第 42 卷 第 10 期 Vol.42 No.10
山 东 大 学 学 报 (理 学 版) Journal of Shandong University(Natural Science)
2007 年 10 月 Oct. 2007

文章编号:1671-9352(2007)10-0069-07

超有限因子中套子代数的 Lie 理想

卜美华,纪培胜,綦伟青
(青岛大学 数学科学学院, 山东 青岛 266071)

摘要:设 B 是一个超有限因子,$T(N)$是 B 中的正则套代数.给出了 $T(N)$中的 Lie 理想的结构.证明了 $T(N)$的一个 σ-弱闭子空间 L 是 $T(N)$的 Lie 理想当且仅当存在 $T(N)$的一个 σ-弱闭的结合理想 J 和 $T(N)$的对角部分的中心的子空间 E,使得 $J^0\subseteq L\subseteq J+E$,其中 J^0 为 J 中的迹为零的元的集合.

关键词:Lie 理想;套子代数;超有限因子
中图分类号:O177.1 **文献标志码**:A

Lie ideals of the nest subalgebras in hyperfinite factors

BU Mei-hua, JI Pei-sheng, QI Wei-qing
(Department of Mathematics, Qingdao University, Qingdao 266071, Shandong, China)

Abstract: Let B be a hyperfinite factor and let $T(N)$ be a regular nest subalgebra of B. It is proved that a σ-weakly closed subspace L of $T(N)$ is a Lie ideal in $T(N)$ if there exist a σ- weakly closed associative ideal J of $T(N)$ and a subspace E of the center of the diagonal part of $T(N)$, such that $J^0\subseteq L\subseteq J+E$, where J^0 is the set of trace-zero elements in J.

Key words: Lie ideal; nest subalgerba; hyperfinite factor

设 A 为复数域 $\mathbf{C}$ 上的一个结合代数,在括积运算$[x,y]=xy-yx$下,A 成为一个 Lie 代数.设 L 是 A 的一个线性子空间,若满足对$\forall a\in A,k\in L$都有$[a,k]\in L$,则称 L 为 A 的一个 Lie 理想.在许多例子中,A 的 Lie 理想和 A 的结合理想间存在密切联系.Herstein 首次描述了素环的 Lie 理想和结合理想之间的关系[1].近年来许多数学家在各种算子代数中讨论了这种关系,参见[2-10].特别的, Hudson, Marcoux 和 Sourour 描述了套代数和 TUHF 代数中的 Lie 理想[2].Marcoux 和 Sourour 详细的描述了套代数中的所有 Lie 理想[3].本文描述了超有限因子中的正则套代数的 σ-弱闭 Lie 理想的结构,揭示了其中的 Lie 理想和结合理想之间的关系. 由于一般因子中套代数和 Hilbert 空间上的套代数有许多本质的区别(参见[11]),本文的结果不能用[3]中的方法推得.

1 准备

因子 B 称为超有限因子,指 B 中存在一个单的有限维 C^*-子代数升链$\{B_n\}$,使得$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ 按σ-弱拓扑稠于B.给定 B 中这样一个单的有限维 C^* 子代数链$\{B_n\}$,存在 B 的一个子集$\{e_{ij}^n:i,j,n\}$,满足任给 n,$\{e_{ij}^n:i,j\}$为 B_n 的一个矩阵单位系,并且每个 e_{ij}^n是$\{e_{ij}^{n+1}:i,j\}$中某些元素的和.令 D_0 为集合$\{e_{ii}^n:i,n\}$的闭线性扩张,D 为D_0 的 σ-弱闭包,则 D 为B 的 Cartan 子代数(B 的 Cartan 子代数 D 是B 的一个正则的极大交换的子代数,且存在从B到D的正常的忠实的条件期望$P:B\to D$,其中子代数D称为正则的指D的正规化子集

收稿日期:2007-04-18
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10675086);数学天元基金资助项目(10626031);山东省自然科学基金资助项目(Y2006A03)
作者简介:卜美华(1977-),女,硕士,主要从事泛函分析和算子代数方面的研究. Email: wenwenkunlun@sohu.com
通讯作者:纪培胜(1967-),男,教授,博士,研究方向:泛函分析和算子代数. Email: jipeish@yahoo.com.cn

$N_B(D)=\{u:u$ 是 B 中的酉元且满足 $uDu^*=D\}$ 生成 B,其中的酉元称为 D 的正规化子.).称 $\{e_{ij}^n:i,j,n\}$ 为 B 关于 D 的一个矩阵单位系,并且每个 e_{ij}^n 满足 $e_{ij}^n D e_{ji}^n=D e_{ii}^n$.对于一般的带有 Cartan 子代数 D 的 vN 代数 B. Feldmann 和 Moore 用可测等价关系给出了 (B,D) 的坐标表示[12]:存在一个标准的 Borel 测度空间 (X,Ω,μ),且 μ 有限,X 上的一个可数标准关系 R(即 R 是 X 上的一个等价关系,R 是 $X\times X$ 的 Borel 子集,且每一个等价类是可数的.)使得 B 中的算子可表示为 R 上的函数 $f(x,y)$,D 中的算子可看成支撑在 X 上的函数,每个 e_{ij}^n 可看成 X 上部分 R-同胚的图像上的特征函数.

设 B 为超有限因子,D 为 B 的 Cartan 子代数.B 中的套 N 指由 D 中的投影组成的一个链,包含 0 和单位元 1,并且在强算子拓扑下是封闭.相应的套代数 $T(N)$ 指集合 $\{a\in B:pap=ap,\forall p\in N\}$,显然 $T(N)$ 是包含 D 的 σ-弱闭子代数.称 vN 代数 $T(N)\cap T(N)^*$ 为套代数 $T(N)$ 的对角,记为 $D(N)$,其中 $T(N)=\{a^*:a\in T(N)\}$.显然 $D(N)=N'$,其中 N' 是 N 的换位子.由 N 生成的 vN 代数 $C(N)$ 称为 $T(N)$ 的核,显然 $C(N)$ 是 $D(N)$ 的换位子,且为 D 的子代数.称 $C(N)$ 的极小投影为 N 的原子,N 的原子的全体记为 Λ.任给 $p\in N$,如果 $p\neq 0$,定义 $p_-=\vee\{p'\in N:p'<p\}$,定义 $0_-=0$,任给 N 的原子 q,显然存在 $p\in N$ 使得

$$q=p-p_-.$$

记 $q_a=\sum_{q\in\Lambda}q$,如果 q_aN 按范数稠于 q_aD_0,则称 N 是正则套,$T(N)$ 称为正则套代数.

$T(N)$ 的原子对角 $D_a(N)$ 指由 $\{qBq:q\in\Lambda\}$ 生成的 σ-弱闭子代数,显然 $D_a(N)=\sum\{qBq:q\in\Lambda\}$.存在惟一的从 B 到 $D_a(N)$ 上的按 σ-弱算子拓扑连续的条件期望 Δ,其定义为:$\Delta(a)=\sum_{q\in\Lambda}qaq$,$a\in B$.显然 Δ 在 $T(N)$ 上是可乘的.令 Ω 为 N 的有限子套类.任给 $F\in\Omega$,设 $F=\{0=p_0^F<p_1^F<\cdots<p_n^F=1\}$,定义 B 到 B 的收缩投影 $P_F:B\rightarrow B$ 为:$P_F(b)=\sum_i(p_i^F-p_{i-1}^F)b(p_i^F-p_{i-1}^F)$,则 $\{P_F:F\in\Omega\}$ 按点点 σ-弱算子拓扑有聚点 P.事实上,P 是从 B 到 $D(N)$ 上正规的忠实的条件期望.$T(N)$ 的中心为纯量(参见[11]).

本文用 span$M$ 表示集合 M 的线性扩张,$\sigma-wk-\mathrm{c1}(M)$ 表示 M 按 σ-弱算子拓扑的闭包.

后面用到下面结果.

命题 1.1 设为带有惟一的正常的忠实的迹 tr 的有限的超有限因子.则集合 $\{ab:a\in sl_B,b\in B\}$ 的 σ-弱闭线性扩张为 B.

证明 对任意的矩阵单位 e_{ij}^n,$i\neq j$,因为 $\mathrm{tr}(e_{ij}^n)=0$,所以 $e_{ij}^n\in sl_B$,又 $e_{ji}^n\in B$,$1\in B$,所以 $e_{ij}^n,e_{ii}^n\in\{ab:a\in sl_B,b\in B\}$.又 $\sigma-wk-\mathrm{c1}-\mathrm{span}\{e_{ij}^n:i,j,n\}=B$.所以 $\sigma-wk-\mathrm{c1}-\mathrm{span}\{ab:a\in sl_B,b\in B\}=B$.

2 Nest 代数中的 σ-弱闭 Lie 理想

在本部分中,B 为含有 Cartan 子代数 D 的超有限因子.$M(R)$ 是 (B,D) 的 Feldmann 和 Moore 坐标表示.N 为 B 中的投影套.令 $S=\{f\in T(N):P(f)=0\}$.因为 P 为从 B 到 $D(N)$ 的正规期望,所以 S 为 $T(N)$ 的 σ-弱闭结合理想,S 的谱 $\hat{S}=T(\hat{N})\setminus D(\hat{N})$,称 S 为 $T(N)$ 的对角不交部分.$T(N)$ 的 σ-弱闭结合理想 K 称为对角不交的,如果 K 满足 $K\cap D(N)=\{0\}$,或等价地,$\hat{K}\cap D(\hat{N})=0$ 或 $\hat{K}\subseteq\hat{S}$ 时.显然,对 $\forall f\in K$ 有 $P(f)=0$.

显然,$T(N)$ 中的任何结合理想为 Lie 理想.在下面的命题中,我们将证明 $T(N)$ 中任意的 σ-弱闭 Lie 理想 L 具有 $L=K+F$ 的形式,其中 K 为对角不交的 σ-弱闭结合理想,F 为 $D(N)$ 中的 σ-弱闭 Lie 理想.

命题 2.1 设 L 为 $T(N)$ 中的 σ-弱闭 Lie 理想,令

$$K=\{a\in L:P(a)=0\}=\{a-p(a):a\in L\},F=L\cap D(M).$$

则 $L=K+F$,且 K 为 $T(N)$ 的 σ-弱闭对角不交的结合理想,F 为 $D(N)$ 的 σ-弱闭 Lie 理想,显然 $K=L\cap S$.

证明 因为 P 为从 B 到 $D(N)$ 的正规期望,并且 L 为 σ-弱闭的,所以 K 为 σ-弱闭的.显然,K 为对角不交的.

为了证明 K 是 $T(N)$ 的结合理想,先证明 K 为的 $D(N)$-双模.(因此 K 为 σ-弱闭 D-双模,这对证明 K 为结合理想是有帮助的).下面的引理在证明 K 为 $D(N)$-双模时是有用的.

引理 2.1 设 L 为 $T(N)$ 的 Lie 理想,$f\in L$,设 $\{q_1,q_2,\cdots q_n\}$ 为 $D(N)$ 的两两正交的投影族,并且 $\sum_i q_i=1$.则对 $\forall i$,$q_if-q_ifq_i\in L$,从而,任给 $D(N)$ 中的投影 p,$pf-pfp\in L$.

证明　给定 i,如果 $j\neq i$,则 $[[q_i,f],q_j]=q_ifq_j+q_jfq_i\in L$.从而有

$$\sum_{j\neq i}q_ifq_j+\sum_{j\neq i}q_jfq_i\in L,$$

并且有

$$[q_i,f]=q_if-fq_i=\sum_{j=1}^{n}q_ifq_j-\sum_{j=1}^{n}q_jfq_i=\sum_{j\neq i}q_ifq_j-\sum_{j\neq i}q_jfq_i\in L.$$

取平均得 $\sum_{j\neq i}q_ifq_j=q_if-q_ifq_i\in L$.

设 $f\in K$.给定 N 的一个有限子套 $F=\{0=p_0^F<p_1^F<\cdots p_n^F=1\}$,由上面的讨论得

$$f-P_F(f)=\sum_{i\neq j}(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)$$

和

$$(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)+(p_j^F-p_{j-1}^F)f(p_i^F-p_{i-1}^F)$$

属于 L.为了证明 K 为左 $D(N)$模,只须证明 $\forall\ d\in D(N)$,$\forall\ i,j,i\neq j$,

$$d[(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)+(p_j^F-p_{j-1}^F)f(p_i^F-p_{i-1}^F)]\in K.$$

这是因为由此可得 $df-dP_F(f)\in K$,再因为 K 为 σ-弱闭的,从而有 $df=\sigma-\mathrm{weak}-\lim\limits_{F}(df-dp_F(f))\in K$.

因为 $D(N)$为其中的投影的闭线性扩张,并且 $D(N)\in P_F(B)$,又 K 为σ-弱闭的,只须证明当 d 为$D(N)$中投影,并且属于某个$(p_k^F-p_{k-1}^F)B(p_k^F-p_{k-1}^F)$时有 $d[(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)+(p_j^F-p_{j-1}^F)f(p_i^F-p_{i-1}^F)]\in K$.因为 $i\neq j$,则要么 $d(p_i^F-P_{i-1}^F)=0$ 要么 $d(p_j^F-p_{j-1}^F)=0$.在任何一种情况下都有

$$d[(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)+(p_j^F-p_{j-1}^F)f(p_i^F-p_{i-1}^F)]d=0.$$

由引理 2.1 可得到

$$\begin{aligned}&d[(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)+(p_j^F-p_{j-1}^F)f(p_i^F-p_{i-1}^F)]=\\&\qquad d[(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)+(p_j^F-p_{j-1}^F)f(p_i^F-p_{i-1}^F)]-\\&\qquad d[(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)+(p_j^F-p_{j-1}^F)f(p_i^F-p_{i-1}^F)]d\in L,\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}&P(d[(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)+(p_j^F-p_{j-1}^F)f(p_i^F-p_{i-1}^F)])=\\&\qquad dP([(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)+(p_j^F-p_{j-1}^F)f(p_i^F-p_{i-1}^F)])=0,\end{aligned}$$

所以,$d[(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)+(p_j^F-p_{j-1}^F)f(p_i^F-p_{i-1}^F)]\in K$,这证明了 K 为左 $D(N)$-模.由于 K^* 为 $T(N)^*$ 中 σ-弱闭 Lie 理想 L^* 的对角不交部分,所以 K^* 为左 $D(N)$-模,因此 K 是右 $D(N)$-模,从而 K 是 $D(N)$-模.

现在我们证明 K 为 $T(N)$的结合理想.由于 K 是σ-弱闭的 D-双模,所以 K 为集合$\{e_{ij}^n:e_{ij}^n\in K\}$的 σ-弱闭线性扩张,因此,只须证明对所有的矩阵单位 $f\in K$ 和所有的矩阵单位 $e\in T(N)$有 $ef\in K$,$fe\in K$.假设 $e,f\in B_n$,令

$$T_n=T(N)\cap B_n,L_n=L\cap B_n,K_n=K\cap B_n,$$

显然,L_n 为 T_n 的 Lie 理想.因为$D_n\subset T_n$,所以 T_n 为 B_n 中的 CSL 代数.显然 $T_n^*\cap T_n=T(N)\cap T(N)^*\cap B_n=D(N)\cap B_n$ 为 T_n 的对角部分.设 P_n 为从 B_n 到 $T_n^*\cap T_n$ 的条件期望.则任给 $b\in B_n$,$P(b)=b$ 当且仅当 $P_n(b)=b$.

事实上,若 $P(b)=b$,则 $b\in D(N)$.因此,$b\in D(N)\cap B_n=T_n^*\cap T_n$,所以有 $P_n(b)=b$.反之,若 $P_n(b)=b$,因为 $T_n^*\cap T_n=D(N)\cap B_n$,所以 $P(b)=b$.因为

$$K_n=K\cap B_n=K\cap L_n=\{b\in L_n:P(b)=0\},$$

所以 $K_n=\{b\in L_n:P_n(b)=0\}$,因此,$K_n$ 为 CSL 代数 T_n 的 Lie 理想 L_n 的对角不交部分.由[8,命题 3.4]知 K_n 为 T_n 的结合理想.因此 $ef\in K$,$fe\in K$.这样,我们证明了若 L 为 $T(N)$的 σ-弱闭 Lie 理想,则其对角不交部分 K 为 $T(N)$的结合理想.

任给 $a\in L$,因为 $a-P(a)\in L$,所以 $P(a)\in L$,从而 $P(a)\in F$,因此 $L=K+F$.因为 K,L 为 $T(N)$的 Lie 理想,所以 F 为$D(N)$的 σ-弱闭 Lie 理想.

现在,我们将证明存在一个比较大的理想 J,它由 K 加上某些原子构成,使得$J^0\subseteq L\subseteq J+C_K$,其中 J^0 表

示 J 中迹为零的算子的集合(在后面定义),C_K 为中心 $C(N)$的一个子代数.

设 K 为 $T(N)$的 σ-弱闭对角不交结合理想.定义$\wedge$的子集 Λ_K 为

$$\Lambda_K=\{p-p_-\in\Lambda:(p-p_-)T(N)(1-p),p_-T(N)(p-p_-)\subseteq K\},$$

任给 Λ_K 的子集Λ_0,我们通过 Λ_0 来定义 K 的饱和理想$K\vee\Lambda_0$ 为:

$$K\vee\Lambda_0:=\sigma-wk-\mathrm{c1}\{K+\sum\{qBq:q\in\Lambda_0\}\},$$

可以直接证明 $K\vee\Lambda_0$ 也是 $T(N)$的 σ-弱闭结合理想.

对任一个理想 J,构造一个 Lie 理想 J^0,称为 J 的零－迹部分,定义如下:

当 B 为有限因子时,定义 $J^0=\{a\in J:\mathrm{tr}(pap)=0$,对$\forall$原子 $p\in\Lambda\}$;当 B 非有限时,定义 $J^0=J$.

特别地,对上面所定义的理想 $K\vee\Lambda_0$,我们有:当 B 为非有限时,

$$(K\vee\Lambda_0)^0=\sigma-wk-\mathrm{c1}\{K+\sum\{qBq:q\in\Lambda_0\}\};$$

当 B 为有限因子时,

$$(K\vee\Lambda_0)^0=\sigma-wk-\mathrm{c1}\{K+\sum_n\{\sum\{q(sl_q)q:q\in\Lambda_0\}\}\},$$

其中 sl_q 为 qBq 中 Lie 理想$\{a\in qBq:\mathrm{tr}(a)=0\}$.

现在我们借助于结合环理论中的一个标记,若 A 为代数,L 为A 的 Lie 理想,定义

$$[A;L]=\{a\in A:[a,x]\in L,\forall x\in A\}.$$

引理 2.2 (1) 设 L 为结合代数A 的 Lie 理想,则$[A;L]$为包含 L 的 Lie 理想,更进一步,每一个线性流形 M,若满足 $L\subseteq M\subseteq[A;L]$,则 M 为 Lie 理想.

(2) 另外,若 A 为σ-弱闭算子代数,L 在A 中为σ-弱闭的,则$[A;L]$为 σ-弱闭的.

证明 显然.

命题 2.2 设 L 为 $T(N)$的 σ-弱闭 Lie 理想,令

$$K=\{a\in L:P(a)=0\}=\{a-P(a):a\in L\}$$

为 L 的对角不交结合理想,如果 $f\in[T(N);L]$,则 $f-P(f)\in K$.

证明 由 K 的定义,我们只须证明 $f-P(f)\in L$.首先我们先证明下面的事实:

设$\{q_1,q_2,\cdots q_n\}$为 $D(N)$中的正交投影族,且$\sum_i q_i=1$.则$\forall\ i$,$q_if-q_ifq_i\in L$.

从而,对 $D(N)$中的任意投影 p,$pf-pfp\in L$.

事实上固定 i.若 $j\neq i$,则$[[q_i,f],q_j]=q_ifq_j+q_jfq_i\in L$,因此$\sum_{i\neq j}q_ifq_j+\sum_{i\neq j}q_jfq_i\in L$.同时也有

$$[q_i,f]=q_if-fq_i=\sum_{j=1}^n q_ifq_j-\sum_{j=1}^n q_jfq_i=\sum_{j\neq i}q_ifq_j-\sum_{j\neq i}q_jfq_i\in L,$$

取平均得

$$\sum_{j\neq i}q_ifq_j=q_if-q_ifq_i\in L.$$

对 N 的每一个有限子套 $F=\{0=p_0^F<p_1^F<\cdots p_n^F=1\}$,如同命题 2.1,

$$f-P_F(f)=\sum_{i\neq j}(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)\in L.$$

由于 L 为σ-弱闭的,因此

$$f-P(f)=\sigma-wk-\lim_F\sum_{i\neq j}(p_i^F-p_{i-1}^F)f(p_j^F-p_{j-1}^F)\in L.$$

我们定义一个关于 σ-弱闭理想的中心中的子代数.对 $T(N)$的 σ-弱闭理想K,令

$$q_-=\bigvee_{q\in\Lambda_K}q,\ C_K^0=\oplus\{Cq:q\in\Lambda_K\}.$$

令 C_K^1 为$(1-q_0)$中满足下面性质的元素 f 的集合:对任一序对 $p_1,p_2\in L$,$p_2<p_1$,如果$(p_1-p_2)T(N)(p_1-p_2)\cap K=\{0\}$,则存在常量 $\lambda_{p_1-p_2}$,使得 $f(p_1-p_2)=\lambda_{p_1-p_2}(p_1-p_2)$.令 $C_K=C_K^0+C_K^1$,显然,$C_K\subset C(N)$.

由于下面命题的证明比较简单,略.

命题 2.3 设 K 为$T(N)$的 σ-弱闭理想,则 C_K 为 vN 代数.

命题 2.4 设 K 为$T(N)$的 σ-弱闭理想,设 K^0 为 K 的零－迹部分.则

$$[T(N);K^0]=[T(N);K]=K+C_K.$$

证明　显然$[T(N);K^0]=[T(N);K]$.

下证$[T(N);K]=K+C_K$. 令 $f=f_1+f_2+f_3$，其中 $f_1\in K, f_2\in C_K^0, f_3\in C_K^1$. 令 $g\in T(N)$. 下证$[g,f]=[g,f_1]+[g,f_2]+[g,f_3]\in K$. 第一个换位子$[g,f_1]$在 K 中是显然的. 对于第二个换位子$[g,f_2]$，令 $g_1=P(g)$，$g_2=g-g_1$. 因为 C_K^0 为$q_0D(N)$的中心，我们有$[g_1,f_2]=0\in K$. 关于$[g_2,f_2]$，显然有

$$[g_2,f_2]=\sum_{q\in\Lambda_0}[g_2,qf_2q]=\sum_{q\in\Lambda_0}(g_2qf_2q-qf_2qg_2)=\sum_{q\in\Lambda_0}\lambda_q(g_2q-qg_2).$$

任给 $p\in L$ 使得 $q=p-p_-\in\Lambda_K$，因为$(p-p_-)g_2(p-p_-)=0$，所以

$$g_2q-qg_2=g_2(p-p_-)-(p-p_-)g_2=pg_2(p-p_-)-(p-p_-)g_2(1-p_-)=$$
$$p_-g_2(p-p_-)-(p-p_-)g_2(1-p_-).$$

因为 $q=p-p_-\in\Lambda_K$，由 Λ_K 的定义，$g_2q-qg_2\in K$，所以$[g_2,f_2]\in K$. 对于$[g,f_3]$，如果 $g\in D(N)$，因为 $C_K^1\subset C(N)$，则$[g,f_3]=0\in K$. 从而可假设 $P(g)=0$. 显然 $P([g,f_3])=0$. 若$[g,f_3]\notin K$，则在 $T(N)$中存在矩阵单位 e 满足 $\operatorname{supp}e\subset\operatorname{supp}[g,f_3]$，$\operatorname{supp}e\cap\hat{K}=\varnothing$，进一步满足 $ee^*\perp e^*e$，并且 ee^*+e^*e 不是 N 的区间. 下面我们将分四种情况来证明这是不可能的：

情形 1　存在 $p_1\in N$ 使得$p_1-p_{1_-}\in\Lambda$，并且 $ee^*\leqslant p_1-p_{1_-}$，存在 $p_2\in N$ 使得$p_2-p_{2_-}\in\Lambda$ 且$e^*e\leqslant p_2-p_{2_-}$. 因为 $e\in T(N)$，我们可以假设 $p_1\leqslant p_2$. 如果$(p_1-p_{1_-})T(N)(p_1-p_{1_-})\cap K\neq\{0\}$，则必有$(p_1-p_{1_-})T(N)(p_1-p_{1_-})\subset K$，从而有 $ee^*\in K$，$e=ee^*e\in K$，这与假设 $e\notin K$ 矛盾，所以$(p_1-p_{1_-})T(N)(p_1-p_{1_-})\cap K=\{0\}$. 类似地，可以证明$(p_2-p_{2_-})T(N)(p_2-p_{2_-})\cap K=\{0\}$.

若 $p_1=p_2$ 且 $p_1-p_{1_-}\in\Lambda_K$，则 $f_3(p_1-p_{1_-})=0$. 因此任给$(x,y)\in\operatorname{supp}e$，有 $f_3(x,x)=f_3(y,y)=0$. 若 $p_1=p_2$ 且 $p_1-p_{1_-}\notin\Lambda_K$，由于 $f_3\in C_K^1$，所以存在纯量 $\lambda_{p_1-p_{1_-}}$ 满足 $f_3(p_1-p_{1_-})=\lambda_{p_1-p_{1_-}}(p_1-p_{1_-})$，从而任给$(x,y)\in\operatorname{supp}e$，有 $f_3(x,x)=f_3(y,y)=\lambda_{p_1-p_{1_-}}$. 若 $p_1<p_2$，因为 K 为 $T(N)$的理想且 $e\notin K$，所以$(p_2-p_{1_-})T(N)(p_2-p_{1_-})\cap K=\{0\}$. 因为 $f_3\in C_K^1$，所以存在常量 $\lambda_{P_2-P_{1_-}}$ 使得 $f_3(p_2-p_{1_-})=\lambda_{p_2-p_{1_-}}(p_2-p_{1_-})$. 从而任给$(x,y)\in\operatorname{supp}e$ 有$f_e(x,x)=f_3(y,y)=\lambda_{p_2-p_{1_-}}$. 总之在每一种情况下，对 $\operatorname{supp}e$ 中的所有(x,y)，都有

$$[g,f_3](x,y)=gf_3(x,y)-f_3g(x,y)=g(x,y)f_3(y,y)-f_3(x,x)g(x,g)=0,$$

这与假设 $\operatorname{supp}e\subset\operatorname{supp}[g,f_3]$矛盾.

情形 2　存在 $p_1\in N$，使得 $p_1-p_{1_-}\in\Lambda$ 且 $ee^*\leqslant p_1-p_{1_-}$ 且对$\forall q\in\Lambda$，$ee^*q=0$，由于 N 为正则的，所以存在 $p_2,p_3\in N$，使得 $P_2<P_3$ 且 $P_3-P_2\leqslant e^*e$. 因为 $e\in T(N)$，我们可以假设 $P_1<P_2$. 用 $e(p_3-p_2)$代替 e，则可假设 $p_3-p_2=e^*e$. 因为 K 是 $T(N)$的结合理想，且 $\operatorname{supp}e\cap\hat{K}=\varnothing$，所以有$(p_3-p_{1_-})T(N)(p_3-p_{1_-})\cap K=\{0\}$. 因为 $f_3\in C_K^1$，所以存在常量 $\lambda_{P_3-P_{1_-}}$ 使得 $f_3(p_3-p_{1_-})=\lambda_{p_3-p_{1_-}}(p_3-p_{1_-})$，从而任给$(x,y)\in\operatorname{supp}e$ 有$f_3(x,x)=f_3(y,y)=\lambda_{p_3-p_{1_-}}$，因此任给$(x,y)\in\operatorname{supp}e$ 有

$$[g,f_3](x,y)=gf_3(x,y)-f_3g(x,y)=g(x,y)f_3(y,y)-f_3(x,x)g(x,g)=0,$$

这与假设 $\operatorname{supp}e\subset\operatorname{supp}[g,f_3]$矛盾.

情形 3　存在 $p_1\in N$，使得 $p_1-p_{1_-}\in\Lambda$ 且$e^*e\leqslant p_1-p_{1_-}$ 且对$\forall q\in\Lambda$，$ee^*q=0$，由于 N 是正则的，所以存在 $p_2,p_3\in N$，使得 $P_2<P_3$ 且 $P_3-P_2\leqslant ee^*$，因为 $e\in T(N)$，所以可以假设 $P_3<P_{1_-}$. 用$(p_3-p_2)e$ 代替e，我们假设 $p_3-p_2=ee^*$. 因为 K 为 $T(N)$的结合理想，且 $\operatorname{supp}e\cap\hat{K}=\varnothing$，我们有$(p_3-p_{1_-})T(N)(p_3-p_{1_-})\cap K=\{0\}$. 因为$f_3\in C_K^1$，所以存在常量 $\lambda_{P_1-P_3}$，使得 $f_3(p_1-p_3)=\lambda_{p_1-p_3}(p_1-p_3)$. 因此，任给$(x,y)\in\operatorname{supp}e$ 有$f_3(x,x)=f_3(y,y)=\lambda_{p_1-p_3}$，因此，任给$(x,y)\in\operatorname{supp}e$ 有

$$[g,f_3](x,y)=gf_3(x,y)-f_3g(x,y)=g(x,y)f_3(y,y)-f_3(x,x)g(x,g)=0,$$

这与假设 $\mathrm{supp}e\subset\mathrm{supp}[g,f_3]$矛盾.

情形 4 任给 $q\in\Lambda$ 都有 $qee^*=qe^*e=0$.因为 ee^*+e^*e 不是N 的区间,并且 N 为正则的,所以存在 $p_1,p_2,p_3,p_4\in N$ 使得$p_1<p_2<p_3<p_4$,且$(p_2-p_1)e(p_4-p_3)=e$.因为 K 为 $T(N)$的结合理想,且 $\mathrm{supp}e\cap\hat{K}=\varnothing$,我们有$(p_4-p_2)T(N)(p_4-p_2)\cap K=\{0\}$,$(p_3-p_1)T(N)(p_3-p_1)\cap K=\{0\}$.因为 $f_3\in C_K^1$,所以存在常量 λ_1,λ_2,使得 $f_3(p_3-p_1)=\lambda_1(p_3-p_1)$,$f_3(p_4-p_2)=\lambda_2(p_4-p_2)$.从而有

$$f_3(p_3-p_2)=f_3(p_3-p_1)(p_3-p_2)=\lambda_1(p_3-p_1)(p_3-p_2)=\lambda_1(p_3-p_2)=$$
$$f_3(p_4-p_2)(p_3-p_2)=\lambda_2(p_3-p_2).$$

因为 $p_3-p_2\neq0$,所以有 $\lambda_1=\lambda_2$.从而有 $f_3(p_4-p_1)=\lambda_1(p_4-p_1)$.因为任给$(x,y)\in\mathrm{supp}e$ 有 $f_3(x,x)=f_3(y,y)=\lambda_1$,故任给$(x,y)\in\mathrm{supp}e$ 有$[g,f_3](x,y)=gf_3(x,y)-f_3g(x,y)=g(x,y)f_3(y,y)-f_3(x,x)g(x,g)=0$,这与假设 $\mathrm{supp}e\subset\mathrm{supp}[g,f_3]$矛盾.这样就证明了$[g,f_3]\in K$.从而有 $K+C_K\subseteq[T(N);K]$.

为了证明反包含关系,假设 $f\in[T(N);K]$,令 $f_1=f-P(f)$.由命题2.2 知 $f_1\in K$,因此 $P(f)\in[T(N);K]$.设 $q\in\Lambda_K$,设 $f_q=qP(f)q$.如果 $qBq(=qT(N)q)\subseteq K$,则 $f_q\in K$.否则,因为 K 为 σ-弱闭的结合理想,且 qBq 为因子,我们有 $qT(N)q\cap K=\{0\}$.$\forall g\in qBq$,有$[qP(f)q,g]=[P(f),g]\in K$.另一方面,因为$qP(f)q$,$g\in qBq$,所以$[qP(f)q,g]\in qBq$.因此$[qP(f)q,g]=0$.所以 $qP(f)q$ 属于 qBq 的中心,故存在常量 λ_q,使得 $qP(f)q=\lambda_qq$.令 $f_2=q_0P(f)q_0$,通过以上的讨论,我们有 $f_2\in K+C_K^0$.令 $f_3=f-f_1-f_2$,则 $f_3=(1-q_0)P(f)\in[T(N);K]$.假设 $p_1,p_2\in L$,且 $p_1<p_2$,满足$(p_2-p_1)T(N)(p_2-p_1)\cap K=\{0\}$,对所有的 $g\in T(N)$,因为$f_3\in[T(N),K]$,我们有$(p_2-p_1)[f_3,g](p_2-p_1)\in K\cap(p_2-p_1)T(N)(p_2-p_1)$所以,$(p_2-p_1)[f_3,g](p_2-p_1)=[(p_2-p_1)f_3(p_2-p_1),(p_2-p_1)g(p_2-p_1)]=0$因此$(p_2-p_1)f_3(p_2-p_1)$属于$(p_2-p_1)B(p_2-p_1)$中的套代数 $T((p_2-p_1)N)$的中心.由[11,命题2.3],存在常量 λ 使得$(p_2-p_1)f_3(p_2-p_1)=\lambda(p_2-p_1)$,因此 $f_3\in C_K^1$.从而证明了$[T(N);K]=K+C_K$.

下面给出本文的主要结论.

定理 2.1 设 D 为因子 B 的 Cartan 子代数,L 为 B 的正则套子代数 $T(N)$的 σ-弱闭子空间,则以下的两个条件是等价的:

(a) L 为$T(N)$的 Lie 理想;

(b) 存在 $T(N)$的 σ-弱闭的对角不交结合理想K,与 Λ_K 的子集Λ_0 使得

$$(K\vee\Lambda_0)^0\subseteq L\subseteq[T(N);K\vee\Lambda_0]+C_K=(K\vee\Lambda_0)^0+C_K.$$

证明 (a)⇒(b):假设 L 为 Lie 理想,$K=L\cap S$ 为对应的对角不交结合理想.定义 Λ_K 的子集 $\Lambda_0=\{q\in\Lambda_K:qLq\not\subset C_q\}$.因为 $K\subset L$,要证$(K\vee\Lambda_0)^0\subseteq L$,只须证$(\Lambda_0)^0\subseteq L$.假设 $q\in\Lambda_0$,已证 qLq 为 qBq 中 σ-弱闭 Lie 理想.因为 $qLq\not\subset C_q$,由[9]可得 $qL=qBq$ 或 $qLq=qsl_qq$,其中当 B 为有限因子时,后者可能成立.由此可推出$(K\vee\Lambda_0)^0\subseteq L$.

下面我们证明 $L\subseteq[T(N);K\vee\Lambda_0]+C_K=(K\vee\Lambda_0)^0+C_K$.

假设 $f\in L$,令 $f_1=f-P(f)$,令 $f_2=P(f)$.由命题2.1 知 $f_1\in K$ 且$f_2\in D(N)\cap L$.任给 $q\in\Lambda$,显然 qLq 为qBq 中的σ-弱闭 Lie 理想.若 $q\in\Lambda_0$,则 $qf_2q=qfq\in qBq\subseteq K\vee\Lambda_0$.令 $q_0=\sum\limits_{q\in\Lambda_0}q$,则 $q_0f_2\in K\vee\Lambda_0$.令 $f_3=(1-q_0)f_2$,下面证 $f_3\in C_K$.若 $q\in\Lambda_K\setminus\Lambda_0$,则由 Λ_0 的定义知 $qLq\subseteq Cq$.所以存在常量 α_q 使得 $qf_2q=qfq=\alpha_qq$.

若 $p\in\Lambda\setminus\Lambda_K$,设 $p\in N$ 使得$q=p-p_-$,必有 $qLq\subseteq Cq$.若不然,由于 qLq 为 qBq 中的 σ-弱闭 Lie 理想,由[9]有 $qLq=qBq$ 或 $qLq=qsl_qq$,后一种情况只有 B 为有限因子时才可能成立.若 $qLq=qBq$,则 $qB(1-p)=[qBq,qB(1-p)]\subseteq K$ 且 $p_-Bq=[p_-Bq,qBq]\subseteq K$,其中$[qBq,qB(1-p)]$为集合$\{[a,b]:a\in qBq,b\in qB(1-p)\}$的 σ-弱闭线性扩张,这与假设 $q\notin\Lambda_K$矛盾.若 $qLq=sl_q$,由引理1.1,亦有 $qB(1-p)=[sl_q,$

$qB(1-p)]\subseteq K$ 且 $p_-Bq=[p_-Bq,sl_q]\subseteq K$,这也与假设 $q\notin\Lambda_K$ 矛盾.因此有 $qLq\subseteq Cq$.从而存在常量 α_q 使得 $qf_2q=qfq=\alpha_q q$.

因为 N 是正则的,所以$(1-\bigvee_{q\in\Lambda}q)f_3\in(1-\bigvee_{q\in\Lambda}q)C(N)\subseteq D$,因此$(1-q_0)f_3\in D$.下面证明 $f_3\in C_K^1$.令 $p_1,p_2\in N$,满足 $p_2<p_1$,且$(p_1-p_2)T(N)(p_1-p_2)\cap K=\{0\}$.令 $e\in P((p_1-p_2)T(N)(p_1-p_2))$,显然 $e\leqslant p_1-p_2$.若存在原子 q 满足 $q\leqslant p_1-p_2$ 且 $e\in qBq$,则由上面的证明知存在常量 α_q 使得 $qf_3=\alpha_q q$,所以$[(p_1-p_2)f_3,e]=0$.若 $e\in D$,显然$[(p_1-p_2)f_3,e]=0$.因为

$$P((p_1-p_2)T(N)(p_1-p_2))=\sigma-wk-\mathrm{c1}\{(1-\bigvee_{q\in\Lambda}q)D+\sum\{qBq:q\in\Lambda,q\leqslant p_1-p_2\}\},$$

所以任给 $g\in P((p_1-p_2)T(N)(p_1-p_2))$,有$[(p_1-p_2)f_3,g]=0$.

设 $g\in(p_1-p_2)T(N)(p_1-p_2)$,令 $g_1=g-P(g)$,显然 $P(g_1)=0$.因为 $f_3\in L$,所以$[f_3(p_1-p_2),g_1]\in L$.因为

$$P([f_3(p_1-p_2),g_1])=P(f_3(p_1-p_2)g_1-g_1f_3(p_1-p_2))=$$
$$f_3(p_1-p_2)P(g_1)-P(g_1)f_3(p_1-p_2)=0,$$

所以我们有$[f_3(p_1-p_2),g_1]\in K$.但是$[f_3(p_1-p_2),g_1]\in(p_1-p_2)T(N)(p_1-p_2)$,所以$[f_3(p_1-p_2),g_1]=0$.由前面的讨论得知$[f_3(p_1-p_2),P(g)]=0$.因此$[f_3(p_1-p_2),g]=0$,即 $f_3(p_1-p_2)$属于$(p_1-p_2)T(L)(p_1-p_2)$的中心,由[11,命题 2.3],存在常量 λ 使得$f_3(p_1-p_2)=\lambda(p_1-p_2)$.因此 $f_3\in C_K^1$.这样就证明了$(K\vee\Lambda_0)^0\subseteq L\subseteq(K\vee\Lambda_0)+C_K$.

由引理 2.2 和命题 2.4(b)⇒(a)显然.

参考文献:

[1] HERSTEIN I N. On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring[J]. Amer J Math, 1955, 77:279-285.

[2] HUDSON J D, MARCOUX L W, SOUROUR A R. Lie ideals in triangular operator algebras[J]. Tran Amer Math Soc, 1998, 350:3321-3339.

[3] MARCOUX L W, SOUROUR A R. Conjugation-invariant subspaces and Lie ideals in non-self adjoint operator algebras[J]. J London Math Soc, 2002, 65:493-512.

[4] FONG C K, MIERS C R, SOUROUR A R. Lie and Jordan ideals of operators on Hilbert space[J]. Proc Amer Math Soc, 1982, 84:516-520.

[5] FONG C K, MURPHY G J. Ideals and Lie ideals of operators[J]. Acta Sci Math(Szeged), 1987, 51:441-456.

[6] 纪培胜,王琳. GICAR 代数中的闭 Lie 理想[J]. 数学学报,2004, 47(5):867-872.

[7] Ji Peisheng, WANG Li. Lie ideals in AF algebras[J]. J Math Research and Exp, 25(4):589-592.

[8] HOPENWASSER A, PAULSEN V. Lie ideals in operator algebras[J]. J Operator Theory, 2004, 52:325-340.

[9] MIERS C R. Closed Lie ideals in operator algebras[J]. Canad J Math, 1981, 33:1271-1278.

[10] MURPHY G J. Lie ideals in associative algebras[J]. Canad Math Bull, 1984, 27:10-15.

[11] 纪培胜,綦伟青,卜美华. 超有限因子中套代数的对角、理想与中心[J]. 山东大学学报:理学版,2006,41(6):11-15.

[12] FELDMAN J, MOORE C. Erogodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras, Ⅰ,Ⅱ[J]. Tran Amer Math Soc, 1977, 234:289-359.

(编辑:李晓红)