文章编号:1671-9352(2007)04-0075-04

Post-Gamma 算子关于导数为局部有界函数的点态逼近估计

王 涛
(山东理工大学 数学科学学院, 山东 淄博 255049)

摘要:利用分析技巧得到了 Post-Gamma 算子一阶绝对矩量的渐近估计式,并结合区间分割技术和 Bojanic-Cheng 方法研究了 Post-Gamma 算子关于导函数为局部有界函数的点态逼近估计,同时得到了 Post-Gamma 算子的几何性质.
关键词:Post-Gamma 算子;局部有界函数;一阶绝对矩量
中图分类号:O174.41 **文献标识码**:A

Point-wise approximation of Post-Gamma operators for functions with locally bounded derivatives

WANG Tao
(School of Math., Shangdong University of Technology, Zibo 255049, Shandong, China)

Abstract: An asymptotic approximation of first order absolute moment for Post-Gamma operators is obtained by means of analysis technique. The pointwise approximation of Post-Gamma operators for functions with locally bounded derivatives is studied by the combination of Bojanic-Cheng methods and the division technique of interval. At the same time, the geometry properties of Post-Gamma operators are obtained.
Key words: Post-Gamma operators; locally bounded functions; first order absolute moment

设 $f(t)$ 是定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的可测实函数,则 Post-Gamma 算子定义为:

$$G_n(f(t),x)=\int_0^{+\infty} f(t/n)\mathrm{d}F_{\eta_n}(t)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty} f(t/n)t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/x}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

1989 年 R. Bojanic 和 Cheng[1] 开拓性地研究了 Bernstein 算子列关于导函数为有界函数类的逼近估计,并得到了精确的逼近估计.本文将考虑关于 Post-Gamma 算子对如下的函数类的点态逼近估计:

$f(t)$ 是定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的函数, $\forall x\in(0,+\infty)$, $\varphi(x+)$ 和 $\varphi(x-)$ 存在,

$$I_{\mathrm{DLB}}=\{f(t)\mid f(t)=f(0)+\int_0^t\varphi(u)\mathrm{d}u.$$

其中, $\varphi(u)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的每一个有限子区间上有界,且 $f(t)=O(\mathrm{e}^t),t\to+\infty\}$.

显然上述函数类包含如下的函数类作为特例: $I_{\mathrm{DLBV}}=\{f(t)\mid f(t)=f(0)+\int_0^t\varphi(u)\mathrm{d}u$,其中 $x\in(0,+\infty)$, $\varphi(u)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的每一个有限子区间上为有界变差,且 $f(t)=O(\mathrm{e}^t),t\to+\infty\}$.

为使本文的估计包含有界变差函数类的情形,考虑如下的估计量: $\Omega(x,f,\delta)=\sup\limits_{t\in[x-\delta,x+\delta]}|f(t)-f(x)|$,其中 x 为固定点, $0\le\delta\le x$.其性质有: Ⅰ) $\Omega(x,f,\delta)$ 关于 δ 是单调非减的; Ⅱ) 当 $f(t)$ 在 x 点连续时,成立 $\lim\limits_{\delta\to0+}\Omega(x,f,\delta)=0$; Ⅲ) 如果 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 的有界变差函数, $V_a^b(f)$ 表示 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上的全变

收稿日期:2006-01-06
作者简介:王 涛(1976-),男,硕士,主要从事算子逼近论方面的研究.

差，当满足 $a \le x-\delta \le x+\delta \le b$ 时则有 $\Omega(x,f,\delta) \le V_{x-\delta}^{x+\delta}(f)$.

本文的主要结果及引理如下.

定理 1 设 $f(t)$ 是定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的函数，$\forall f(t) \in I_{\mathrm{DLB}}$，$\forall x \in (0,+\infty)$，当 n 充分大时，关于 Post-Gamma 算子有如下式子成立：

$$\left| G_n(f,x) - f(x) - \frac{\rho x}{\sqrt{2n\pi}} \right| \le \frac{6x}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\Omega(X,\varphi_x,x/k) + \frac{2M_1 \mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n + \frac{|\rho| x}{24n^{3/2}}. \tag{2}$$

其中 $\rho = \varphi(x+) - \varphi(x-)$，$M_1$ 为正常数，$[\sqrt{n}]$ 表示不大于 $\sqrt{n}$ 的正整数，并且辅助函数如下定义：

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} \varphi(t) - \varphi(x-), & t < x, \\ 0, & t = x, \\ \varphi(t) - \varphi(x+), & t > x. \end{cases}$$

注：局部有界变差函数的逼近情况是定理 1 的特例. 实际上，若 $f(t)$ 为局部有界变差函数时，注意到 $\Omega(x,f,\delta) \le V_{x-\delta}^{x+\delta}(f)$，从定理 1 可得到：

推论 对 $\forall f(t) \in I_{\mathrm{DLBV}}$，$\forall x \in (0,+\infty)$，当 n 充分大时，关于 Post-Gamma 算子有如下式子成立：

$$\left| G_n(f,x) - f(x) - \frac{\rho x}{\sqrt{2n\pi}} \right| \le \frac{6x}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \mathop{V}_{x-x/k}^{x+x/k}(\varphi_x) + \frac{2M_1 \mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n + \frac{|\rho| x}{24n^{3/2}}. \tag{3}$$

实际上在定理的条件下，若有 $\Omega(x,\varphi_x,\delta) = o(\delta)$，则有如下的渐近估计式：

$$G_n(f,x) = f(x) + \frac{\rho x}{\sqrt{2n\pi}} + o(n^{-1/2}). \tag{4}$$

为证明定理 1，需要用到下面的引理.

引理 1 对 Post-Gamma 算子，式 $G_n(|t-x|,x) = \dfrac{2x\mathrm{e}^{-n}n^n}{\Gamma(n+1)}$ 成立. (5)

引理 2[4] 当 $z \to +\infty$ 时，有如下的渐近估计式：

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2}\mathrm{e}^{-z}\left(1 + \frac{1}{12z} - \frac{139}{51\,840z^2} + O(z^{-3})\right). \tag{6}$$

引理 3 关于 Post-Gamma 算子的一阶绝对矩量有如下的渐近估计式成立：

$$\left| G_n(|t-x|,x) - \frac{2x}{\sqrt{2n\pi}} \right| \le \frac{x}{5\sqrt{2\pi} n^{3/2}}. \tag{7}$$

证明 由引理 1,2 可直接得到对 Post-Gamma 算子的一阶绝对矩量的渐近估计式.

引理 4[2] 关于 Post-Gamma 算子，对 $\forall x \in (0,+\infty)$，当 n 充分大时，有下式成立：

$$\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{2nx}^{+\infty} \mathrm{e}^{t/n} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/x}\mathrm{d}t \le \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{8}$$

定理 1 的证明 设 $f \in I_{\mathrm{DLB}}$，由于 $f(t) = f(0) + \int_0^t \varphi(u)\mathrm{d}u$，因此有 $f(t/n) - f(x) = \int_x^{t/n}\varphi(u)\mathrm{d}u$. 对 $G_n(f,x) - f(x)$ 有如下分解：

$$G_n(f,x) - f(x) = -\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{nx}\left(\int_{t/n}^{x}\varphi(u)\mathrm{d}u\right)t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/x}\mathrm{d}t + \frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{nx}^{+\infty}\left(\int_x^{t/n}\varphi(u)\mathrm{d}u\right)t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/n}\mathrm{d}t,$$

由辅助函数 $\varphi_x(t)$ 的定义，上式可转化为：

$$\begin{aligned} G_n(f,x) - f(x) = & -\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{nx}\left(\int_{t/n}^{x}\varphi(u)\mathrm{d}u\right)t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/x}\mathrm{d}t + \frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{nx}^{+\infty}\left(\int_x^{t/n}\varphi(u)\mathrm{d}u\right)t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/x}\mathrm{d}t = \\ & -\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{nx}\left(\int_{t/n}^{x}\varphi_x(u)\mathrm{d}u\right)t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/x}\mathrm{d}t + \frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{nx}^{+\infty}\left(\int_x^{t/n}\varphi_x(u)\mathrm{d}u\right)t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/x}\mathrm{d}t - \\ & \varphi(x-)\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{nx}(x - t/n)t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/x}\mathrm{d}t + \varphi(x+)\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{nx}^{+\infty}(t/n - x)t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/x}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

其中

$$\varphi(x+)\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{nx}^{+\infty}\left(\frac{t}{n} - x\right)t^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\mathrm{d}t - \varphi(x-)\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{nx}\left(x - \frac{t}{n}\right)t^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{\varphi(x+)-\varphi(x-)}{2}G_n(|t-x|,x).$$

所以可对 $G_n(f,x)-f(x)$ 作如下分解:

$$G_n(f,x)-f(x)=\frac{\varphi(x+)-\varphi(x-)}{2}G_n(|t-x|,x)-M_n(f,x)+L_n(f,x)+T_n(f,x). \tag{9}$$

其中

$$M_n(f,x)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{nx}\Big(\int_{\frac{t}{n}}^{x}\varphi_x(u)\mathrm{d}u\Big)t^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\mathrm{d}t,$$

$$L_n(f,x)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{nx}^{2nx}\Big(\int_x^{\frac{t}{n}}\varphi_x(u)\mathrm{d}u\Big)t^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\mathrm{d}t,$$

$$T_n(f,x)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{2nx}^{+\infty}\Big(\int_x^{t/n}\varphi_x(u)\mathrm{d}u\Big)t^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\mathrm{d}t.$$

下面分别估计 $|M_n(f,x)|$, $|L_n(f,x)|$ 和 $|T_n(f,x)|$.

首先估计 $|M_n(f,x)|$. 由文[2]的证明可知:

令 $K_n(x,t)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^t s^{n-1}\mathrm{e}^{-s/x}\mathrm{d}s$, 则 $M_n(f,x)$ 可表示为 $M_n(f,x)=\int_0^{nx}\Big(\int_{t/n}^{x}\varphi_x(u)\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}_tK_n(x,t)$,利用分部积分法可得到:

$$\begin{aligned}M_n(f,x)&=\int_0^{nx}\Big(\int_{t/n}^{x}\varphi_x(u)\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}_tK_n(x,t)=\\&\int_{t/n}^{x}\varphi_x(u)\mathrm{d}uK_n(x,t)\Big|_0^{nx}+\int_0^{nx}K_n(x,t)\varphi_x(t/n)\frac{1}{n}\mathrm{d}t=\\&\Big(\int_0^{n(x-x/\sqrt{n})}+\int_{n(x-x/\sqrt{n})}^{nx}\Big)K_n(x,t)\varphi_x(t/n)\frac{1}{n}\mathrm{d}t=I_1(f,x)+I_2(f,x).\end{aligned}$$

再分别估计 $I_1(f,x)$, $I_2(f,x)$.

$$|I_1(f,x)|\le\int_{x-x/\sqrt{n}}^{x}K_n(x,nu)\varphi_x(u)\mathrm{d}u\le\frac{x}{\sqrt{n}}\Omega(x,\varphi_x,x/\sqrt{n})\le\frac{2x}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\Omega(x,\varphi_x,x/k),$$

$$|I_2(f,x)|\le\left|\int_0^{n(x-x/\sqrt{n})}K_n(f,x)\varphi_x(t/n)\frac{1}{n}\mathrm{d}t\right|\le\frac{x^2}{n}\int_0^{x-x/\sqrt{n}}\frac{1}{(x-t)^2}\Omega(x,\varphi_x,x-t)\mathrm{d}t.$$

对上式最后的积分项作变换 $x-t=x/u$,得

$$|I_1(f,x)|\le\frac{x}{n}\int_1^{\sqrt{n}}\Omega(x,\varphi_x,x/u)\mathrm{d}u\le\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\Omega(x,\varphi_x,x/k),$$

因此得到对 $|M_n(f,x)|$ 的估计式

$$|M_n(f,x)|\le\frac{3x}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\Omega(x,\varphi_x,x/k).$$

用同样的方法可得到对 $|L_n(f,x)|$ 的估计.

再令 $\widehat{K_n}(x,t)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_t^{2nx}s^{n-1}\mathrm{e}^{-s/x}\mathrm{d}s$,因此有 $\mathrm{d}_t\widehat{K_n}(x,t)=-\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/x}\mathrm{d}t$,则 $L_n(f,x)$ 可表示为:

$$\begin{aligned}L_n(f,x)&=\int_{nx}^{2nx}\Big(\int_x^{t/n}\varphi_x(u)\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}_t(-\widehat{K_n}(x,t))=\\&\int_x^{t/n}\varphi_x(u)\mathrm{d}u\,\widehat{K_n}(x,t)\Big|_{nx}^{2nx}+\int_{nx}^{2nx}\widehat{K_n}(x,t)\varphi_x(t/n)\frac{1}{n}\mathrm{d}t=\\&\int_{nx}^{2nx}\widehat{K_n}(x,t)\varphi_x(t/n)\frac{1}{n}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对上式最后的积分项作如下分解得到:

$$\begin{aligned}L_n(f,x)&=\int_{nx}^{2nx}\widehat{K_n}(x,t)\varphi_x(t/n)\frac{1}{n}\mathrm{d}t=\\&\Big(\int_{nx}^{n(x+x/\sqrt{n})}+\int_{n(x+x/\sqrt{n})}^{2nx}\Big)\widehat{K_n}(x,t)\varphi_x(t/n)\frac{1}{n}\mathrm{d}t=\\&H_1(f,x)+H_2(f,x).\end{aligned}$$

再估计 $H_1(f,x)$，$H_2(f,x)$，得到估计式

$$|H_1(f,x)| \le \frac{2x}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\Omega(x,\varphi_x,x/k),\quad |H_2(f,x)| \le \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\Omega(x,\varphi_x,x/k),$$

并得到对 $|L_n(f,x)|$ 的估计式

$$|L_n(f,x)| \le \frac{3x}{n}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\Omega(x,\varphi_x,x/k). \tag{10}$$

由引理4得到对 $|T_n(f,x)|$ 的估计，由于 $f(t)=O(e^t)$，$t\to+\infty$，因此存在 $M_1>0$，使得下式成立：

$$|T_n(f,x)| \le M_1\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_{2nx}^{+\infty}e^{t/n}t^{n-1}e^{-t/x}dt \le \frac{2M_1e^{2x}}{\sqrt{2n\pi}}(\frac{2}{e})^n. \tag{11}$$

综合上述证明，可得到定理1及其推论的估计式(2)，(3)．

定理2　Post-Gamma算子具有保单调性，也具有保凸性，即如果函数 $f(t)$ 是(严格)单调递增的，则函数 $G_n(f,x)$ 也是(严格)单调递增的．如果函数 $f(t)$ 是(严格)凸函数，则函数 $G_n(f,x)$ 也是(严格)凸函数．

证明　对Post-Gamma算子作变换 $t/x=u$，得

$$G_n(f,x)=\frac{x^{-n}}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}f(\frac{t}{n})t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}f(\frac{xu}{n})u^{n-1}e^{-u}du.$$

任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\le x_2$，有 $f(\frac{x_2u}{n})-f(\frac{x_1u}{n})\ge 0$，则得到

$$G_n(f,x_2)-G_n(f,x_1)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}(f(\frac{x_2u}{n})-f(\frac{x_1u}{n}))u^{n-1}e^{-u}du\ge 0.$$

因此当函数 $f(t)$(严格)单调递增时，函数 $G_n(f,x)$ 关于变量 x 是(严格)单调递增的，即Post-Gamma算子具有保单调性．同样地，当函数是凸函数时，即当 $\frac{1}{2}(f(\frac{x_1u}{n})+f(\frac{x_2u}{n}))\ge f(\frac{(x_1+x_2)u}{2n})$ 时，有

$$\frac{1}{2}(G_n(f,x_1)+G_n(f,x_2))=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(f(\frac{x_1u}{n})+f(\frac{x_2u}{n}))u^{n-1}e^{-u}du\ge$$
$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}f(\frac{(x_1+x_2)u}{2n})u^{n-1}e^{-u}du,$$

因此有

$$\frac{1}{2}(G_n(f,x_1)+G_n(f,x_2))\ge G_n(f,\frac{x_1+x_2}{2}).$$

即当函数 $f(t)$ 是(严格)凸函数时，函数 $G_n(f,x)$ 关于变量 x 是(严格)凸函数，即Post-Gamma算子具有保凸性．

参考文献：

[1] R Bojanic, Cheng-Fuhua. Rate of convergence of Bernstein polynomials for functions with derivatives of bounded variation[J]. J Math Anal Appli, 1989, 141:136～151.

[2] 王　涛. Post-Gamma算子的点态逼近估计[J]. 烟台师范学院学报(理学版)，2004, 20(2):81～85.

[3] 陈文忠. 算子逼近论[M]. 厦门:厦门大学出版社，1989.170～175.

[4] 王坚勇，陈文忠.关于若干概率型算子的逼近性质[J].厦门大学学报(自然科学版)，1997，36(6):819～824.

[5] R Bojanic, M Vuillemier. On the rate of convergence of Fourier-Legendre series of functions of bounded variation[J]. J Approxi Theory, 1981, 31:67～79.

(编辑：李晓红)