与 $d(v)=\Delta$ 的点之间的联系.如果 $uv\in M$,$d(u)=2$ 那么称 v 是 u 的2-主点.由(d),G 中每一个2-顶点都有一个2-主点与之对应,再由(c)知,只有最大度点才能成为2-主点,且最大度点至多只能成为一个2-顶点的2-主点.

由(c)知,$d(v)\leq 3$ 的点与 $d(v)\geq\Delta-1$ 的点才可能相邻.那么 $d(v)\leq 3$ 的点与 $d(v)\geq\Delta-1$ 的点之间的联系可以通过(e)得到.如果 $xy\in B$,称 y 是 x 的3-主点.由(e)知每个 $d(v)\leq 3$ 的点都有一个3-主点与之对应,每个 $d(v)\geq\Delta-1$ 点可以至多成为2个 $d(v)\leq 3$ 的点的3-主点.

设 $x\in V(G)\cup F(G)$.并且 x 已被赋值为 $\mathrm{ch}(x)$,即 $\mathrm{ch}(x)=\deg(x)-4$,由引理1知 $\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)<0$.接着,对 G 的顶点和面按以下规则被调整赋值为 $\mathrm{ch}''(x)$,使得 $\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}''(x)=\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)$.以下证明,调整赋值后,$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}''(x)\geq 0$,从而与引理1矛盾.规则定义如下.

R1:每个2-顶点从它的3-主点得到1;从它的2-主点也得到1;

R2:每个3-顶点从它的3-主点得到1;

R3:每个3-面从 $d(v)\geq 6$ 的点得到 $\frac{1}{2}$,从 $d(v)=5$ 的点得到 $\frac{1}{3}$.

当 $r(f)=3$ 时,由于 $\Delta\geq 8$,由(c)知,G 或者含有 $(\geq\lfloor\Delta(G)/2\rfloor+1,\geq\lfloor\Delta(G)/2\rfloor+1,\lfloor\Delta(G)/2\rfloor+1)$-3面,或含有 $(\geq k,\geq(\Delta+2-k),\geq(\Delta+2-k))$-3面,其中 $2\leq k\leq\lfloor\Delta(G)/2\rfloor$.由R3,$\mathrm{ch}''(f)\geq\mathrm{ch}(f)+\min\{\frac{1}{3}\times 3,\frac{1}{2}\times 2\}=3-4+1=0$.当 $r(f)\geq 4$ 时,$\mathrm{ch}''(f)=\mathrm{ch}(f)=4-4=0$.

当 $d(v)=2$ 时,由R1,$\mathrm{ch}''(v)=\mathrm{ch}(v)+1+1=2-4+2=0$.当 $d(v)=3$ 时,由于每个3-顶点都有一个3-主点与之相邻,由R2,$\mathrm{ch}''(v)=\mathrm{ch}(v)+1=3-4+1=0$.当 $d(v)=4$ 时,$\mathrm{ch}''(v)=\mathrm{ch}(v)=0$.当 $d(v)=5$ 时,由于 v 至多关联2个3-面,由R3,$\mathrm{ch}''(v)\geq\mathrm{ch}(v)-\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{3}>0$.当 $(\Delta-1)>d(v)\geq 6$ 时,由于 v 至多关联2个3-面,由R3,$\mathrm{ch}''(v)\geq\mathrm{ch}(v)-\frac{1}{2}\times 2>0$.当 $d(v)=\Delta-1\geq 7$ 时,由(c)、(e)知,v 至多成为两个3-顶点的3-主点,由R2、R3,$\mathrm{ch}''(v)>\mathrm{ch}(v)-\frac{1}{2}\times 2-1\times 2\geq 0$.当 $d(v)=\Delta\geq 8$,由(d)和(e)知,它至多成为一个2-顶点的2-主点和两个 $d(v)\leq 3$ 的点的3-主点,且 v 还至多关联2个3-面,所以 $\mathrm{ch}''(v)\geq\mathrm{ch}(v)-1\times 3-\frac{1}{2}\times 2=0$.综上讨论,$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}''(x)\geq 0$ 从而与引理1矛盾.

4 当 $\Delta(G)\geq 9$ 时,每点至多关联个 $\lfloor\Delta(G)/2\rfloor$ 个3-面的平面图的全染色

定理3 对 $\Delta(G)\geq 9$,且每点至多关联 $\lfloor\Delta(G)/2\rfloor$ 个3-面的平面图,有 $x_T(G)=\Delta(G)+1$.

证明 假设 G 是满足定理条件的一个极小反例,那么同理可以得到定理2证明中(a)、(b)、(c)、(d)、(e)结论.即极小图 G 中的2-顶点,只能与最大度点相邻,3-顶点只能与 $\geq(\Delta-1)$-顶点相邻.Δ-顶点至多只能成为一个2-顶点的2-主点和2个 (≤ 3)-顶点的3主点,$(\Delta-1)$-顶点至多只能成为2个3-顶点的3-主点.由 G 的极小性,还可得到以下断言.

断言3 G 不含 $(\lceil\Delta(G)/2\rceil,\lceil\Delta(G)/2\rceil,\geq\lceil\Delta(G)/2\rceil)$-3面.

假设极小图 G 含 $(\lceil\Delta(G)/2\rceil,\lceil\Delta(G)/2\rceil,\geq\lceil\Delta(G)/2\rceil)$-3面,并设 u,v,w 分别是该3面关联的3个顶点,w 顶点是 $(\geq\lceil\Delta(G)/2\rceil)$-顶点,由 G 的极小性,平面图 $G'=G-uv$ 有全 $\Delta(G)+1$ 染色 φ.记图 G 中与 uv 边相邻的边上的染色集合为 C,如果 w 顶点的染色 $\varphi(w)\notin C$,则染 uv 边以颜色 $\varphi(w)$,就能使 G 有全 $\Delta(G)+1$ 染色.如果 w 顶点的染色 $\varphi(w)\in C$,不妨设 $\varphi(w)$ 与 u 顶点关联的某边染色相同,则抹去 u 顶点上的染色后,至少有一种颜色可染 uv 边,最后再染 u 顶点.由于 $\varphi(w)$ 与 u 顶点关联的某边染色相同,所以

至少有一种颜色可染 u 顶点. 从而极小图 G 也可全 $\Delta(G)+1$ 染色,与 G 的极小性矛盾.

设 G 中的顶点和面已被赋值为 $\mathrm{ch}(x)$,下面给出规则对 G 的顶点和面调整赋值为 $\mathrm{ch}^*(x)$,使得 $\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}^*(x)=\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)$. 以下证明,调整赋值后,$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}^*(x)\geq 0$ 与引理 1 矛盾,规则定义如下.

R1:每个 3-面从关联的 $\lceil\Delta(G)/2\rceil$-顶点上得到 $\frac{1}{5}$,从 $\lceil\Delta(G)/2\rceil+1$-顶点上得到 $\frac{2}{5}$,从 $(\geq\lceil\Delta(G)/2\rceil+2)$-顶点上得到 $\frac{1}{2}$;

R2:每个 2-顶点从 2-主点得到 1,从 3-主点也得到 1;

R3:每个 3-顶点从 3-主点得到 1.

当 $r(f)=3$ 时,由于 $\Delta\geq 9$,由(c)和断言 3 知,极小图 G 应含有 $(\geq\lceil\Delta(G)/2\rceil,\geq\lceil\Delta(G)/2\rceil+1,\lceil\Delta(G)/2\rceil+1)$-3 面,或 $(\geq k,\geq\Delta+2-k,\geq\Delta+2-k)$-3 面,其中 $2\leq k\leq\lfloor\Delta(G)/2\rfloor$. 由 R1,$\mathrm{ch}^*(f)\geq \mathrm{ch}(f)+\min\{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\times 2,\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\}\geq 0$. 当 $r(f)\geq 4$ 时,$\mathrm{ch}^*(f)=\mathrm{ch}(f)\geq 0$.

当 $d(v)=2$ 时,由 R2,$\mathrm{ch}^*(v)\geq\mathrm{ch}(v)+1+1=2-4+2=0$. 当 $d(v)=3$ 时,由 R3,$\mathrm{ch}^*(v)\geq\mathrm{ch}(v)+1=3-4+1=0$. 当 $4\leq d(v)<\lceil\Delta(G)/2\rceil$时,$\mathrm{ch}^*(v)=\mathrm{ch}(v)=4-4=0$. 当 $d(v)=\lceil\Delta(G)/2\rceil$时,$v$ 至多关联 $\lfloor\Delta(G)/2\rfloor$个 3-面,由 R1,$\mathrm{ch}^*(v)\geq\mathrm{ch}(v)-\frac{1}{5}\times\lfloor\Delta(G)/2\rfloor>0$. 当 $d(v)=\lceil\Delta(G)/2\rceil+1$ 时,由 R1,$\mathrm{ch}^*(v)\geq\mathrm{ch}(v)-\frac{2}{5}\times\lfloor\Delta(G)/2\rfloor>0$. 当 $d(v)=\lceil\Delta(G)/2\rceil+2<\Delta-1$ 时,由 R1,$\mathrm{ch}^*(v)\geq\mathrm{ch}(v)-\frac{1}{2}\times\lfloor\Delta(G)/2\rfloor>0$. 当 $d(v)=\Delta-1$ 时,由于 v 至多成为两个 3-顶点的 3-主点,且 v 还至多关联$\lfloor\Delta(G)/2\rfloor$个 3-面,所以 $\mathrm{ch}^*(v)\geq\mathrm{ch}(v)-1\times 2-\frac{1}{2}\times\lfloor\Delta(G)/2\rfloor=0$. 当 $d(v)=\Delta$ 时,由于它至多可以成为一个 2-顶点的 2-主点和两个 $d(v)\leq 3$ 的点的 3-主点,并且 v 还至多关联$\lfloor\Delta(G)/2\rfloor$个 3-面,所以,$\mathrm{ch}^*(v)\geq\mathrm{ch}(v)-1\times 2-1-\frac{1}{2}\times\lfloor\Delta(G)/2\rfloor=0$.综上讨论,$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}^*(x)\geq 0$ 与引理 1 矛盾.

参考文献:

[1] 邦迪 J A,默蒂 U S R. 图论及其应用[M].吴望名等译. 北京: 科学出版社, 1984.

[2] Behzad M. Graphs and their chromatic numbers[D]. Michigan State University, 1965.

[3] Vizing V G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph (in Russian)[J]. Metody Diskret Analiz, 1964, 3:25 ~ 30.

[4] Rosenfeld M. On the total coloring of certain graphs[J]. Israel Math, 1971, 9:396 ~ 402.

[5] Vijayaditya N. On total chromatic number of a graph[J]. London Math Soc, 1971, 3(2):405 ~ 408.

[6] Kostochka A V. The total coloring of a multigraph with maximal degree 4[J]. Discret Math, 1977, 17:161 ~ 163.

[7] Kostochka A V. The total chromatic number of any multigraph with maximum degree five is at most seven[J]. Discret Math, 1996, 162: 199 ~ 214.

[8] Borodin O V. On the total coloring of planar graphs[J]. Reine Angew Math, 1989, 394:180 ~ 185.

[9] Yap H P. Total colourings of graphs, Lecture notes in mamthematics,1623[M]. Berlin: Springer, 1996.

[10] Sanders D P, Zhao Y. On total 9-coloring planar graphs of maximum degree seven[J]. J Graph Theory, 1999, 31:67 ~ 73.

[11] Sanchez-Arroyo A. Determining the total coloring number is NP-hard[J]. Discrete Math, 1989, 78:315 ~ 319.

[12] Borodin O V, Kostochka A V, Woodall D R. Total colorings of planar graphs with large maximum degree[J]. J Graph Theory, 1997, 26:53 ~ 59.

[13] Wang P, Wu J L. A note on total colorings of planar graph without 4-cycles[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2004, 24: 125 ~ 135.

[14] 孙向勇.关于 3-圈不重点的平面图全染色的一个结论[J].山东建筑大学学报,2006,21(4):374 ~ 376.

[15] Gross J L, Tucker T W. Topological graph theory[M]. New York: John and Wiley & Sons, 1987.

[16] Borodin O V, Kostochka A V, Woodall D R. List edge and list total colorings of multigraphs[J]. J Combin Theory (B), 1997, 71:184 ~ 204.

(编辑:李晓红)