第42卷 第4期 山东大学学报(理学版) 2007年4月
Vol.42 No.4 JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY Apr. 2007

文章编号:1671-9352(2007)04-0039-05

高度平面图的 $L(p,q)$-标号

张苏梅,王纪辉
(济南大学 理学院,山东 济南 250022)

摘要:研究高度平面图 G 的 $L(p,q)$-标号问题,证明了高度平面图 h_1-图的 $L(p,q)$-标号数满足:$\lambda(G;p,q)\leq(2q-1)\Delta+6(p-q)$;$h_2$-图的 $L(p,q)$-标号数满足:$\lambda(G;p,q)\leq(2q-1)\Delta+8p-6q-1$. 对于 $L(2,1)$标号问题 Griggs 和 Yeh 有一著名猜想:对最大度为 Δ 的任意图有 $\lambda(G)\leq\Delta^2$. 此猜想对高度平面图是正确的.

关键词:高度平面图;$L(p,q)$-标号;最大度
中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

$L(p,q)$-labelings of planar graphs with high maximum degree

ZHANG Su-mei and WANG Ji-hui
(School of Science, Jinan Univ., Jinan 250022, Shandong, China)

Abstract: Griggs and Yeh conjectured that $\lambda(G;2,1)\leq\Delta^2$ for any simple graph. The $L(p,q)$-labeling number on planar graphs with high maximum degree is considered. It is proved that $\lambda(G;p,q)\leq(2q-1)\Delta+6(p-q)$ for h_1-graph and $\lambda(G;p,q)\leq(2q-1)\Delta+8p-6q-1$ for h_2-graph.

Key words: planar graph with high maximum degree; $L(p,q)$-labeling; maximum degree

0 引言

所有的图均指有限无向简单连通图.用 $E(G)$,$V(G)$,$F(G)$,$|V(G)|$分别表示图 G 的边集、顶点集、面集和顶点数. 对任意的 $v\in V(G)$,用 $d_G(x)$表示 G 中顶点(或面)x 的度数,一个度为 k 的顶点(或面),称做 k-点(k-面),用 $V_k(G)$表示 G 中 k-点的集合. 用 $N_G(v)$,$N_G^c(v)$,$N_G^2(v)$分别表示 G 中与顶点 v 相邻的顶点集、与顶点 v 不相邻的顶点集和与顶点 v 距离为 2 的顶点集,用 $|N_G(v)|$,$|N_G^c(v)|$,$|N_G^2(v)|$分别表示上述点集中顶点的个数,$\Delta(G)$和 $\delta(G)$分别表示图 G 的最大度和最小度.对任意的 $x,y\in V(G)$,$d_G(x,y)$表示顶点 x,y 之间的距离,其它未定义的符号见[1].

定义 1.1 设 p,q 是满足 $p\geq q$ 的正整数,Z 为非负整数集合,$f:V(G)\rightarrow Z$ 为一个映射,若对任意的 $x,y\in V(G)$,满足当 $d_G(x,y)=1$ 时,有 $|f(x)-f(y)|\geq p$;当 $d_G(x,y)=2$ 时,有 $|f(x)-f(y)|\geq q$,则称 f 为 G 的一个正常的 $L(p,q)$-标号.图的一个 $k-L(p,q)$-标号是指图的一个正常 $L(p,q)$-标号,使得所有标号都不超过 k 并且至少有一个点的标号为 k,即 $Z=\{0,1,\cdots k\}$.称使 G 有一个 $k-L(p,q)$-标号的最小 k 值为图 G 的 $L(p,q)$-标号数,记为 $\lambda(G;p,q)$.

图的标号问题的研究背景是频率分配问题,即在几个不同地点的无线电发射台有效地分配无线电频率,频率用非负整数表示,使得相近的地点分配到不同的频率,相邻的地点分配的频率至少相差2,从而使得

收稿日期:2006-09-03
基金项目:山东省自然科学基金资助项目(Y2003A01)
作者简介:张苏梅(1961-),女,副教授,主要从事图论及其应用方面的研究.

这些频率不会相互干扰.1980年Hale[2]将其归结为T-染色问题;90年代G.J.Chang和David Kuo[3]更精确地将其归为$L(2,1)$标号问题,Griggs和Yeh[4]提出了著名猜想:对任意图G,$L(2,1)$-标号数$\lambda(G)\le\Delta^2$.近几年,人们为提高无线电频率的抗干扰能力,又提出了$L(p,q)$标号问题.J.Georges和D.W.Mauro[5,6]给出了圈和树的$L(p,q)$-标号数和上界,对于某些特殊图的乘积图的$L(p,q)$-标号数,在文献[7,8]中给出一些结论,王维凡[9]给出了围长不小于$k(k=5,6,7)$平面图的$L(p,q)$-标号数的上界.对于一般平面图,J.V.D.Heuvel和S.McGuinness[10]证明了如下结论:

定理 1.1 设G是一个具有最大度$\Delta(G)$的平面图,设p,q是满足$p\ge q$的正整数,那么

$$\lambda(G;p,q)\le(4q-2)\Delta+10p+38q-24.$$

本文主要研究高度平面图的$L(p,q)$-标号问题.

定义 1.2 如果平面图G的最大度$\Delta(G)=|V(G)|-k$,$k=1,2,\cdots$,则称G为一个h_k-图,$k=1,2$的h_k-图称为高度平面图.

1 h_1-图的$L(p,q)$-标号

h_1-图具有如下性质

性质 1.1[11] 设G是一个h_1-图,则$|V_\Delta(G)|\le\delta(G)$.

性质 1.2[11] 设G是一个h_1-图,u是G的最小度点,则$G-u$仍是一个h_1-图.

性质 1.3[12] 设G是一个$|V(G)|\ge2$的h_1-图,w是G的一个Δ-点,则在G中至少有下列情况之一成立:

(1) $\delta(G)=1$;

(2) 存在一个2-点u,在一个3-面$uwv\in F(G)$上;

(3) 存在一个3-点u,使得面3-面$uwv_1,uwv_2\in F(G)$,其中$N_G(u)=\{w,v_1,v_2\}$.

定理 1.1 设G是$|V(G)|\ge2$的h_1-图,则

$$\lambda(G;p,q)\le(2q-1)\Delta(G)+6(p-q).$$

证明 对顶点数$|V(G)|=k$用数学归纳法.为方便起见在下面的叙述中记

$$\lambda_{p,q}=(2q-1)\Delta(G)+6(p-q).$$

当$|V(G)|=2,3,4$时,用穷取法易证明结论成立. 假设$|V(G)|=k-1$时结论成立,现证对$|V(G)|=k$时结论也成立.由性质1.3分以下三种情况讨论.

情况 1 存在一个1-点u相邻于$\Delta(G)$-点w. 令$H=G-u$.

因为$d(u)=\delta(G)$,由性质1.2,图H仍是一个h_1-图,且$|V(G)|=k-1$,由归纳假设,图H有一个$\lambda_{p,q}-L(p,q)$-标号.将这种标号限制到图G上,再对u进行标号.

对已标号的点w,因$N_G(u)=\{w\}$,所以u最多需回避$2p-1$种标号数:

$$f(w)-p+1,\ f(w)-p+2,\ \cdots f(w),\ f(w)+1,\ \cdots f(w)+p-1.$$

对已标号的任一点$v\in N_G^2(u)$,u还需回避最多$2q-1$种标号数:

$$f(v)-q+1,\ f(v)-q+2,\ \cdots f(v),\ f(v)+1,\ \cdots f(v)+q-1.$$

由于$|N_G^2(u)|=|N_G(w)\setminus\{u\}|=\Delta(G)-1$,于是$u$需回避的总的标号数

$$\sigma(u)\le2p-1+(2q-1)(\Delta(G)-2)=(2q-1)\Delta(G)+2(p-q)\le\lambda_{p,q}$$

这样u总可以在$\{0,1,2,\cdots\lambda_{p,q}\}$中找到一个数进行标号,故$\lambda(G;p,q)\le\lambda_{p,q}$.

情况 2 存在一个2-点u,在一个3-面$uwv\in F(G)$上.令$H=G-u$.

由情况1,可假设$\delta(G)=2$. 由性质2.2,图H仍是h_1-图,且$|V(G)|=k-1$,由归纳假设,图H有一个$\lambda_{p,q}-L(p,q)$-标号.在图G中,因$|N_G(u)|=|\{w,v\}|=2$,所以对已标号的点w、v,点u需回避的标号数不大于$2(2p-1)$;又因$|N_G^2(u)|=|N_G(w)\setminus\{u,v\}|=d_G(w)-2=\Delta(G)-2$,所以对已标号的且与点$u$距离为2的点,$u$需回避的标号数不大于$(2q-1)(\Delta(G)-2)$.于是$u$需回避的总的标号数

$$\sigma(u)\le2(2p-1)+(2q-1)(\Delta(G)-2)=(2q-1)\Delta(G)+4(p-q)<\lambda_{p,q}$$

这样 u 总可以在 $\{0,1,2,\cdots\lambda_{p,q}\}$ 中找到一个数进行标号，故 $\lambda(G;p,q)\le\lambda_{p,q}$.

情况 3　存在一个 3-点 u，使得 3-面 $uwv_1, uwv_2\in F(G)$，其中 $N_G(u)=\{w,v_1,v_2\}$. 令 $H=G-u$.

由情况 1 及情况 2，可假设 $\delta(G)=3$. 由性质 1.2，图 H 仍是 h_1-图，且 $|V(G)|=k-1$.

在图 G 中由于 $d(w)=\Delta(G)=|V(G)|-1$，因此在标号过程中，点 u 有 3 个邻点和 $\Delta(G)-3$ 个与其距离为 2 的点已被标号，于是 u 需回避的总的标号数

$$\sigma(u)\le 3(2p-1)+(2q-1)(\Delta(G)-3)=(2q-1)\Delta(G)+6(p-q)=\lambda_{p,q}.$$

这样 u 总可以在 $\{0,1,2,\cdots\lambda_{p,q}\}$ 中找到一个数进行标号，故 $\lambda(G;p,q)\le\lambda_{p,q}$.

综合以上三种情况，当 $|V(G)|=k$ 时，结论成立. 由归纳原理知

$$\lambda(G;p,q)\le(2q-1)\Delta(G)+6(p-q),$$

定理得证.

推论 2.1　设图 G 是 h_1-图，则 $\Delta\ge 3$ 时，$\lambda(G;2,1)\le\Delta+6\le\Delta^2$.

2　h_2-图的 $L(p,q)$-标号

$\Delta(G)=|V(G)|-2$ 的高度平面图称为 h_2-图. h_2-图具有如下性质

性质 2.1[12]　设 G 是一个 h_2-图，则当 $|V(G)|\ge 9$ 时，$|V_\Delta(G)|\le 2$.

性质 2.2[12]　设 G 是一个 $|V(G)|\ge 8$ 的 h_2-图，且 G 仅有一个 $\Delta(G)$-点 w，使得 $N_G^c(w)=\{x\}$，且 $d_G(x)\ge 2$，那么在 G 中至少有下列情况之一成立：

(1) $\delta(G)=1$;

(2) 存在一个 2-点 u，在一个 3-面 $uwv\in F(G)$ 上；

(3) 存在一个 3-点 u，使得 3-面 $uwv_1, uwv_2\in F(G)$，其中 $N_G(u)=\{w,v_1,v_2\}$.

性质 2.3[12]　设 G 是一个 $|V(G)|\ge 9$ 的 h_2-图，且 G 含有两个相邻的最大度点 w_1,w_2，那么在 G 中至少有下列情况之一成立：

(1) 存在一个 2-点 $u\in N_G(w_1)\cap N_G(w_2)$，使 3-面 $uw_1w_2\in F(G)$;

(2) 存在一个 3-圈 vw_1w_2v，使得它的内部仅含有一个 3-点 u 和 3 条边 uv, uw_1, uw_2，其中 $d_G(v)\le 6$;

(3) 存在三个点 $u, v_1, v_2\in N_G(w_1)\cap N_G(w_2)$，使得 $d_G(u)\le 4$, $d_G(v_1)\le 5$, $d_G(v_2)\le 5$，且 4-圈 $v_1w_1v_2w_2v_1$ 的内部仅含有点 u 和它的关联边.

现引入一个特殊的 h_2-图. 设 $(k-2)$-圈 $C=v_1v_2\cdots v_{k-2}v_1$ $(k\ge 7)$，在 C 的内部与外部各加一个点 w_1, w_2，连边 w_1v_i 和 w_2v_i $(i=1,2,\cdots k-2)$，结果图记为 $\widetilde{W}_k$. 显然 $\widetilde{W}_k$ 是一个含有两个不相邻的最大度点 w_1,w_2 的 h_2-图，且 $\Delta(\widetilde{W}_k)=k-2$.

性质 2.4[12]　设 G 是任一个含有两个不相邻的最大度点 w_1,w_2 的 h_2-图，那么 G 是 $\widetilde{W}_k$ 的一个生成子图，其中 $|V(G)|=k$, $E(\widetilde{W}_k)\setminus E(G)\subseteq E(C)$.

在下面的叙述中，记 $\lambda_{p,q}^*=(2q-1)\Delta(G)+8p-6q-1$.

引理 2.1　设 G 是 $|V(G)|\ge 9$ 的 h_2-图，且 G 含有两个相邻的最大度点 w_1,w_2，那么

$$\lambda(G;p,q)\le(2q-1)\Delta(G)+8p-6q-1.$$

证明　对顶点数 $|V(G)|=k$ 用数学归纳法.

当 $|V(G)|=9$ 时，用穷取法可以证明结论成立. 假设 $|V(G)|=k-1$ 时结论成立，现证对 $|V(G)|=k$ 时结论也成立. 由性质 2.3 分以下三种情况讨论.

情况 1　存在一个 2-点 $u\in N_G(w_1)\cap N_G(w_2)$，使 3-面 $uw_1w_2\in F(G)$. 令 $H=G-u$.

因 $\Delta(H)=d_H(w_i)=d_G(w_i)-1=\Delta(G)-1=|V(G)|-2-1=|V(H)|-2$, $(i=1,2)$，且 $|V(H)|=|V(G)|-1\ge 9$，由性质 2.1 知，图 H 仍是含有两个相邻的最大度点 w_1,w_2 的 h_2-图，由归纳假设，图 H 有一个 $\lambda_{p,q}^*-L(p,q)$-标号. 将这种标号限制到图 G 上，再对 u 进行标号.

因 $|N_G(u)|=|\{w_1,w_2\}|=2$，所以对已标号的点 w_1,w_2, u 需回避的标号数不大于 $2(2p-1)$；又因

$|N_G^2(u)| \le |\{x\} \cup N_G(w_1) \setminus \{u, w_2\}| = d_G(w_1) - 1 = \Delta(G) - 1$,其中点集$\{x\} = N_G^c(w_1)$,所以对已标号的且与点 u 距离为 2 的点,点 u 需回避的标号数不大于$(2q-1)(\Delta(G)-1)$.于是 u 需回避的总的标号数

$$\sigma(u) \le 2(2p-1) + (2q-1)(\Delta(G)-1) = (2q-1)\Delta(G) + 4p - 2q - 1 \le \lambda_{p,q}^*.$$

这样 u 总可以在$\{0,1,2,\cdots\lambda_{p,q}^*\}$中找到一个数进行标号,故 $\lambda(G;p,q) \le \lambda_{p,q}^*$.

情况 2 存在一个 3-圈 vw_1w_2v,使得它的内部仅含有一个 3-点 u 和 3 条边 uv, uw_1, uw_2. 令

$$H = G - u.$$

类似情况 1 的讨论,H 仍是含有两个相邻的最大度点 w_1, w_2 的 h_2-图. 由归纳假设,图 H 有一个 $\lambda_{p,q}^* - L(p,q)$-标号.现对 u 进行标号.

因点 u 有 3 个邻点和至多 $\Delta(G)-2$ 个与其距离为 2 的点在图 H 中已被标号,于是 u 需回避的总的标号数

$$\sigma(u) \le 3(2p-1) + (2q-1)(\Delta(G)-2) = (2q-1)\Delta(G) + 6p - 4q - 1 \le \lambda_{p,q}^*.$$

这样 u 总可以在$\{0,1,2,\cdots\lambda_{p,q}^*\}$中找到一个数进行标号,故 $\lambda(G;p,q) \le \lambda_{p,q}^*$.

情况 3 存在三个点 $u, v_1, v_2 \in N_G(w_1) \cap N_G(w_2)$,使得 4-圈 $v_1w_1v_2w_2v_1$ 的内部仅含有点 u 和它的关联边. 令 $H = G - u$.

图 H 仍是含有两个相邻的最大度点 w_1, w_2 的 h_2-图,由归纳假设,图 H 有一个 $\lambda_{p,q}^* - L(p,q)$-标号.将这种标号限制到图 G 上,再对 u 进行标号.

子情况 3.1 若边 $uv_1, uv_2 \notin E(G)$,类似情况 1 的讨论,可得点 u 需回避的总的标号数

$$\sigma(u) \le 2(2p-1) + (2q-1)(\Delta(G)-1) = (2q-1)\Delta(G) + 4p - 2q - 1 < \lambda_{p,q}^*,$$

于是有 $\lambda(G;p,q) \le \lambda_{p,q}^*$.

子情况 3.2 若点 u 仅与点 v_1, v_2 中的一个点相邻接,类似情况 2 的讨论,可得点 u 需回避的总的标号数

$$\sigma(u) \le 3(2p-1) + (2q-1)(\Delta(G)-2) = (2q-1)\Delta(G) + 6p - 4q - 1 \le \lambda_{p,q}^*$$

于是有 $\lambda(G;p,q) \le \lambda_{p,q}^*$.

子情况 3.3 若 $uw_1, uw_2 \in E(G)$. 则点 u 有 4 个邻点和至多 $\Delta(G)-3$ 个与其距离为 2 的点在图 H 中已被标号,于是 u 需回避的总的标号数

$$\sigma(u) \le 4(2p-1) + (2q-1)(\Delta(G)-3) = (2q-1)\Delta(G) + 8p - 6q - 1 = \lambda_{p,q}^*$$

这样 u 总可以在$\{0,1,2,\cdots\lambda_{p,q}^*\}$中找到一个数进行标号,故 $\lambda(G;p,q) \le \lambda_{p,q}^*$.

综合以上三种情况,当$|V(G)| = k$ 时,结论成立.由归纳原理知

$$\lambda(G;p,q) \le (2q-1)\Delta(G) + 8p - 6q - 1$$

定理得证.

引理 2.2 设 G 是$|V(G)| \ge 5$ 的 h_2-图,且 G 含有两个不相邻的最大度点 w_1, w_2,那么

$$\lambda(G;p,q) \le q\Delta(G) + 4p - 3q.$$

证明 由性质 3.4,G 是 $\widetilde{W}_k$ 的一个生成子图,其中$|V(G)| = k$, $E(\widetilde{W}_k) \setminus E(G) \subseteq E(C)$.显然 $\Delta(G) = \Delta(\widetilde{W}_k) = k-2$,$\lambda(G;p,q) \le \lambda(\widetilde{W}_k;p,q)$. 因此只要证明

$$\lambda(\widetilde{W}_k;p,q) \le q\Delta(\widetilde{W}_k) + 4p - 3q$$

即可. 在下面,记 $\Delta = \Delta(\widetilde{W}_k) = k-2$.

情况 1 当 Δ 为偶数时,分以下四步给图 $\widetilde{W}_k$ 的点标号:

(1) 给圈 C 的内部点 w_1 标号 0;

(2) 依次给圈 C 上的点 $v_1, v_3, v_5, \cdots v_{\Delta-1}$标号为 $p, p+q, p+2q, \cdots p + \frac{\Delta-2}{2}q$;

(3) 依次给圈 C 上的点 $v_2, v_4, \cdots v_\Delta$ 标号为

$$2p + \frac{\Delta-2}{2}q,\ 2p + \left(\frac{\Delta-2}{2} + 1\right)q,\ \cdots\ 2p + \left(\frac{\Delta-2}{2} + \frac{\Delta-2}{2}\right)q;$$

(4) 给圈 C 的外部点 w_2 标号 $3p + (\Delta-2)q$.

显然此标号为图 $\widetilde{W}_k$ 的一个$(3p + (\Delta-2)q) - L(p,q)$-标号.

情况 2 当 Δ 为奇数时,分以下四步给图 $\widetilde{W}_k$ 的点标号:

(1) 给圈 C 的内部点 w_1 标号 0;

(2) 依次给圈 C 上的点 $v_1,v_3,v_5,\cdots v_{\Delta-2},v_\Delta$ 标号为

$$p,\ p+q,\ p+2q,\ \cdots\ p+\frac{\Delta-3}{2}q,\ 2p+\frac{\Delta-3}{2}q;$$

(3) 依次给圈 C 上的点 $v_2,v_4,\cdots v_{\Delta-1}$标号为

$$3p+\frac{\Delta-3}{2}q,\ 3p+\left(\frac{\Delta-3}{2}+1\right)q,\ \cdots\ 3p+\left(\frac{\Delta-3}{2}+\frac{\Delta-3}{2}\right)q;$$

(4) 给圈 C 的外部点 w_2 标号 $4p+(\Delta-3)q$.

显然此标号为图 $\widetilde{W}_k$ 的一个$(4p+(\Delta-3)q)-L(p,q)$-标号.

综合以上两种情况，有 $\lambda(\widetilde{W}_k;p,q)\leq q\Delta(\widetilde{W}_k)+4p-3q$，即

$$\lambda(G;p,q)\leq q\Delta(G)+4p-3q.$$

推论 2.1 设 G 是$|V(G)|\geq4$ 的轮图，那么 $\lambda(G;p,q)\leq q\Delta(G)+3(p-q)$.

定理 2.1 设 G 是$|V(G)|\geq9$ 的 h_2-图，那么

$$\lambda(G;p,q)\leq(2q-1)\Delta(G)+8p-6q-1.$$

证明 对顶点数$|V(G)|=k$ 用数学归纳法.

当$|V(G)|=9$ 时，用穷取法可以证明结论成立．假设$|V(G)|=k-1$ 时结论成立，现证对$|V(G)|=k\geq10$ 时结论也成立.

情况 1 如果$|V_\Delta(G)|=2$，由引理 2.1 和引理 2.2 知结论成立.

情况 2 如果$|V_\Delta(G)|=1$，设点 $w\in V(G)$，$d_G(w)=\Delta(G)$，$x\in N_G^c(w)$.

子情况 2.1 若 $d_G(x)\geq2$，对于性质 2.2 中所提及的点 u，令 $H=G-u$，则 H 是一个 h_2 图，且$|V_\Delta(H)|\leq2$，由归纳假设及引理 2.1 和引理 2.2 知，H 有一个 $\lambda^*_{p,q}-L(p,q)$-标号．此时，应用性质 2.2 且重复定理 1.1 的证明，可得

$$\lambda(G;p,q)\leq(2q-1)\Delta(G)+8p-6q-1.$$

子情况 2.2 若 $d_G(x)=1$，显然图 $H=G-x$ 是一个 h_1-图，由定理 1.1

$$\lambda(G;p,q)\leq(2q-1)\Delta(G)+6(p-q)<\lambda^*_{p,q}.$$

设 $N_G(x)=\{v\}$，那么 $d_G(v)\leq\Delta(G)-1$，因此 x 点需回避的标号数

$$\sigma(x)\leq(2p-1)+(2q-1)(\Delta-1)<\lambda^*_{p,q}.$$

综上所述，当$|V(G)|=k$ 时，结论成立．由归纳原理得

$$\lambda(G;p,q)\leq(2q-1)\Delta(G)+8p-6q-1.$$

推论 2.2 设 G 是$|V(G)|\geq9$ 的 h_2-图，那么 $\lambda(G;2,1)\leq\Delta(G)+9<\Delta^2$.

由推论 1.1 和推论 2.2 可得：$L(2,1)$-标号中的著名猜想对于高度平面图是成立的.

参考文献：

[1] J A Bondy, U S R Murty. Graph theory with applications[M]. New York: Macmillan, 1976.

[2] W K Hale. Frequency assignment: Theory and applications[J]. Proc IEEE, 1980, 68:1 497 ~ 1 514.

[3] Gerard J Chang, David Kuo. The $L(2,1)$-labeling problem on graphs[J]. SIAM J Discrete Math, 1996, (2):309 ~ 316.

[4] J R Griggs, R K Yeh. Labeling graphs with a condition at ditance 2[J]. SIAM J Discrete Math, 1992, 5(4):586 ~ 595.

[5] J Georges, D W Mauro. Generalized vertex labelings with a condition at distance two[J]. Congr Numer, 1995, 109:141 ~ 159.

[6] J P Ggeores, D W Mauro. Labeling trees with a condition at distance two[J]. Discrete Math, 2003, 269:127 ~ 148.

[7] J P Ggeores, D W Mauro. Some results on the $\lambda_{j,k}$-numbers of products of complete graphs[J]. Congr Numer, 1999, 140:141 ~ 160.

[8] M Whittlesey, J Georges, D W Mauro. On the λ-number of Qn and related graphs[J]. SIAM J Discrete Math, 1995, 8:499 ~ 506.

[9] W F Wang, K W Lih. Labeling planar graphs with conditions on girth and distance two[J]. SIAM J Discrete Math, 2003, 17:264 ~ 275.

[10] J V D Heuvel, S McGuinness. Coloring the square of a planar graph[J]. J Graph Theory, 2003, (42):110 ~ 124.

[11] 王维凡. 高度平面图完备色数的一个刻划数学物理学报[J]. 2000, 20(增刊):644 ~ 649.

[12] Wang Weifan, Zhang Kemin. Edge-face chromatic number of plane graphs with high maximum degree[J]. Australa J Combin, 1998, 18:235 ~ 244.

（编辑：李晓红）