第 42 卷 第 10 期
Vol.42 No.10

山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
Journal of Shandong University(Natural Science)

2007 年 10 月
Oct. 2007

文章编号:1671-9352(2007)10-0037-04

单圈图和双圈图的动态色数

秦健,张岩
(中国矿业大学 理学院数学系,江苏 徐州 221008)

摘要:在对单圈图的性质进行分析的基础上,证明了单圈图的动态色数是 3 或 4.构造了双圈图的子图 H_1 和 H_2,证明了大部分双圈图的动态色数 $\chi_d(G)=\max\{\chi_d(H_1),\chi_d(H_2)\}$.并给出了一个动态色数不是 $\max\{\chi_d(H_1),\chi_d(H_2)\}$的双圈图.

关键词:单圈图;双圈图;动态染色;色数
中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A

Dynamic chromatic number of unicyclic graphs and bicyclic graphs

QIN Jian, ZHANG Yan
(School of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, Jiangsu, China)

Abstract: The dynamic chromatic number of unicyclic graphs was proved to be 3 or 4 based on the analysis of the property of unicyclic graphs. Then the dynamic chromatic number of most bicyclic graphs was proved to be $\chi_d(G)=\max\{\chi_d(H_1),\chi_d(H_2)\}$ after the subgraphs H_1 and H_2 of bicyclic graphs were structured. Finally, a bicyclic graph, was given whose dynamic chromatic number was not $\max\{\chi_d(H_1),\chi_d(H_2)\}$.

Key words: unicyclic graphs; bicyclic graphs; dynamic coloring; chromatic number

1 预备知识和主要引理

本文研究的是有限、无向且连通的简单图.给定图 G,分别用 $V(G)$、$E(G)$表示 G 的顶点集、边集.对图 G 中任意顶点 v,分别用 $d(v)$、$N(v)$表示 v 的度数、邻点的集合.用 C_n 表示包含 n 个顶点的圈,其余概念见[1].

图 G 的色数$\chi(G)$是指对图 G 的顶点进行染色,使得任意两个相邻的顶点染不同颜色所需要的最少颜色数.G 的动态染色是从顶点集到颜色集的一个映射,且满足下列两个条件:(ⅰ)如果 $uv\in E(G)$,则 $c(u)\neq c(v)$;(ⅱ)对任意的顶点 $v\in V(G)$,$|c(N(v))|\geqslant\min\{2,d(v)\}$.如果用 k 种颜色可以得到图 G 的一个动态染色,则称 G 有一个动态 k-染色(或称 G 是动态 k-可染的).动态色数 $\chi_d(G)$是使得 G 有一个动态 k-染色的最小的 k.

动态染色是在[2]中提出来的.Bruce Montgomer[3]进行了更深入地研究,证明了 $\chi_d(G)\leqslant\Delta+3$,并给出了树、二分图、圈等的动态色数.

设 T 是 $p(p\geqslant3)$阶树,将 T 中某两个不相邻的点用一条新的边连起来,得到的 p 阶含有 p 条边的图称为单圈图[4].或者说,恰含有一个圈的连通图称为单圈图.

双圈图是指边数比顶点数多 1 的简单连通图.

收稿日期:2007-05-12
作者简介:秦健(1982-),男,硕士研究生,主要从事图论方面的研究.Email:zijingdijiu@126.com

本文主要对单圈图和双圈图的动态色数进行研究.

引理 1[3] 设 G 是一个连通的非平凡图,则 $\chi_d(K_2)=2$.除此之外,$\chi_d(G)\geqslant 3$.

引理 2[3] 除了 K_1 和 K_2,任何树的动态色数为 3.

引理 3[3] $\chi_d(C_n)=\begin{cases}5, & n=5\\ 3, & n=3k,\ k\geqslant 1.\\ 4, & \text{其他}\end{cases}$

2 主要结论

单圈图中包含的圈称为单圈图的圈,用 C 表示.与圈 C 相关联的连通分支(包含圈 C 上的相应点,称为附着顶点)称为单圈图的悬挂分支.如果圈 C 的两个附着顶点之间的路上没有其他附着顶点,则我们称这两个附着顶点是靠近的.显然单圈图的任何悬挂分支都是一颗树,故用 T 表示.

单圈图的任意一个悬挂分支 T 上,附着顶点的度是 1.结合引理 2,得到如下结论:

结论 1 悬挂分支 T 是动态 3-可染的,只要适当调整 T 上的颜色,就可以使得:

(1) 附着顶点上的颜色为 3 种颜色中的任意一种 ϕ;

(2) 与附着顶点邻接的顶点上的颜色为 3 种颜色中不同于 ϕ 的任意一种颜色;

(3) T 上的任意顶点满足动态染色的条件.

由上面的分析,可以推知,如果一个单圈图 G 中的圈 C 是动态 k-可染的($k\geqslant 3$),当把 G 上的悬挂分支 T 连接到圈 C 上之后,单圈图 C 仍然是动态 k-可染的.

定理 1 图 G 是一个有悬挂分支的单圈图,G 上的附着顶点按照某一顺序把单圈图上的圈 C 分成若干首尾相连的路,如果长为 $3s+1$ 或 $3s+2$($s=0,1,2,\cdots$)的路的总数为 1,则 $\chi_d(G)=4$;否则,$\chi_d(G)=3$.

证明 设单圈图 G 的圈 C 上的附着顶点按顺时针方向依次为 $u_1,u_2,\cdots u_t$,则圈 C 被分成 t 条首尾相连的路$(u_1,u_2),(u_2,u_3),\cdots,(u_t,u_1)$.下面我们考虑用 3 种颜色对图 G 进行动态染色.

对于任意一条路(u_i,u_j),设该路上异于 u_i 和 u_j 的顶点依次为 $x_1,x_2,\cdots x_m$,则路(u_i,u_j)的长度为 $m+1$.不妨设 $c(u_i)=1,c(x_1)=2$,则根据动态染色的条件,必须用 3 染 x_2,…用 1 染 x_{3n},用 2 染 x_{3n+1},用 3 染 x_{3n+2},直到染完 u_j.这时 $x_1,x_2,\cdots x_m$ 满足动态染色的条件,而 u_i 和 u_j 在图 G 中还有其他邻点,故不一定满足动态染色的条件.

根据上面的染色过程,可以得到以下结论:

(1) 如果路(u_i,u_j)的长为 $3s+1$($s=0,1,2\cdots$),且有一个染色使得这条路上的所有异于 u_i 和 u_j 的顶点都满足动态染色的条件,则 u_i 和 u_j 染的颜色不同,且可以是任意组合;

(2) 如果路(u_i,u_j)的长为 $3s+2$($s=0,1,2\cdots$),且有一个染色使得这条路上的所有异于 u_i 和 u_j 的顶点都满足动态染色的条件,则 u_i 和 u_j 染的颜色不同,且可以是任意组合;

(3) 如果路(u_i,u_j)的长为 $3s+3$($s=0,1,2\cdots$),且有一个染色使得这条路上的异于 u_i 和 u_j 的顶点都满足动态染色的条件,则 u_i 和 u_j 染的颜色相同.

根据以上结论,研究图 G 的动态染色.由于附着顶点在圈上的邻接顶点至少染一种不同于附着顶点的颜色,而根据结论 1,可以通过调整与该附着顶点邻接的悬挂分支上的颜色,使该附着顶点满足动态染色的条件.故在讨论对图 G 进行动态染色时,不需要考虑附着顶点的邻集所用的颜色的数目.

若图中所有的路长都是 $3s+3$($s=0,1,2\cdots$).设 $c(u_1)=1$,则 $c(u_i)=1$($i=1,2,\cdots t$),这时,可以使所有非附着顶点都满足动态染色的条件,只要适当调整悬挂分支的颜色就可以得到图 G 的一个动态 3-染色,根据引理 1 知,$\chi_d(G)=3$.

若图中只有一条路(u_i,u_j)的长为 $3s+1$ 或 $3s+2$($s=0,1,2\cdots$).不妨令 $i=1,j=2$.设 $c(u_1)=1$,根据上面的结论,$c(u_i)=2$ 或 3($i=3,4,\cdots t$).也就是说 $c(u_t)\neq 1$,而(u_t,u_1)的长为 $3s+3$($s=0,1,2\cdots$),根据上面的分析,没有一种染色可以使路(u_t,u_1)上的顶点是满足动态染色的条件且 $c(u_1)\neq c(u_t)$.故 $\chi_d(G)>3$.而只要令 $c(u_t)=4$,就可以得到图 G 的一个动态染色,故 $\chi_d(G)=4$.

若图中有两条或者两条以上的路长为 $3s+1$ 或 $3s+2(s=0,1,2\cdots)$,则在染色过程中,碰到这样的路,就会使该路的下一个附着顶点的颜色与它前面的附着顶点的颜色不同.由于图中含有两条或两条以上这样的路,根据上面的结论,可以通过适当的调整,得到图 G 的动态染色.故图 G 是动态 3-可染的,根据引理 1 知,$\chi_d(G)=3$.

定理得证.

根据上面的定理,可以得到以下简单的推论.方便大家判断单圈图的动态色数.

推论 1　对包含 C_{3n} 的单圈图 G,$\chi_d(G)=3$.

推论 2　对含 C_{3n+1} 或 $C_{3n+2}(n=2,3,4\cdots)$ 单圈图,若只有一个附着顶点,$\chi_d(G)=4$.

下面我们来研究双圈图的动态色数.

记双圈图 G 上的两个圈分别为 C' 和 C''.则 C' 和 C'' 或者有一个公共顶点(记公共顶点为 u),或者有一条路 P 相连(路与 C' 和 C'' 的公共顶点分别记为 u_1 和 u_2),或者有一条公共路 P(P 的始点和终点分别记为 u_1 和 u_2).分别称上面几类图为相交双圈图、无交双圈图和有公共路的双圈图.

对于相交双圈图,选取 C'、C' 上的所有悬挂分支和 C'' 中与 u 关联的一条边构造图 G 的子图 H_1;选取 C''、C'' 上的所有悬挂分支和 C' 中与 u 关联的一条边构造图 G 的子图 H_2.

对于无交双圈图,选取 C'、C' 上的所有悬挂分支和路 P 上与 u_1 关联的一条边构造图 G 的子图 H_1;选取 C''、C'' 上的所有悬挂分支和路 P 上与 u_2 关联的一条边构造图 G 的子图 H_2.

对于有公共路双圈图,如果公共路上有悬挂分支,情况比较复杂,故我们只考虑公共路上没有悬挂分支的情况.选取 C'、C' 上的所有悬挂分支和 C'' 中分别与 u_1 及 u_2 关联且不在 C' 中的一条边构造图 G 的子图 H_1;选取 C''、C'' 上的所有悬挂分支和 C' 中分别与 u_1 及 u_2 关联且不在 C'' 中的一条边构造图 G 的子图 H_2.

根据上面的构造过程,图 H_1 和 H_2 是单圈图.易知,$\chi_d(G)\geqslant\max\{\chi_d(H_1),\chi_d(H_2)\}$.在上面的分析的基础上,给出如下定理.

定理 2　设 H_1 和 H_2 是用上述方法构造的双圈图 G 的子图,则 $\chi_d(G)=\max\{\chi_d(H_1),\chi_d(H_2)\}$.

证明　不妨设 $\chi_d(H_1)\geqslant\chi_d(H_2)$,记 $m=\chi_d(H_1)$.则 $m>3$,图 H_1 和 H_2 是动态 m-可染的.

① 对于相交双圈图,考虑用 m 种颜色进行动态染色.

不妨设 H_1 有一个动态 m-染色,使 $c(u)=1$; H_2 有一个动态 m-染色,使 $c(u)=1$.

若 u 的所有邻点染的颜色数至少为 2,则 $H_1\cup H_2$ 是动态 m-可染的.

若 u 的所有邻点染的颜色相同,设 u 在 C' 中的两个邻点染的颜色为 2,由于 C' 上至少还染了颜色 3,交换 H_1 中的颜色 2 和颜色 3(这样得到的染色仍然是 H_1 的动态染色).这时,$|c(N(u))|=2$.故图 $H_1\cup H_2$ 是 m-可染的.

给 $H_1\cup H_2$ 连上若干分支后,得到图 G.根据前面的分析,连上若干分不影响图 G 的动态色数,故图 G 仍然是动态 m-可染的.

② 对于无交双圈图,考虑用 m 种颜色进行动态染色.

设 H_1 有一个动态 m-染色 ϕ_1,在 ϕ_1 的基础上,给连接 C' 和 C'' 的路上的顶点染色(使其满足动态染色的条件),直到给 u_2 染上颜色 c'.由于图 H_2 是动态 m-可染的,必然存在 H_2 的一个动态染色,使 $c(u_2)=c'$.故 $H_1\cup H_2$ 是 m-可染的,则图 G 仍然是 m-可染的.

③ 对于有公共路且公共路上没有悬挂分支的双圈图,考虑用 m 种颜色进行动态染色.

设 H_1 有一个动态 m-染色 ϕ_2,在 ϕ_2 中,记 $c(u_1)=c_1$,$c(u_2)=c_2$.由于图 H_2 是动态 m-可染的,则必然存在 H_2 的一个动态染色,使 $c(u_1)=c_1$,$c(u_2)=c_2$.故 $H_1\cup H_2$ 是 m-可染的,则图 G 仍然是 m-可染的.

综上,上述几类双圈图 G 都是动态 m-可染的.因为 $\chi_d(G)\geqslant\max\{\chi_d(H_1),\chi_d(H_2)\}=m$,所以 $\chi_d(G)=m=\max\{\chi_d(H_1),\chi_d(H_2)\}$.定理得证.

由定理 1,我们知道单圈图的动态色数是很容易的确定的,而双圈图的色数是依赖于它的两个单圈子图的动态色数的.故可以结合定理 1 和定理 2 来准确得出双圈图的动态色数.

对于有公共路且公共路上有悬挂分支的双圈图,是不能够用定理 2 来判断其动态色数的.下面给出一个

例子来说明.对图1给出的双圈图 G,按照上文给出的构造双圈图的子图的方法,构造出图 G 的两个子图 H_1 和 H_2(见图2,顶点后面给出的是一种染色方案),则图 H_1 和 H_2 的动态色数都是3.

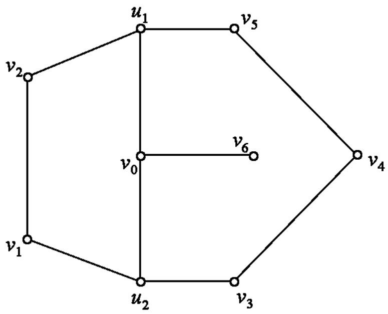

图1 双圈图

Fig.1 A bicyclic graph

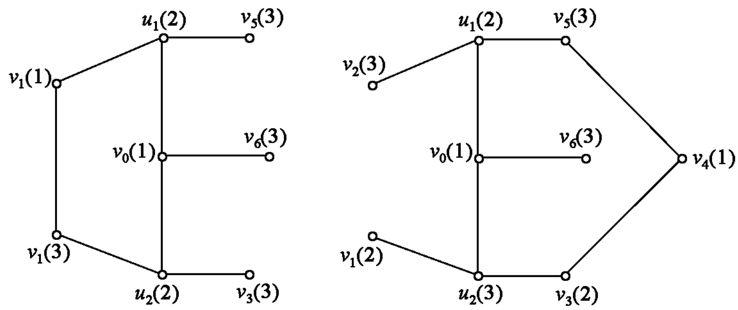

图2 子图 H_1 和 H_2

Fig.2 Subgraphs H_1 and H_2

下面证明图 G 不是动态3-可染的(即图 G 的动态色数不是3).

用反证法,假设图 G 是动态3-可染的,则可以用1染 v_0,若给 u_1 和 u_2 染相同的颜色,不妨染颜色2,则只要用3染 v_6,顶点 v_0 就满足了动态染色的条件.这时根据动态染色的条件,v_3、v_4 和 v_5 都不能染颜色2,且任意两个点不能染相同的颜色.故只用1和3是不能完成图 G 的动态染色的.若给 u_1 和 u_2 染不同的颜色,不妨设分别染2和3.这时根据动态染色的条件,v_1 和 v_2 都不能染颜色2和3的,且两者不能染相同的颜色.故只用颜色1是不能完成图 G 的动态染色的.综上知,图 G 不是动态3-可染的.

可以看出,有公共路且公共路上有悬挂分支的双圈图的动态色数是不能由 $\chi_d(G)=\max\{\chi_d(H_1),\chi_d(H_2)\}$ 确定的.

参考文献:

[1] 邦迪 J A, 默蒂 U S R. 图论及其应用[M].吴望名,李念祖,吴兰芳,等,译.北京:科学出版社,1984.

[2] LAI H J, MONTGOMERY B, Poon H. Upper bound of dynamic chromatic number[J]. Ars Combinatoria, 2003, 68:193-201.

[3] MONTGOMERY B. Dynamic Graph Coloring[D]. Morgantown: West Virginia University, 2001.

[4] 赵新梅, 陈祥恩.单圈图的邻强边染色[J].兰州交通大学学报:自然科学版,2005,24(6):138-140.

(编辑:李晓红)