第 42 卷　第 3 期
Vol.42　No.3
山东大学学报(理学版)
JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY
2007 年 3 月
Mar. 2007

文章编号:1671-9352(2007)03-0023-06

带限制条件的最短时间渡江问题

丁　梅[1],冯俊娥[2],王志宏[1]
(1. 山东电力研究院,山东　济南　250002;2. 山东大学　数学与系统科学学院,山东　济南　250100)

摘要:讨论起终点一定的最短时间渡江问题,分析离散和连续情况下速度选择方案,且对连续流速情况得出一个非线性规划模型,推出其最优性条件.

关键词:渡江问题;速度;角度;非线性规划
中图分类号:O224　　**文献标识码:**A

The minimum time problem of crossing river with restricted conditions

DING Mei[1], FENG Jun-e[2] and WANG Zhi-hong[1]
(1. Shandong Electric Power Institute Research, Jinan 250002, Shandong, China;
2. Department of Mathematics and System Science, Shandong Univ., Jinan 250100, Shandong, China)

Abstrct: In order to study the minimum time problem of crossing river with a fixed starting point and terminal point, the difference of the routing and the velocity between dispersed and continuous conditions is analyzed. After obtaining a unlinear programming model for the continuous waters velocity, the best condition and a selection tactics of velocity and algorithm are obtained.

Key words: problem of crossing river; velocity; angle; unlinear programming

0　引言

武汉市举办的 2002 年横渡长江比赛(见图 0.1),有 136 人参赛,34 人到达终点. 我们讨论水流速度、选手速度及选手的路线和成绩的关系,提出一份速度选择方案,最后说明模型的实用价值.

以起点为坐标原点,以垂直于对岸的方向、水流方向分别为 y 轴正向、x 轴正向,建立直角坐标系,并假设到达终点是完成水平位移和垂直位移,水平位移不允许从终点下游再游回始点,泳速方向取与横轴正向的夹角.

图 0.1
Fig.0.1

收稿日期:2006-06-30
作者简介:丁　梅(1970-　),女,教授,博士,主要研究方向:复杂系统的数学规划理论及应用.

1 双定问题

假定泳速不变,水速为 1.89 m/s. 2002 年第一名成绩为 14 min 8 s. 如果速度与 y 轴正向同向且 $v_{人y} = \frac{1\,160}{848} = 1.367\,9$,则水流会使他在水平方向位移 1 602.72,此时已到终点下游 602.72. 需要有一个向 x 轴负向的分速度 $v_{人x} = \frac{602.72}{848} = 0.710\,75$,产生一段抵消位移,因此 $\| v_人 \|$ 为 1.541 53,$\theta_人$ 取 117.456°,按起点到终点直线行进.

在比赛中如何确定方向是关键点,选手速度大小不同,不可能取相同的方向. 取始终和岸边垂直的方向游泳,水平位移依靠水速达到时,到达终点的时间 $t = \frac{1\,000}{1.89} = 529.100\,5$, $v_{人y} = \frac{1\,160}{T} = 2.192\,4$. 当 $v_人 > 2.192\,4$ 时, $\frac{1\,160}{v_人 \sin\theta} = \frac{1\,000}{v_人 \cos\theta + 1.89}$; $v_人 < 2.192\,4$ 时, 为避免在没有到达终点前被冲到下游, 有 $\frac{1\,000}{v_水 - v_人 \sin(\theta - 90°)} = \frac{1\,160}{v_人 \cos(\theta - 90°)}$,即 $v_人 = \frac{2.192\,4}{\sin\theta - 1.16\cos\theta}$. 以泳速 1.5 为例,$1.5 = \frac{2.192\,4}{\sin\theta - 1.16\cos\theta}$,则 $\theta = 156.618°$ 或 $121.855°$,成绩 $t = 1\,948.632\,3$ 或 $910.461\,1$,显然应取方向 $\theta_人 = 121.855°$,此时比赛成绩15 min 10.461 1 s. 根据游泳世界纪录,绝大多数人的游泳速度达不到 2.192 4,第二种情形更有实际意义.

选手到达终点主要使$\frac{\text{江水平均宽度}}{\text{选手速度的垂直分速速度}} = \frac{\text{赛程水平距离}}{\text{选手速度的水平分速度} + \text{水的流速}}$成立. 以 2002 年为例,选手速度分量满足$\frac{1\,160}{v_{人y}} = \frac{1\,000}{1.89 - v_{人x}}$,则 $v_人^2 = 1.16^2(1.89 - v_{人x})^2 + v_{人x}^2$.先令对 $v_{人x}$ 的一阶导数为零,求出 $v_人$ 的最小值,有 $-1.16^2 \times 2 \times (1.89 - v_{人x}) + 2v_{人x} = 0$,得 $v_{人x} = 1.084\,2$, $v_{人y} = 0.934\,7$,于是选手到达终点的最小速度 $v_{人\min} = 1.431\,5$. 当泳速大于 2.192 4 时,$\frac{v_{人y}}{1.89 + v_{人x}} = \frac{1\,160}{1\,000}$,一定有 $\theta > 45°$.

因此,选手能够成功到达终点的角度分为,$\theta = 90°$时,选手始终釉垂直岸边的方向游动且 $v_人 = 2.192\,4$; $45° < \theta < 90°$ 时,泳速必须大于 2.192 4,但对于中长距离游泳来说,平均速度很难达到该值(目前还未有人达到);$90° < \theta < 180°$时,$1.431\,5 < v_人 < 2.192\,4$.

2 离定问题

如果水流流速沿离岸边距离的分布为

$$v(y) = \begin{cases} 1.47, & 0 \le y \le 200, \\ 2.11, & 200 < y < 960, \\ 1.47, & 960 \le y \le 1\,160. \end{cases} \tag{2.1}$$

我们先分析 $v_人 = 1.5$ 时游泳的方向路线和成绩估计.

设选手以最短时间游过中段水平位移为 x,速度方向为 θ_2,在垂直方向所用时间为 t_2,则 $\frac{760}{v_{人y}} = \frac{x}{2.11 - v_{人x}}$,即

$$x = \frac{760 \times (2.11 - v_{人x})}{\sqrt{1.5^2 - v_{人x}^2}}. \tag{2.2}$$

令(2.2)式变量 $v_{人x}$ 导数为零,解得 $v_{人x} = \frac{2.25}{2.11} = 1.066\,4$,从而有 $v_{人y} = 1.054\,9$, $x = 751.866\,7$. 于是选手的方向 $\theta_2 = 180° - \arctan\frac{v_{人y}}{v_{人x}} = 135.310\,6°$,选手在垂直方向上所用的时间 $t_2 = \frac{760}{v_{人y}} = 720.447\,4$.

设选手在第一和第三段水域水平位移相同:$\frac{1\,000 - x}{2} = \frac{1\,000 - 751.866\,7}{2} \approx 125$.同理,可知

$$\begin{cases}\dfrac{200}{v_{人y}}=\dfrac{125}{1.47-v_{人x}}, & (2.3)\\ v_{人y}^2+v_{人x}^2=1.5^2. & (2.4)\end{cases}$$

由(2.3)式得

$$v_{人y}=\frac{8\times(1.47-v_{人x})}{5}. \tag{2.5}$$

因此 $v_{人x}=0.614\,9$ 或 $v_{人x}=1.499\,3$.

当 $v_{人x}=1.499\,3$ 时,由于 $v_{人}=1.5$,此时水平方向分速度接近速度大小,使得选手在第一和第三段水域上在垂直方向的速度过小,导致选手要用足够多的时间才能到达终点,因此舍弃该值. 将 $v_{人x}=0.614\,9$ 代入(2.5)式得 $v_{人y}=1.368\,2$. 因此在第一和第三段水域,选手的速度方向为 $\theta_1=\theta_3=180°-\arctan\dfrac{1.368\,2}{0.614\,9}=114.2°$,所用的时间为 $t_1=t_3=\dfrac{200}{v_{人y}}=\dfrac{200}{1.368\,2}=146.179\,8$. 因此选手的成绩为 $t=2t_1+t_3=1\,012.780\,4$,即 16 min 53 s(见图 2.1 与图 2.2).

如果选手的速度大小不变,流速沿岸边距离的分布与(2.1)式离散情况相同,要估计选手的成绩,仍可用上述方法分水域求出每段的最短时间. 由于流速分布是离散的,因此所求的时间一定是全赛程的最短时间.

当选手的速度为 1.5 时,若全程速度大小和方向始终不变. 在第一和第三段水域上,设时间分别为 g_1 和 t_3,则 $t_1=t_3=\dfrac{200}{v_{人}\cos(\theta-90°)}$,游过第二段水域的时间为 $t_2=\dfrac{760}{v_{人}\cos(\theta-90°)}$,游完全程的时间 $t=t_1+t_2+t_3=\dfrac{1\,160}{1.5\sin\theta}$,选手在水平方向的距离应满足

$$2[v_{水1}-v_{人}\sin(\theta-90°)]t_1+[v_{水2}-v_{人}\sin(\theta-90°)]t_2=1\,000,$$

整理得

$$1.5\sin\theta-1.74\cos\theta=2.191\,6, \tag{2.6}$$

则 $\theta=156.679°$或 $121.789°$. 从时间上看,后者的时间短,因此选手取角度 $121.789°$.

3　连续问题

当流速沿离岸边距离为连续分布时,在假定条件下选手要用尽可能短时间到达终点,这是一个非线性规划. 设流速、选手速度关于时间的函数为 $v_{水}(t)$和 $v_{人}(t)$,模型为

$$\min\ t$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\displaystyle\int_0^t(v_{水}(t)+v_{人x}(t))\mathrm{d}t=1\,000,\\ \displaystyle\int_0^t v_{人y}(t)\mathrm{d}t=1\,160,\\ t>0.\end{cases} \tag{3.1}$$

构造 Lagrangian 函数

$$t-\lambda_1\Big[\int_0^t(v_{水}(t)+v_{人x}(t))\mathrm{d}t-1\,000\Big]-\lambda_2\Big(\int_0^t v_{人y}(t)\mathrm{d}t-1\,160\Big). \tag{3.2}$$

设 $U_{水}(t)$ 表示水的水平位移 - 时间函数,由于 $U_{水}(0)=0$,则

$$\int_0^t v_{水}(t)\mathrm{d}t = U_{水}(t) - U_{(}0) = U_{水}(t). \tag{3.3}$$

同理

$$\int_0^t v_{人x}(t)\mathrm{d}t = U_{人x}(t) - U_{人x}(0) = U_{人x}(t), \tag{3.4}$$

$$\int_0^t v_{人y}(t)\mathrm{d}t = U_{人y}(t) - U_{人y}(0) = U_{人y}(t). \tag{3.5}$$

将(3.2)式对 t 求导,由(3.3) ~ (3.5)式,得到(3.1)式的最优性条件:

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 U'_{水}(t) - \lambda_1 U'_{人x}(t) - \lambda_2 U'_{人y}(t) = 0, \\ U_{水}(t) + U_{人x}(t) = 1\,000, \\ U_{人y}(t) = 1\,160, \\ t > 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

对于一般情况,应用(3.6)式求模型(3.1)的最优解,当最优解无法求出时,可以将模型(3.1)中的第一个约束中的"="放松成"≤",求出最短时间后,若"<"成立,可以在最短时间的基础上再加上一段水平位移的时间,而此时认为选手已经到达对岸,再向前经过一段水平位移可以到达终点.

下面我们讨论几种流速沿岸边距离为已知连续分布时,选手如何确定参赛方案. 设流速沿岸边距离为连续分布:

$$v_{水}(y) = \begin{cases} \dfrac{2.28}{200}y, & 0 \le y \le 200, \\ 2.28, & 200 \le y \le 960, \\ \dfrac{2.28}{200}(1\,160 - y), & 960 \le y \le 1\,160. \end{cases}$$

对于选手而言,一般情况下速度大小变化不大,不妨设为定值 $v_{人}$,只考虑如何调整速度方向 $\theta(t)$. 但是选手不可能随时根据自己的位置变化方向,只能游一段距离改变一下方向,因此我们设在3个水域中游泳者只有3个方向:

$$\theta = \begin{cases} \theta_1, & 0 \le y \le 200, \\ \theta_2, & 200 \le y \le 960, \\ \theta_3, & 960 \le y \le 1\,160. \end{cases}$$

设选手的水平和垂直方向的位移分别为 $x_i, y_i, i = 1,2,3$. 在第一段水域,由位移和速度的关系式知

$$\begin{cases} y'_1(t) = v_{人}\sin\theta_1, & (3.7) \\ x'_1(t) = v_{水} + v_{人}\cos\theta_1, & (3.8) \\ y\,|_{x=0} = 0. & (3.9) \end{cases}$$

由(3.7)和(3.8)式可得

$$(v_{水} + v_{人}\cos\theta_1)\mathrm{d}y_1 = v_{人}\sin\theta_1\mathrm{d}x_1. \tag{3.10}$$

将(3.10)式等式两边同时积分,有

$$\int (v_{水} + v_{人}\cos\theta_1)\mathrm{d}y_1 = \int v_{人}\sin\theta_1\mathrm{d}x_1.$$

将第一段水域上水流的分布函数代入上式,得

$$\int \left(\frac{2.28}{200}y_1 + v_{人}\cos\theta_1\right)\mathrm{d}y_1 = \int v_{人}\sin\theta_1\mathrm{d}x_1,$$

解得

$$\frac{2.28}{100}y_1^2 + v_{人}\cos\theta_1 y_1 = v_{人}\sin\theta_1 x_1 + c.$$

将(3.9)代入上式,得 $c = 0$,因此

$$\frac{2.28}{100}y_1^2 + v_{人}\cos\theta_1 y_1 = v_{人}\sin\theta_1 x_1. \tag{3.11}$$

在第三段水域,有

$$\begin{cases} y'_3(t) = v_{人} \sin\theta_3, & (3.12) \\ x'_3(t) = v_{水} + v_{人} \cos\theta_3, & (3.13) \\ y\mid_{x=1\,000} = 1\,160. & (3.14) \end{cases}$$

解得

$$-\frac{1}{2}y_3^2 \times \frac{2.28}{200} + (\frac{2.28}{200} \times 1\,160 + v_{人} \cos\theta_3)y_3 = v_{人} \sin\theta_3 x_3 + c.$$

将(3.14)式代入上式,得

$$c = 7\,669.92 + 1\,160 v_{人} \cos\theta_3 - 1\,000 v_{人} \sin\theta_3.$$

因此第三段得位移函数关系为

$$-\frac{1}{2}y_3^2 \times \frac{2.28}{200} + (\frac{2.28}{200} \times 1\,160 + v_{人} \cos\theta_3)y_3 = v_{人} \sin\theta_3 x_3 + 7\,669.92 + 1\,160 v_{人} \cos\theta_3 - 1\,000 v_{人} \sin\theta_3. \tag{3.15}$$

在第三段水域中,设选手游完第一段和给定第二段水域时,水平位移为$\overline{x_1}$和$\overline{x_3}$. 由于水流速度是常量,此时选手的位移关系为直线段

$$\frac{y-200}{x-\overline{x_1}} = \frac{760}{\overline{x_3}-\overline{x_1}}. \tag{3.16}$$

根据位移与速度的关系知,$\overline{x_1}$和$\overline{x_3}$满足

$$\frac{760}{v_{人} \sin\theta_2} = \frac{\overline{x_3}-\overline{x_1}}{v_{水} + v_{人} \cos\theta_2}. \tag{3.17}$$

将(3.17)和$v_{水} = 2.28$代入(3.16)式,得

$$\frac{y-200}{x-\overline{x_1}} = \frac{v_{人} \sin\theta_2}{2.28 + v_{人} \cos\theta_2}. \tag{3.18}$$

在流速沿岸边距离为已知连续分布时,假设选手速度大小不变,速度方向在3个流域分别为3个常数时,我们给出了3段水域中选手位移函数关系(见图3.1).

流速沿离岸距离为连续分布,除了举出的情况(图3.2)外,还有两种常见情况(见图3.3,图3.4).

从上面3个图可以看出水域底部的分布情况,图3.2水域整体很宽,靠近岸边底部为较陡的直坡,中间为较宽的平面底部;图3.3描述的水域从两岸经中间为陡坡,中间部分极窄;图3.4中的水域底部较光滑,3条线过渡较平滑.

我们用实际数例说明选手如何分3段选择速度方向. 设选手的速度大小始终为1.5,在第二段水域中,由于流速大小不变,因此选手的速度方向也不变. 现在要求出选手在最短时间内游过这一段时,水平位移的最短距离,由直线公式(3.17)和速度分解公式知

$$\begin{cases} \dfrac{760}{v_{人y}} = \dfrac{x}{2.28 - v_{人x}}, & (3.19) \\ 1.5^2 = v_{人y}^2 + v_{人x}^2, & (3.20) \end{cases}$$

整理得

$$x = \frac{760(2.28 - v_{人x})}{\sqrt{1.5^2 - v_{人x}^2}}. \tag{3.21}$$

令$\frac{dx}{dv_{人x}} = 0$,得 $v_{人x} = \frac{2.25}{2.28} = 0.986\,8$,于是 x 的最小值 870 m.

选手取第一段水域的参照物坐标为(25,50),代入(3.11)得 $\cos\theta_1 = -0.392\,0$,即 $\theta_1 = 113.08°$. 选取第二段水域得参照物坐标为(800,1 100),代入(3.15)得 $\theta_3 = 20.455\,7°$. 取 $x_1 = 20$,$x_3 = 980$,代入(3.17)得 $\theta_2 = 95.854\,8°$.

选手选取参照物可以根据比赛前已知的第一水域随同船的中间位置定第一个坐标,再根据多艘拦截船的中间位置定第二个坐标,这个工作要在赛前勘测到,提前算出 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 以便于比赛中转换方向.

对于参加中长距离竞赛的游泳爱好者来说,赛前的准备和赛中的调整是必需的.

(1) 赛前熟悉环境. 尤其是在室外游泳,像竞渡长江、横渡海峡等活动,要事先了解水流的方向、速度和温度,关注天气状况,提前将竞赛全程看一遍,最好分流域试游一下,了解水的流速对游泳者速度的影响有多大.

(2) 赛前计算速度. 游泳者根据赛前的环境观测,根据自身的特点,制定比赛战术. 若体力良好,可以改变速度来提高成绩. 在水流逐渐加快的过程中,要逐渐减速且速度方向逐渐增大,到水流平缓时,速度不改变,等到水流逐渐减慢时,要逐渐加速且速度角度逐渐变小. 如体力一般,最好维持一个相对平均的速度大小,只调整速度的方向. 在赛前要在第一段和第三段水域各观测一个点,预估其坐标,计算出三个阶段的速度方向角度,并根据第一个角度记住第二个角度的转移角度,再根据第二个角度记住第三个角度的转移角度,记住下水角度.当感到水流变大时,开始转到第二个角度;当感到水流又开始变缓时,再转到第三个角度. 转角度时要以一个显著的标志为依据. 如果赛程较短,角度要少转一点,避免到达终点之前就被冲到下游.如果提前到达对岸,可以通过水平方向游到终点.

总之,对游泳爱好者来言,赛前多观测,找好标志物,做好计算,赛中适时调整速度的大小和方向,就可以顺利完成竞渡,并且可以取得较好的成绩.

4 展望模型应用

本文模型讨论一个固体(或质点)在一个具有流速场的液体中的运动速度及方向控制问题,如何为固体选取适合自己的运动方向,使得固体在流速场的作用下以最短(或较短)时间不偏离目的地是分析的重点.

轮渡是该模型最直接应用的一个例子,在水流对轮船航行影响较大,不可忽略的情形下,如何控制船的速度方向,使船在限定的时间内到达目的地.

另外,还可应用到固液两相流、气固两相流、气液两相流等其它情形,例如控制微型(nm)机器人在液体中的运动方向,控制动力滑翔伞的运动方向,估计积雨层受气流影响下到达某地区的时间.除此以外控制电子在磁场中的运动也属此情形.

参考文献:

[1] M Alonso, E J Finn. 大学物理学基础[M]. 梁宝洪译.北京:高等教育出版社,1984.
[2] 谢云荪,张志让,张光澄,等. 数学试验[M].北京:科学出版社,1999.
[3] 郑汉鼎,刁在筠.数学规划[M].济南:山东教育出版社,1997.
[4] 袁亚湘,孙文瑜.最优化理论与方法[M].北京:科学出版社,1997.
[5] William F Lucas. 微分方程模型[M]. 翟晓燕译.长沙:国防科技大学出版社,1998.

(编辑:冯保初)