第 42 卷　第 8 期
Vol.42　No.8

山东大学学报(理学版)
JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY

2007 年 8 月
Aug. 2007

文章编号:1671-9352(2007)08-0091-04

$\mathfrak{O}(Sp_q(4))$经由 $U_q(sp(4))$的 Jantzen 途径实现

巩本学, 李莎莎
(山东理工大学　数学与信息科学学院, 山东　淄博　255049)

摘要: Jantzen 由 $U_q(sl_2(C))$ 的表示论通过 R-矩阵的方法给出了 $SL_q(2)$ 的定义关系式, 用 Jantzen 的方法通过 $U_q(sp(4))$的表示理论实现了 $\mathfrak{O}(Sp_q(4))$的定义关系式.

关键词: $U_q(sp(4))$; R-矩阵; 自然表示
中图分类号: O152.5　　**文献标识码:** A

Realization of $\mathfrak{O}(Sp_q(4))$ arising from $U_q(sp(4))$ via the Jantzen approach

GONG Ben-xue and LI Sha-sha
(College of Mathematics & Infermation Science, Shandong University of Technology, Zibo 255049, Shandong, China)

Abstract: Jantzen gave the defining relations of $SL_q(2)$ arising from the representations of $U_q(sl_2(C))$ by the R-matrix. This work gives the realization of $\mathfrak{O}(Sp_q(4))$ arising from the representations of $U_q(sp(4))$ via the Jantzen approach.

Key words: $U_q(sp(4))$; R-matrix; natural representation

1　预备知识

记 $C\langle u_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4}$表示由 u_{ij}生成的自由代数, 令 $i'=5-i$, $\rho_i=i-3$($\rho_{i'}=-\rho_i$ 如果 $i<i'$); $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\varepsilon=\varepsilon_3=\varepsilon_4=-1$; 矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})$, $d_{ij}=\varepsilon_i\delta_{ij'}q^{\rho_i}$; $k_{mn}^{ji}=\varepsilon d_{ji}d_{mn}(i,j,m,n=1,2,3,4)$; $\Theta(k)=1$, $k>0$; $\Theta(k)=0$, $k\leq 0$. $I(R)$为 $C\langle u_{ij}\rangle$的理想, 它由以下元素生成

$$I_{mn}^{ij}=:\sum_{k,l}R_{kl}^{ji}u_{km}u_{ln}-R_{mn}^{lk}u_{ik}u_{jl},\ i,j,m,n=1,2,3,4.$$

其中

$$R_{mn}^{ij}=q^{\delta_{ij'}-\delta_{ij}}\delta_{im}\delta_{jn}+(q^{-1}-q)\Theta(m-i)(\delta_{jm}\delta_{in}-k_{mn}^{ji}).$$

记 $A(R)=C\langle u_{ij}\rangle/I(R)$,则在 $A(R)$上存在唯一一个双代数结构, 使得

$$\Delta(u_{ij})=\sum_k u_{ik}\otimes u_{kj},\ \varepsilon(u_{ij})=\delta_{ij},\ i,j=1,2,3,4.$$

令 $U=(u_{ij})$. 则 $\mathfrak{O}(Sp_q(4))$的定义为

$$A(R)/\{UCU^tC^{-1}=CU^tC^{-1}U=I_4\ ^{[2]}.$$

$\mathfrak{g}$ 是一个有限维复半单李代数, Π、Φ 及 Λ 分别是关于 $\mathfrak{g}$ 的某个固定的 Cartan 子代数的素根系、根系和权集, W 为 Φ 的 Weyl 群, $\mathbf{Z}\Phi$ 是 $\mathfrak{g}$ 的根格. 如果 Φ 是 C_n 型的, 对所有短根 α 都有$(\alpha,\alpha)=2$, 对所有长根 α 都有$(\alpha,\alpha)=4$, 对任意 $\alpha\in\Phi$, 定义

收稿日期:2006-10-20
作者简介:巩本学(1980-　),男,硕士,研究方向:李代数与量子群及其表示理论.E-mail:hgbxs@163.com
李莎莎(1980-　),女,硕士,研究方向:模李代数及其表示理论.E-mail:luoye.lisa@163.com

$$d_\alpha = \frac{(\alpha, \alpha)}{2} \in \{1,2\}, \ q_\alpha = q^{d_\alpha} = q^{\frac{(\alpha, \alpha)}{2}}.$$

量子包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$(以下简称为 U)是由 E_α, F_α, K_α, $K_\alpha^{-1}(\alpha \in \Pi)$ 生成的结合(带 1)K-代数,在 U 上存在唯一的一个 Hopf 代数结构(Δ, ε, S)[1,3],记由所有 $E_\alpha(F_\alpha)$ 生成的 U 的子代数为$U^+(U^-)$ 而由 K_α, K_α^- 生成的 U 的子代数记为 U^0. 映射

$$U^- \otimes U^0 \otimes U^+ \to U, \qquad U^+ \otimes U^0 \otimes U^- \to U,$$
$$u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \mapsto u_1 u_2 u_3, \qquad u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \mapsto u_1 u_2 u_3,$$

是线性空间的同构,我们分别将两个映射中$U^- \otimes U^0$和$U^+ \otimes U^0$的像集记为 $U^{\le 0}, U^{\ge 0}$.存在唯一一个双线性配对$(,)$: $U^{\le 0} \times U^{\ge 0} \to K$, 当数域 K 的特征为零,并且 q 为非单位根时, $(,)$限制在 $U_{-\mu}^- \times U_\mu^+ (\mu \in \mathbf{Z}\Phi, \mu \ge 0)$ 是非退化的, 由$(,)$的非退化性, 对每一个 $\mu \in \mathbf{Z}\Phi$, $\mu \ge 0$,选择 U_μ^+ 的一组基u_1^μ, $u_2^\mu, \cdots u_{r(\mu)}^\mu$, 则存在 $U_{-\mu}^-$ 的一组基 v_1^μ, $v_2^\mu, \cdots v_{r(\mu)}^\mu$, 使得对所有的 i, j, 有$(v_i^\mu, u_j^\mu) = \delta_{ij}$.

令

$$\Theta_\mu = \sum_{i=1}^{r(\mu)} v_i^\mu \otimes u_i^\mu \in U \otimes U, \ \Theta = \sum_{\mu \ge 0} \Theta_\mu.$$

若 M, M' 为两个有限维 U-模, 可以得到

$$\Theta_\mu(M_\lambda \otimes M'_{\lambda'}) \subset M_{\lambda-\mu} \otimes M'_{\lambda'+\mu}, \ \lambda, \ \lambda' \in \Lambda, \ \mu \in \mathbf{Z}\Phi.$$

进而我们可以定义

$$\Theta = \Theta_{M, M'}: \ M \otimes M' \to M \otimes M'$$

为一个线性变换, 对 $m \in M_\lambda$, $m' \in M'_\mu$ 定义

$$P: \quad M \otimes M' \to M' \otimes M, \qquad \tilde{f}: \quad M \otimes M' \to M \otimes M',$$
$$m \otimes m' \mapsto m' \otimes m, \qquad m \otimes m' \mapsto f(\lambda, \mu) m \otimes m'.$$

其中 $f: \Lambda \times \Lambda \to K^\times$, 对所有的 λ, $\mu \in \Lambda$, $\nu \in \mathbf{Z}\Phi$,满足

$$f(\lambda + \nu, \ \mu) = q^{-(\nu, \mu)} f(\lambda, \mu), \ f(\lambda, \mu + \nu) = q^{-(\nu, \lambda)} f(\lambda, \ \mu).$$

对所有的有限维 U-模 M, M',映射:

$$R = \Theta \circ \tilde{f} \circ P: \ M' \otimes M \to M \otimes M'$$

是一个 U-模同构[1].

如果 $\phi, \varphi \in U^\circ$(是 U 的对偶空间的一个子空间),$u \in U$, 并且 $\Delta(u) = \sum_i u_i \otimes u'_i$,则可以定义 U° 内元素的乘法为 $\phi\varphi(u) = \sum_i \phi(u_i)\varphi(u_i')$. 令 $\mathfrak{g} = sp(2n)$, $2n$ 维向量空间 M 作为 $U = U_q(\mathfrak{g})$的向量表示的有限维模, 对所有的 $m \in M$, $f \in M^*$,定义矩阵系数 $c_{f,m} \in U^\circ$, 使得

$$c_{f,m}(v) = f(vm), \ v \in U,$$

我们可以证明所有的 $c_{f,m}$(对所有有限维 U-模 M, 取遍所有 $m \in M, f \in M^*$)生成 U° 的一个子代数[1].

令 M 为有限维 U-模, 选择一组基 $e_1, e_2, \cdots e_n$, c_{ij} 满足 $ue_j = \sum_i c_{ij}(u) e_i$, $j = 1, 2, \cdots n$, $u \in U$,容易验证 $c_{ij} = c_{f_i, e_j}$, f_i 为 e_j 的对偶基.令 M' 为另一个有限维 U-模, 选择 M' 的一组基 e'_1, e'_2, $\cdots e'_m$,以及相应的矩阵系数 c'_{ij}, R 为一个 U-模同构: $M' \otimes M \to M \otimes M'$,有

$$R(e'_i \otimes e_j) = \sum_{h, l} R_{ij}^{hl} e_h \otimes e'_l \text{[1]}. \tag{1.1}$$

定理 1.1[1] 对所有的 i, j, r, s 有

$$\sum_{h,l} R_{hl}^{rs} c'_{hi} c_{lj} = \sum_{h,l} R_{ij}^{hl} c_{rh} c'_{sl}. \tag{1.2}$$

2 主要结果

令 $\lambda_1 = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1$ 为 $sp(2n)$的第一个基本权[4], 以 λ_1 为最高权的 $U_q(sp(2n))$的自然

表示 的不可约模记为 $L(\lambda_1)$, 并且

$$W\lambda_1 = \left\{\lambda_1, \lambda_1 - \alpha_n,\ \lambda_1 - \alpha_n - \alpha_{n-1},\ \cdots, \frac{1}{2}\alpha_1,\ -\frac{1}{2}\alpha_1, \cdots - \lambda_1 + \alpha_n,\ -\lambda_1\right\},$$

而其他基本权有 $\lambda_2 = \lambda_1 + (\lambda_1 - \alpha_n), \lambda_3 = \lambda_2 + (\lambda_1 - \alpha_n - \alpha_{n-1}), \cdots \lambda_n = \lambda_{n-1} + \frac{1}{2}\alpha_1$,所以对于所有的有限维不可约 $U_q(sp(2n))$-模 $L(\lambda_i)_{i\geq 2}$均可作为 $L(\lambda_1)$的张量积的直和项[1], 因此我们只要研究 $L(\lambda_1)$的矩阵系数即可(α_1 为长根).

对 $sp(4)$而言,其第一个基本权为 $\lambda_1 = \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1$, 令 $\mu_1 = \lambda_1, \mu_2 = \frac{1}{2}\alpha_1$, $\mu_3 = -\frac{1}{2}\alpha_1, \mu_4 = -\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1$, $M = C^4$ 作为 $U_q(sp(4))$ 的自然表示的模, 有 $M_{\mu_1} = C(1,0,0,0)'$, $M_{\mu_2} = C(0,1,0,0)'$, $M_{\mu_3} = C(0,0,0,1)'$, $M_{\mu_4} = C(0,0,1,0)'$, 令 $e_1 = (1,\ 0,0,0)'$, $e_2 = (0,1,0,0)'$, $e_3 = (0,0,0,1)'$, $e_4 = (0,0,1,0)'$,

$$E_{\alpha_2} = E_{12} - E_{43}, \qquad E_{\alpha_1} = E_{24},$$
$$F_{\alpha_2} = E_{21} - E_{34}, \qquad F_{\alpha_1} = E_{42},$$
$$K_{\alpha_2} = D_1 D_2^{-1} D_3 D_4^{-1}, \qquad K_{\alpha_1} = D_2^2 D_3^{-2}.$$

其中 $D_j = \sum_i q^{\delta_{ij}} E_{ii}(i,j = 1,2,3,4)$, E_{ij}指的是第 i 行, 第 j 列交叉处元素为 1 其他元素为零的矩阵,则

$$\begin{array}{llllll}
E_{\alpha_2} e_1 = 0, & F_{\alpha_2} e_1 = e_2, & E_{\alpha_1} e_1 = 0, & F_{\alpha_1} e_1 = 0, & K_{\alpha_2} e_1 = q e_1, & K_{\alpha_1} e_1 = e_1, \\
E_{\alpha_2} e_2 = e_1, & F_{\alpha_2} e_2 = 0, & E_{\alpha_1} e_2 = 0, & F_{\alpha_1} e_2 = e_3, & K_{\alpha_2} e_2 = q^{-1} e_2, & K_{\alpha_1} e_2 = q^2 e_2, \\
E_{\alpha_2} e_3 = 0, & F_{\alpha_2} e_3 = -e_4, & E_{\alpha_1} e_3 = e_2, & F_{\alpha_1} e_3 = 0, & K_{\alpha_2} e_3 = q^{-1} e_3, & K_{\alpha_1} e_3 = e_3, \\
E_{\alpha_2} e_4 = -e_3, & F_{\alpha_2} e_4 = 0, & E_{\alpha_1} e_4 = 0, & F_{\alpha_1} e_4 = 0, & K_{\alpha_2} e_4 = q e_4, & K_{\alpha_1} e_4 = q^{-2} e_4.
\end{array}$$

令 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$,其中 c_{ij}为 M 的矩阵系数, 满足对任意 $u \in U_q(sp(4))$, 有 $ue_j = \sum_i c_{ij}(u)e_i(i,j = 1,2,3,4)$.

对 $sp(4)$而言,$\omega_0 = s_2 s_1 s_2 s_1$ 为其最长元的一个分解[5], 所以

$$\beta_1 = \alpha_2,\ \beta_2 = 2\alpha_2 + \alpha_1,\ \beta_3 = \alpha_2 + \alpha_1,\ \beta_4 = \alpha_1,$$

为 C_2 的所有正根,从而 $U_q(sp(4))$的所有正根向量和负根向量(我们这里仅保留那些对计算结果有影响的项)为

$$X_1 = E_{\alpha_2}, \quad X_2 = -q^{-1} E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} E_{\alpha_2}, \quad X_3 = E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} - q^{-2} E_{\alpha_1} E_{\alpha_2}, \quad X_4 = E_{\alpha_1},$$
$$Y_1 = F_{\alpha_2}, \quad Y_2 = -q F_{\alpha_2} F_{\alpha_1} F_{\alpha_2}, \quad Y_3 = F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} - q^2 F_{\alpha_2} F_{\alpha_1}, \quad Y_4 = F_{\alpha_1}.$$

令

$$\begin{aligned}\Theta' = {}& 1\otimes 1 + (q^{-1} - q) F_{\alpha_2} \otimes E_{\alpha_2} + (q^{-2} - 1)(1 + q^2) F_{\alpha_1} \otimes E_{\alpha_1} + q_{12}(1 - q^{-2}) F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} \otimes E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} + \\ & (q^{-1} - q) F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} \otimes E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} + (q^{-1} - q) F_{\alpha_2} F_{\alpha_1} \otimes E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} + q_{21}(1 - q^{-2}) F_{\alpha_2} F_{\alpha_1} \otimes E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} + \\ & (q^{-2} - 1)(1 + q_{212}) F_{\alpha_2} F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} \otimes E_{\alpha_2} E_{\alpha_1} E_{\alpha_2}.\end{aligned}$$

可以验证

$$R = \Theta \circ \tilde{f} \circ P = \Theta' \circ \tilde{f} \circ P.$$

R 作为 $M\otimes M \to M\otimes M(M = C^4)$的 U-模同构,由(0.1)我们可以得到

$R_{11}^{11} = R_{22}^{22} = R_{33}^{33} = R_{44}^{44} = q^{-1}, R_{12}^{21} = R_{21}^{12} = R_{13}^{31} = R_{31}^{13} = R_{24}^{42} = R_{42}^{24} = R_{34}^{43} = R_{43}^{34} = 1$,

$R_{14}^{41} = R_{23}^{32} = R_{32}^{23} = R_{41}^{14} = q, R_{21}^{21} = R_{31}^{31} = R_{42}^{42} = R_{43}^{43} = q - q^{-1}, R_{23}^{41} = R_{41}^{23} = q^2 - 1$,

$R_{32}^{32} = q^3 - q^{-1}, R_{32}^{41} = R_{41}^{32} = q^2 - q^4, R_{41}^{41} = q^3(1 - q^2)(1 + q^{-4})$.

令矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), a_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij'} q^{\rho_i}$,其中 $i' = 5 - i, \rho_i = i - 3, (\rho_{i'} = -\rho_i$ 如果 $i < i')\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$.
可以验证恒等式

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_4.$$

成立, $\boldsymbol{I}_4$为 4 阶的单位矩阵,再由定理 0.1 我们可以实现 $\mathfrak{O}(Sp_q(4))$中所有的定义关系式[5].

参考文献:

[1] Jantzen C. Lectures on quantum groups[M]. New York: AMS, 1991.

[2] Klimyk A, Schmudgen K. Quantum group and their representation[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[3] Kassel. Quantum Groups[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[4] Humphreys J E. Introduction to Lie algebras and representation theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

[5] Chari V, Xi N H. Monomial bases of quantized enveloping algebras[C]. Recent Development in Quantum Affine Algebras and Related Topics(Raleugh, Nc, 1998): 69 ~ 81.

(编辑:李晓红)