第42卷　第4期　山东大学学报（理学版）　2007年4月
Vol.42　No.4　JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY　Apr. 2007

文章编号:1671-9352(2007)04-0032-04

2-连通[4,2]-图中的圈

刘晓妍[1],王江鲁[2],高国成[1]
（1. 山东科技大学　公共课部, 山东　济南　250031; 2. 山东师范大学　数学科学学院, 山东　济南　250014）

摘要:如果图 G 中任意 s 个点的导出子图至少含有 t 条边,则称图 G 为$[s,t]$-图. 设是2-连通[4,2]-图,C 是 G 中满足$|V(C)|<|V(G)|$的任一圈,则或者 G 中有$(|C|+1)$-圈,或者 G 同构于$K_{2,3}$, $K_{1,1,3}$, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 之一.

关键词:$[s,t]$-图;k-连通;圈
中图分类号:O157.5　　**文献标识码:**A

The cycle in 2-connected [4,2]-graphs

LIU Xiao-yan[1], WANG Jiang-lu[2] and GAO Guo-cheng[1]
(1. Department of Basic Courses, Shandong University of Science and Technology, Jinan 250031, Shandong, China;
2. The institute of Science of Mathematics, Shandong Normal Univ., Jinan 250014, Shandong, China)

Abstract: A graph G is called $[s,t]$-graph, if there are at least t edges in every induced subgraph of s vertices. Let G be a 2-connected [4,2]-graph, C is a cycle in G, which satisfies the condition $|V(C)|<|V(G)|$, then either G has a $(|C|+1)$-cycle, or G is isomorphic to one of $K_{2,3}$, $K_{1,1,3}$, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5.

Key words: $[s,t]$-graph; k-connected; cycle

0　引言

本文仅讨论有限、无向、简单图,所使用的记号和术语约定如下,其中未加说明的部分请参看文献[1].

定义图 G 的连通度$\kappa(G)$为使图 G 不连通所要删去的顶点的最小数目,对任意的 $k<\kappa(G)$,称 G 为k-连通的. 对 $V(G)$的子集 S,T,令 $E(S,T)=\{st\in E(G): s\in S, t\in T\}$. 设 $C=v_1v_2\cdots v_rv_1$ 是 G 的一个圈,v_i, $v_j\in V(C)$,用 v_i^{-1} 和 v_i^{+1} 分别表示 C 上的点 v_{i-l} 和 v_{i+l}, v_i^{-1} 和 v_i^{+1} 也分别简记成 v_i^- 和 v_i^+;用 v_iCv_j 和 $v_i\bar{C}v_j$ $(1\le i<j\le r)$分别表示 C 上的路 $v_iv_{i+1}\cdots v_j$ 和 $v_iv_{i-1}\cdots v_j$(这里点的下标均模 r). $|C|=|V(C)|$称为圈 C 的长度. 若 C 的长度为 r,则称 C 为 G 的一个 r-圈. 如果图 G 中任意 s 个点的导出子图至少含有 t 条边,则称图 G 为$[s,t]$-图.

对于$[s,t]$-图,刘春房证明了下面的定理[2]:

定理1　设 G 是[4,2]-图,则

(a) G 是连通的当且仅当 G 同构于 $k_{1,3}$ 或 G 有 Hamilton 路.

(b) G 是2-连通的当且仅当 G 同构于 $k_{2,3}$ 或 G 同构于 $k_{1,1,3}$ 或 G 有 Hamilton 圈.

1　主要结果

下边的定理2是本文要证明的主要结果,该结果要比定理1(b)中的结果更强.

收稿日期:2006-05-08
作者简介:刘晓妍(1976-　),女,讲师,硕士,主要研究方向:组合与最优化.

定理 2　设 G 是 2-连通[4,2]-图，C 是 G 中满足 $|V(C)|<|V(G)|$ 的任一圈，则或者 G 中有 $(|C|+1)$-圈，或者 G 同构于 $K_{2,3}$，$K_{1,1,3}$，F_1，F_2，F_3，F_4，F_5 之一.（其中 F_1，F_2，F_3，F_4，F_5 见图 1.）

图 1

证明　设 G 图满足定理条件，C 是 G 之一圈，且 $|V(C)|<|V(G)|$，以下总假定 G 中不含 $(|C|+1)$ 圈. 取 $G-C$ 的一个分支 H，因为 G 是 2-连通的，所以 $|N_C(H)|\geq 2$.

论断 1　设 $u,v\in V(C)$，$x\in V(H)$，若 $xu\in E(G)$，$xv\in E(G)$，则 xu^-，$xu^+\notin E(G)$，xv^-，$xv^+\notin E(G)$，u^-v^-，$u^+v^+\notin E(G)$.

证明　若 $xv^-\in E(G)$，则 G 有 $(|C|+1)$-圈 $C'=vCv^-xv$ 矛盾，所以 $xv^-\notin E(G)$；同样可证 $xv^+\notin E(G)$，xu^-，$xu^+\notin E(G)$. 若 $u^+v^+\in E(G)$，则 G 有 $(|C|+1)$-圈 $C'=uxv\bar{C}u^+v^+Cu$ 矛盾，同样可证 $u^-v^-\notin E(G)$.

论断 2　设 G 是 2-连通[4,2]-图，若 $|C|>4$，则任取 $x\in V(H)$，有 $|N_C(x)|=1$.

证明　若 $|N_C(x)|\geq 2$，取 $v_1,v_2\in N_C(x)$，$(v_1\neq v_2)$，由论断 1：$v_1v_2\notin E(C)$. 因为 $|C|>4$，所以 $|v_1^+Cv_2^-|$，$|v_2^+Cv_1^-|$ 必有一个 ≥ 2，不妨设 $|v_2^+Cv_1^-|\geq 2$，考虑 $G[x,v_2^-,v_2^+,v_1^-]$，由论断 1：xv_1^-，xv_2^-，xv_2^+，$v_1^-v_2^-\notin E(G)$，由 G 是[4,2]-图：必有 $v_2^-v_2^+\in E(G)$.

若 $v_2^{-2}=v_1$，则 G 中有 $(|C|+1)$-圈 $C''=v_1xv_2v_2^-v_2^+Cv_1$ 矛盾，所以 $v_2^{-2}\neq v_1$，考虑 $G[x,v_2^{-2},v_2^+,v_1^-]$，由论断 1：$xv_1^-$，$xv_2^+\notin E(G)$，

又 $vx_2^{-2}\notin E(G)$，否则 G 中有 $(|C|+1)$-圈 $C'=v_2^{-2}xv_2v_2^-Cv_2^{-2}$ 矛盾，

又 $v_1^-v_2^{-2}\notin E(G)$，否则 G 中有 $(|C|+1)$-圈 $C'=v_1^-v_2^{-2}\bar{C}v_1xv_2v_2^-v_2^+Cv_1^-$ 矛盾，由 G 是[4,2]-图：必有 $v_2^{-2}v_2^+\in E(G)$，如此考虑下去可得：任意 $v\in V(v_1^+Cv_2^-)$，有 $vv_2^+\in E(G)$，特别地，$v_1^+v_2^+\in E(G)$，这与论断 1 矛盾.

论断 3　设 H_1，H_2 是 $G-C$ 的两个分支，则 $N_C(H_1)\cap N_C(H_2)=\phi$.

证明　若 $N_C(H_1)\cap N_C(H_2)\neq\phi$，取 $v\in N_C(H_1)\cap N_C(H_2)$，则有 x_1v，$x_2v\in E(G)$，其中 $x_1\in V(H_1)$，$x_2\in V(H_2)$. 考虑 $G[x_1,x_2,v^-,v^+]$，由论断 1：x_1v^-，x_1v^+，x_2v^-，$x_2v^+\notin E(G)$，又 $x_1x_2\notin E(G)$，这与 G 是[4,2]-图矛盾.

论断 4　对 $G-C$ 的任一分支 H，$|H|\geq 2$，则 H 与 C 间必有两条独立边.

证明　显然.

以下分 3 种情形完成定理的证明.

情形 1　$|C|>4$.

取 $G-C$ 的一个分支,由论断 2 知任取 $x\in V(H)$,有 $|N_C(x)|=1$,又因为 G 是 2-连通的,所以 $|N_C(H)|\geq 2$,由论断 4 知 H 与 C 间必有两条独立边.

设 $x_1v_1,x_2v_2\in E(V(H),V(C))$,其中 $x_1,x_2\in V(H)(x_1\neq x_2)$,$v_1,v_2\in V(C)$,$(v_1\neq v_2)$. 若 $v_1\ v_2\notin E(C)$,因为 $|C|>4$,所以 $|v_1^+\ Cv_2^-|$,$|v_2^+\ Cv_1^-|$必有一个 ≥ 2,不妨设 $|v_2^+\ Cv_1^-|\geq 2$. 考虑 $G[x_1,x_2,v_1^+,v_2^{+2}]$,由论断 2 及 G 是[4,2]-图知必有 $x_1x_2,v_1^+\ v_2^{+2}\in E(G)$,则 G 中有 $(|C|+1)$-圈 $C'=v_1^+\ v_2^{+2}Cv_1x_1x_2v_2\bar{C}v_1^+$ 矛盾,所以 $v_1v_2\in E(G)$.

考虑 $G[x_1,x_2,v_1^-,v_2^+]$,由论断 2 及 G 是[4,2]-图知必有 $x_1x_2,v_1^-\ v_2^+\in E(G)$. 考虑 $G[x_1,x_2,v_1^{-2},v_2^{+2}]$,由论断 2 及 G 是[4,2]-图知必有 $v_1^{-2}v_2^{+2}\in E(G)$,如此下去可得 $v_1^{-i}v_2^{+i}\in E(G)$,$i=1,2,\cdots\left\lfloor\frac{|C|}{2}\right\rfloor-1$.

若 $|C|$ 为奇数,则 G 中有 $(|C|+1)$-圈 $C'=x_1v_1\bar{C}v_1-(\left\lfloor\frac{|C|}{2}\right\rfloor-1)v_2+(\left\lfloor\frac{|C|}{2}\right\rfloor-1)\bar{C}v_2x_2x_1$ 矛盾.

若 $|C|$ 为偶数且 $|C|\geq 8$,考虑 $G[x_1,x_2,v_1^-,x_1^{-3}]$,由论断 2 及 G 是[4,2]-图知必有 $x_1x_2,v_1^-\ v_1^{-3}\in E(G)$,则 G 有 $(|C|+1)$-圈 $C'=x_1v_1v_1^-\ v_1^{-3}\bar{C}v_2x_2x_1$ 矛盾.

若 $|C|=6$,考虑 $G[x_1,x_2,v_1^-,v_2^{+2}]$,由论断 2 及 G 是[4,2]-图知必有 $x_1x_2,v_1^-\ v_2^{+2}\in E(G)$,则 G 有 7-圈 $C'=x_1v_1v_1^-\ v_2^{+2}v_2^+\ v_2x_2x_1$ 矛盾.

情形 2　$|C|=3$.

设 $C=v_1v_2v_3v_1$. 如果 $G-C$ 的分支数 ≥ 2,取 $G-C$ 的任意两个分支 H_1,H_2,因为 G 是 2-连通的,所以 $|N_C(H_i)|\geq 2$, $i=1,2$,又注意到 $|C|=3$,可知 $N_C(H_1)\cap N_C(H_2)\neq\phi$,此矛盾于论断 3. 因此 $G-C$ 只能有一个分支,设此分支为 H.

若 $|H|=1$ 或 $|H|=2$,则易见 G 有 4-圈,矛盾. 所以 $|H|\geq 3$.

由 $|C|=3$ 及 $|N_C(H)|\geq 2$ 知 H 与 C 间必有两条独立边,取两条这样的独立边,不妨设为 $x_1v_1,x_2v_2\in E(V(H),V(C))$,其中 $x_1,x_2\in V(H)$ 且 $x_1\neq x_2$,则

$$x_1\ x_2\notin E(G).\tag{1}$$

(否则 G 有 4-圈.)

对任意的 $x\in V(H)$,有

$$x\,v_3\notin E(G).\tag{2}$$

事实上:若 $x\in\{x_1,x_2\}$,则结论显然. 设 $x\notin\{x_1,x_2\}$,若 $xv_3\in E(G)$,考虑 $G[x,x_1,x_2,v_3]$,由论断 1 知 $x_1v_3,x_2\ v_3\notin E(G)$,由(1)有 $x_1\ x_2\notin E(G)$,又 $x_1x\notin E(G)$(否则 G 有 4-圈),同理 $x_2x\notin E(G)$;显然与 G 是[4,2]-图矛盾.

又对任意的 $v\in V(H)$,有

$$xx_1,xx_2\in E(G).\tag{3}$$

事实上:考虑 $G[x,x_1,x_2,v_3]$,由论断 1 知 $x_1v_3,x_2\ v_3\notin E(G)$,又由(1)(2)有 $x_1x_2,x\,v_3\notin E(G)$,由 G 是[4,2]-图知必有 $xx_1,xx_2\in E(G)$.

若 $|H|\geq 4$,取 $x_3,x_4\in V(H)-\{x_1,x_2\}$,由(3)知 x_3,x_4 均与 x_1,x_2 相邻,则 G 有 4-圈,矛盾. 此矛盾说明 $|H|=3$,于是 G 同构于 F_1.

情形 3　$|C|=4$.

注意到对 G 的任一分支 H,均有 $|N_C(H)|\geq 2$ 且 $|C|=4$,结合论断 3 可知 $G-C$ 至多有两个分支. 取 $G-C$的一个分支 H. 若 $|H|\geq 2$,由论断 4 知 H 与 C 间必有两条独立边,取两条这样的独立边,设 x_1v_1, $x_2v_2\in E(V(H),V(C))$,其中 $x_1,x_2\in V(H)(x_1\neq x_2)$,$v_1,v_2\in V(C)(v_1\neq v_2)$. 若 $v_1\ v_2\notin E(C)$.

考虑 $G[x_1,x_2,v_1^-,v_2^-]$,由论断 1 知 $x_1v_1^-,x_1v_2^-,x_2v_1^-,x_2\ v_2^-\notin E(G)$,又 $x_1\ x_2\notin ZE(G)$(否则 G 有 5-圈),这与 G 是 [4,2]-图矛盾. 所以 $v_1v_2\in E(G)$.

子情形 3.1 $|H|\geq 3$.

取 $x\in V(H)-\{x_1,x_2\}$,显然 x 不能与 x_1,x_2 同时相邻,否则 G 有 5-圈. 不妨设 $xx_1\notin E(G)$;设 $C-\{v_1,v_2\}=\{v_3,v_4\}$,即 $C=v_1v_2v_3v_4v_1$,有

$$xv_3\notin E(G),\ xv_4\notin E(G). \tag{4}$$

事实上:若 $xv_3\in E(G)$,考虑 $G[x,x_1,v_2,v_4]$,由论断 1 知 $x_1v_2,x_1v_4,xv_2,xv_4\notin E(G)$,且 $xx_1\notin E(G)$,这与 G 是[4,2]-图矛盾.

事实上:若 $xv_4\in E(G)$,考虑 $G[x,x_2,v_1,v_3]$,由论断 1 知 $x_2v_1,x_2v_3,xv_1,xv_3\notin E(G)$,由 G 是[4,2]-图知,$xx_2,v_1v_3\in E(G)$,则 G 有 5-圈,与 $C'=xx_2v_2v_3v_4x$ 矛盾.

考虑 $G[x,x_1,v_3,v_4]$,由假设及论断 1 得 $xx_1,x_1v_4\notin E(G)$,注意到(4)及 G 是[4,2]-图知,$x_1v_3\in E(G)$. 若$v_2v_4\in E(G)$,则 G 有 5-圈 $C'=v_1x_1v_3v_2v_4v_1$,矛盾,所以,$v_2v_4\notin E(G)$,考虑 $G[x,x_1,v_2,v_4]$,由假设及论断 1 得 $xx_1,x_1v_4,x_1v_2\notin E(G)$又 $v_2v_4\notin$及(4)$xv_4\notin E(G)$,显然与 G 是[4,2]-图矛盾.

注 子情形 3.1 说明只需再考虑"$G-C$ 的每个分支至多两个点"的情形.

子情形 3.2 $|H|=2$.

若$|H|=2$,则 $x_1x_2\in E(H)$.

(a) 若 H 是$G-C$ 的惟一分支,由论断 1 知 $x_1v_2,x_1v_4,x_2v_1,x_2v_3\notin E(G)$.

若 $v_2v_4\in E(G)$,则 G 有 5-圈$C'=x_1v_1v_4v_2x_2x_1$,矛盾.

若 $v_1v_3\in E(G)$,则 G 有 5-圈$C'=x_1v_1v_3v_2x_2x_1$,矛盾.

若 $x_1v_3\notin E(G),x_2v_4\notin E(G)$,则 G 同构于 F_2.

若 $x_1v_3\in E(G),x_2v_4\in E(G)$之一成立,则 G 同构于F_3.

若 $x_1v_3\in E(G),x_2v_4\in E(G)$都成立,则 G 同构于F_4.

(b) 若 $G-C$ 有两个分支,不妨设 H_1 为 $G-C$ 的另一分支.

若$|H_1|=2$,设 $V(H_1)=\{y_1,y_2\}$,由$|N_C(H_1)|\geq 2$及论断 3 得 $y_1v_3,y_2v_4\in E(G)$,考虑 $G[x_1,y_1,v_2,v_4]$,由论断 1 知 $x_1v_4,x_1v_2,y_1v_4,y_1v_2\notin E(G)$,又 $x_1y_1\notin E(G)$,这与 G 是[4,2]-图矛盾,所以$|H_1|=1$. 设 $V(H_1)=\{y\}$,由$|N_C(H_1)|\geq 2$及论断 3 得 $yv_3,yv_4\in E(G)$,则 G 有 5-圈,矛盾.

注 上述两种子情形说明只需再考虑"$G-C$ 的每个分支至多一个点"的情形.

子情形 3.3 $|H|=1$.

设 $V(H)=\{x\}$,由$|N_C(H)|\geq 2$及论断 1:设 $xv_1,xv_3\in E(G)$,且 $v_2v_4\notin E(G)$,否则 G 有 5-圈.

(a) 若 H 是$G-C$ 的惟一分支,则

当 $v_1v_3\notin E(G)$时,G 同构于 $K_{2,3}$,

当 $v_1v_3\in E(G)$时,G 同构于$K_{1,1,3}$.

(b) 若 $G-C$ 有两个分支,不妨设 H_1 为 $G-C$ 的另一分支,设 $V(H_1)=\{y\}$,由$|N_C(H_1)|\geq 2$及论断 3 得 $yv_2,yv_4\in E(G)$,则$v_1v_3\notin$(否则 G 有 5-圈),此时 G 同构于 F_5.

至此定理 2 证明全部结束.

参考文献:

[1] J A Bondy, U S R Murty. Graph theory with applications[M]. New York: Macmillan London and Elsevier, 1976.

[2] 刘春房. 若干图类的哈密尔顿性[D].济南:山东师范大学数学系,2005.

(编辑:李晓红)