第42卷 第11期 山东大学学报(理学版) 2007年11月
Vol.42 No.11 Journal of Shandong University(Natural Science) Nov. 2007

文章编号:1671-9352(2007)11-0121-06

Knight 不确定环境下欧式股票期权的最小定价模型

张慧[1,2],聂秀山[3]

(1. 山东大学 经济学院,山东 济南 250100; 2. 山东财政学院 统计与数理学院,山东 济南 250014;
3. 山东财政学院 计算机信息工程学院,山东 济南 250014)

摘要:研究具有 Knight 不确定性的金融市场,假定标的资产(股票)价格过程服从几何布朗运动,建立了欧式期权在一个概率测度集合上的最小定价模型,并借助于倒向随机微分方程(BSDE)的重要理论以及鞅方法求出了该模型的显示表达式;通过研究一个避险参数揭示了 Knight 不确定性对欧式期权定价的影响。

关键词: Knight 不确定性; 几何布朗运动; 倒向随机微分方程(BSDE)

中图分类号: O211.63 **文献标志码:** A

Minimal pricing models of European stock options under Knight uncertainty

ZHANG Hui[1,2], NIE Xiu-shan[3]

(1. School of Economics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China;
2. School of Mathematics and Sciences, Shandong Finance University, Jinan 250014, Shandong, China;
3. School of Computer & Information Engineering, Shandong Finance University, Jinan 250014, Shandong, China)

Abstract: The financial market with Knight uncertainty was studied. Assuming the underlying stock asset follows geometric Brownian motion, the models of minimal pricing of European stock options were made. Moreover, the explicit solutions of the models were given by using the theories of backward stochastic differential equation and the method of martingale. A parameter of escaping risk was studied in order to depict the impact of Knight uncertainty on pricing European stock options.

Key words: Knight uncertainty; geometric Brownian motion; backward stochastic differential equation (BSDE)

0 引言

Black 和 Scholes 于 1973 年在股票价格遵循几何布朗运动的假设下,获得了著名的 Black—Scholes 期权定价公式[1],从此,未定权益的定价成为现代金融数学以及金融工程研究的核心问题,在该领域已有不少研究论文[2-4]。但是,已有文献在研究期权定价时,所考察的金融市场只含有风险,不含有 Knight 不确定性,通过对标的资产(股票)价格过程做一些变化,利用风险中性定价法或鞅方法求出欧式期权定价公式。现实金融市场上的 Knight 不确定性是不容忽视的,可以在美国经济学家 Knigh[5] 的研究中得到体现;而且,Alias 悖论以及 Ellsberg 悖论也强烈指出了研究经济环境中各种不确定性的重要性。于是,很多学者致力于这一方面研究[6-9]。在文献[8]中,Chen Zengjing 和 Larry Epstein 利用 BSDE 的有关理论第一次建立起数学模型,不仅体

收稿日期:2007-04-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671205);山东大学博士后基金资助项目;山东财政学院博士基金资助项目
作者简介:张慧(1973-),女,博士后,副教授,研究方向:金融工程与风险管理.Email:ly19323@sohu.com

现了风险,还体现了不确定性,研究了连续时间的资产定价模型。

本文采用类似文献[8]的思想来研究 Knight 不确定环境下欧式期权的定价,在刻画 Knight 不确定性时,采用一个有无数个概率测度组成的集合,也就是说投资者难以选择用哪个概率测度来对欧式期权进行定价,于是建立了欧式期权在一个概率测度集合上的最小定价模型,并借助于倒向随机微分方程(BSDE)的重要理论以及鞅方法求出了欧式期权最小定价模型的显示表达式,通过研究一个避险参数揭示了 Knight 不确定性对欧式期权定价的影响。

1 模型建立

1.1 欧式期权的定义

(Ω,F,P)是一个完备概率空间,$\{F_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$是由一维标准布朗运动$\{B_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$生成的$\sigma$-域,即 $F_t=\sigma\{B_s;0\leqslant s\leqslant t\}$,且满足通常的假设(完备,单调递增,右连续),令 $F=F_T$。假设市场上有 2 种可交易的资产,一种是无风险债券,利息率为常数 r;另一种是股票,它们的价格过程满足式(1)和式(2):

$$\mathrm{d}P_t=P_tr\mathrm{d}t,\ P_0=1, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}S_t=S_t(\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B_t),\ S_0=s。 \tag{2}$$

其中 r,μ,σ,s 均为常数。由式(1)、(2)可以得到:

$$S_t=s\exp\{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t^Q\},\ 0\leqslant t\leqslant T。 \tag{3}$$

其中 $B_t^Q=\sigma^{-1}(\mu-r)t+B_t$。令 $\zeta=\sigma^{-1}(\mu-r)$,$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}|F_T:=\exp\{-\zeta B_T-\frac{1}{2}\zeta^2T\}$,由 Girsanov 定理知 Q 是与 P 等价的概率测度,并且在 Q 下 $\{B_t^Q\}_{0\leqslant t\leqslant T}$为布朗运动。

对于欧式股票期权,到期日为 T,执行价格为 K 的欧式看涨期权与看跌期权分别为:

$$(S_T-K)^+=\max(S_T-K,0), \tag{4}$$

$$(K-S_T)^+=\max(K-S_T,0)。 \tag{5}$$

1.2 Knight 不确定性以及最小定价模型

为了刻画金融市场上的 Knight 不确定性,首先引入一个可行控制集合:$\Theta=\{(\theta_t)_{0\leqslant t\leqslant T}||\theta_t|\leqslant k,\ \text{a.e.}\ t\in[0,T]\}$,其中 Θ 中的常数 $k>0$。在文献[8]中,Chen Zengjing 把 Θ 称为 k-ignorance。由集合 Θ 生成一个等价概率测度集合:

$$\mathcal{Q}^\theta=\{Q^\theta\left|\frac{\mathrm{d}Q^\theta}{\mathrm{d}Q}\right|_{F_T}:=\exp\{-\int_0^T\theta_s\mathrm{d}B_s^Q-\frac{1}{2}\int_0^T\theta_s^2\mathrm{d}s,\text{其中}(\theta_s)_{0\leqslant s\leqslant t}\in\Theta\}。$$

金融市场上的 Knight 不确定性用集合 $\mathcal{Q}^\theta$来刻画,也就是说,投资者不知道应该用 $\mathcal{Q}^\theta$中的哪个概率测度来对欧式期权进行定价,从保守的角度考虑,投资者会给出欧式期权的最小定价,即

$$C(S_T,K)=\min_{Q^\theta\in\mathcal{Q}^\theta}\{E^{Q^\theta}[\mathrm{e}^{-rT}(S_T-K)^+]\}, \tag{6}$$

$$P(S_T,K)=\min_{Q^\theta\in\mathcal{Q}^\theta}\{E^{Q^\theta}[\mathrm{e}^{-rT}(K-S_T)^+]\}。 \tag{7}$$

2 模型求解

2.1 模型(6),(7) 解的存在惟一性

引理 1 分别存在$(\theta_t^1)_{0\leqslant t\leqslant T}\in\Theta$ 以及$(\theta_t^2)_{0\leqslant t\leqslant T}\in\Theta$ 满足

$$C(S_T,K)=E^{Q^{\theta^1}}[\mathrm{e}^{-rT}(S_T-K)^+],\ P(S_T,K)=E^{Q^{\theta^2}}[\mathrm{e}^{-rT}(K-S_T)^+]。$$

证明 对 $\forall(\theta_s)_{0\leqslant s\leqslant T}\in\Theta$,考察 BSDE(8):

$$\begin{cases}-\mathrm{d}y_t^\theta=-(ry_t^\theta+z_t^\theta\cdot\theta_t)\mathrm{d}t-z_t^\theta\mathrm{d}B_t^Q,\\ y_T^\theta=(S_T-K)^+。\end{cases} \tag{8}$$

由文献[10]知:

$$C(S_T,K)=\min_{\theta\in\Theta}\{y_0^{\theta}\}=\min_{Q^{\theta}\in\mathcal{Q}^{\theta}}\{E^{Q^{\theta}}[\mathrm{e}^{-rT}(S_T-K)^+]\}=E^{Q^{\theta^1}}[\mathrm{e}^{-rT}(S_T-K)^+],$$

其中$(\theta_t^1)_{0\leqslant t\leqslant T}=[k\cdot\mathrm{sgn}(z_t^{\theta^1})]_{0\leqslant t\leqslant T}\in\Theta$，这里的$(y_t^{\theta^1},z_t^{\theta^1})_{0\leqslant t\leqslant T}$是 BSDE(9) 的解。

$$\begin{cases}-\mathrm{d}y_t^{\theta^1}=(-ry_t^{\theta^1}-k\mid z_t^{\theta^1}\mid)\mathrm{d}t-z_t^{\theta^1}\mathrm{d}B_t^Q,\\ y_T^{\theta^1}=(S_T-K)^+。\end{cases}\tag{9}$$

同理，$P(S_T,K)=\min_{\theta\in\Theta}\{y_0^{\theta}\}=\min_{Q^{\theta}\in\mathcal{Q}^{\theta}}\{E^{Q^{\theta}}[\mathrm{e}^{-rT}(K-S_T)^+]\}=E^{Q^{\theta^2}}[\mathrm{e}^{-rT}(K-S_T)^+]$，

其中$(\theta_t^2)_{0\leqslant t\leqslant T}=[k\cdot\mathrm{sgn}(z_t^{\theta^2})]_{0\leqslant t\leqslant T}\in\Theta$，这里的$(y_t^{\theta^2},z_t^{\theta^2})_{0\leqslant t\leqslant T}$是 BSDE(10) 的解。

$$\begin{cases}-\mathrm{d}y_t^{\theta^2}=(-ry_t^{\theta^2}-k\mid z_t^{\theta^2}\mid)\mathrm{d}t-z_t^{\theta^2}\mathrm{d}B_t^Q,\\ y_T^{\theta^2}=(K-S_T)^+。\end{cases}\tag{10}$$

引理 1 得证。

引理 2　假设股票价格方程(2) 中的扩散项系数 $\sigma>0$，则引理 1 中的$(\theta_t^1)_{0\leqslant t\leqslant T}\equiv k$，$(\theta_t^2)_{0\leqslant t\leqslant T}\equiv -k$。因此

$$C(S_T,K)=E^{Q^{(k)}}[\mathrm{e}^{-rT}(S_T-K)^+],\tag{11}$$

$$P(S_T,K)=E^{Q^{(-k)}}[\mathrm{e}^{-rT}(K-S_T)^+]。\tag{12}$$

其中，$\left.\frac{\mathrm{d}Q^{(k)}}{\mathrm{d}Q}\right|_{F_T}:=\exp\{-kB_T^Q-\frac{1}{2}k^2T\}$，$\left.\frac{\mathrm{d}Q^{(-k)}}{\mathrm{d}Q}\right|_{F_T}:=\exp\{kB_T^Q-\frac{1}{2}k^2T\}$。

证明　令函数 $b(t,x):[0,T]\times R\to R$，$\sigma(t,x):[0,T]\times R\to R$ 关于(t,x)连续，并且关于 x 一致 Lipschitz 连续，SDE(13) 存在惟一的强解$\{X_s^{t,x}\}$。

$$\mathrm{d}X_s^{t,x}=b(s,X_s^{t,x})\mathrm{d}s+\sigma(s,X_s^{t,x})\mathrm{d}B_s,\ X_t=x,\ s\in[t,T],\ \forall t\in[0,T]。\tag{13}$$

令 $\Phi(x)$ 是 R 上的连续函数使得 $\Phi(X_T^{t,x})\in L^2(\Omega,F,P)$ 且$(y^{t,x},z^{t,x})$是 BSDE(14) 的解。

$$y_s^{t,x}=\Phi(X_T^{t,x})+\int_s^T g(y_\nu^{t,x},z_\nu^{t,x},\nu)\mathrm{d}\nu-\int_s^T z_\nu^{t,x}\mathrm{d}B_\nu,\ s\in[t,T]。\tag{14}$$

由文献[11]容易得到：如果所有的函数 b,σ,Φ,g 都是光滑的(假设属于 C^3)且导数有界，那么 $z_s^{t,x}=\sigma(s,X_s^{t,x})\partial x(y_s^{t,x})$，$s\in[t,T]$，其中 $\partial x(y_s^{t,x})$ 是 $y_s^{t,x}$ 关于 x 的偏导数。由 SDE 的比较定理和 BSDE 的比较定理不难得到：如果函数 Φ 是单调递增的，那么 $\partial x(y_s^{t,x})\geqslant 0$(具体的证明见参考文献[10])，因此$(z_s^{t,x})_{0\leqslant s\leqslant T}$和$(\sigma(s,X_s^{t,x}))_{0\leqslant s\leqslant T}$的正、负相同；同理，如果函数 Φ 是单调递降的，那么 $\partial x(y_s^{t,x})\leqslant 0$，因此$(z_s^{t,x})_{0\leqslant s\leqslant T}$和$(\sigma(s,X_s^{t,x}))_{0\leqslant s\leqslant T}$的正、负相异。考察 SDE(15) 和 BSDE(16)：

$$\mathrm{d}S_t=S_t(r\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B_t^Q),\ S_0=s,\ \forall t\in[0,T]。\tag{15}$$

$$\begin{cases}-\mathrm{d}y_t^{\theta^1}=(-ry_t^{\theta^1}-k\mid z_t^{\theta^1}\mid)\mathrm{d}t-z_t^{\theta^1}\mathrm{d}B_t^Q,\\ y_T^{\theta^1}=(S_T-K)^+。\end{cases}\tag{16}$$

尽管 BSDE(16) 中的生成元“g”和函数“Φ”不满足文献[11]的要求，由于 BSDE 的解关于生成元“g”和函数“Φ”具有连续依赖性，因此，总可以找到一组光滑函数“g_n”和“Φ_n”，使得“g_n”和“Φ_n”相应地逼近于“g”和“Φ”，详细过程可参阅文献[10]。因此，不妨假设 BSDE(16) 中的生成元“g”和函数“Φ”属于 C^3，由于$(S_T-K)^+$是关于 S_T 单调递增的，所以过程$(z_t^{\theta^1})_{0\leqslant t\leqslant T}$的正、负与 σ 一致；同理，过程$(z_t^{\theta^2})_{0\leqslant t\leqslant T}$的正、负与 σ 相异。由引理 1 可以得到：$(\theta_t^1)_{0\leqslant t\leqslant T}\equiv k$，$(\theta_t^2)_{0\leqslant t\leqslant T}\equiv -k$，引理 2 得证。

2.2　模型(6)、(7) 解的显示表达式

定理　假设股票价格方程(2) 中的扩散项系数 $\sigma>0$，则

$$C(S_T,K)=s\mathrm{e}^{-k\sigma T}N(d_1)-K\mathrm{e}^{-rT}N(d_2)。\tag{17}$$

$$P(S_T,K)=Ke^{-rT}N(-d_4)-se^{k\sigma T}N(-d_3)。\tag{18}$$

其中 $d_2=\dfrac{\ln\dfrac{s}{K}+(r-k\sigma-\dfrac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$，$d_1=d_2+\sigma\sqrt{T}$；$d_4=\dfrac{\ln\dfrac{s}{K}+(r+k\sigma-\dfrac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$，$d_3=d_4+\sigma\sqrt{T}$；$N(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$。

证明 由式(4),(11)可以得到：

$$C(S_T,K)=E^{Q^{(k)}}[e^{-rT}(S_T-K)^+]=E^{Q^{(k)}}[e^{-rT}(S_T-K)1_{\{S_T\geqslant K\}}]=$$
$$e^{-rT}E^{Q^{(k)}}(S_T1_{\{S_T\geqslant K\}})-Ke^{-rT}E^{Q^{(k)}}(1_{\{S_T\geqslant K\}})\triangleq V_1-V_2,$$

下面分别来计算 V_1,V_2。

第一步：

$$V_1=e^{-rT}E^{Q^{(k)}}(S_T1_{\{S_T\geqslant K\}})。\tag{19}$$

由引理2知：过程 $B_t^{Q^{(k)}}=B_t^Q+kt$，$0\leqslant t\leqslant T$ 在概率测度 $Q^{(k)}$ 下为布朗运动，由式(3)得

$$S_t=s\exp\{(r-k\sigma-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t^{Q^{(k)}}\}。\quad 0\leqslant t\leqslant T\tag{20}$$

由式(20)得

$$E^{Q^k}(S_T1_{\{S_T\geqslant K\}})=E^{Q^{(k)}}[s\exp\{(r-k\sigma-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma B_T^{Q^{(k)}}\}1_{\{S_T\geqslant K\}}]。\tag{21}$$

令 $M_t=\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2t+\sigma B_t^{Q^{(k)}})$，$0\leqslant t\leqslant T$，由于过程 $\{M_t\}_{0\leqslant t\leqslant T_1}$ 在概率测度 $Q^{(k)}$ 下为非负指数鞅并且 $E[M_T]=1$，令

$$\left.\frac{d\tilde{Q}}{dQ^{(k)}}\right|_{F_T}:=M_T,\ \tilde{B}_t=B_t^{Q^{(k)}}-\sigma t,\ 0\leqslant t\leqslant T。\tag{22}$$

则 $\tilde{Q}$ 为概率测度，并且过程 $\{\tilde{B}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 在 $\tilde{Q}$ 下为布朗运动。所以式(21)为：

$$E^{Q^{(k)}}(S_T1_{\{S_T\geqslant K\}})=E^{\tilde{Q}}\{s\exp[(r-k\sigma)T]1_{\{S_T\geqslant K\}}\}=s\exp[(r-k\sigma)T]\tilde{Q}\{S_T\geqslant K\}。\tag{23}$$

由式(20),(22)得：$\ln S_T$ 在 $\tilde{Q}$ 下服从正态分布 $N(\ln s+(r-k\sigma+\frac{1}{2}\sigma^2)T,\sigma^2T)$，因此

$$\tilde{Q}\{S_T\geqslant K\}=N\left(\frac{\ln\frac{s}{K}+(r-k\sigma+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)=N(d_1)。\tag{24}$$

把式(24)代入式(23)得

$$E^{Q^{(k)}}(S_T1_{\{S_T\geqslant K\}})=s\exp[(r-k\sigma)T]N(d_1)。\tag{25}$$

所以

$$V_1=e^{-rT}E^{Q^{(k)}}(S_T1_{\{S_T\geqslant K\}})=se^{-k\sigma T}N(d_1)。\tag{26}$$

第二步：

$$V_2=Ke^{-rT}E^{Q^{(k)}}(1_{\{S_T\geqslant K\}})=Ke^{-rT}Q^{(k)}\{S_T\geqslant K\}。\tag{27}$$

类似式(24)得

$$V_2=Ke^{-rT}N\left(\frac{\ln\frac{s}{K}+(r-k\sigma-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)=Ke^{-rT}N(d_2)。\tag{28}$$

由式(26),(28)得：

$$C(S_T,K)=V_1-V_2=se^{-k\sigma T}N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2)。$$

类似可以证明式(18)成立。

4　实证分析：由一个避险参数揭示 Knight 不确定性对欧式期权定价的影响

由模型(6)、(7)容易看出：随着 Knight 不确定性的增大(即随着 k 的增大)，欧式期权的最小定价将变小。下面通过研究一个重要的避险参数与 Knight 不确定性的关系来揭示 Knight 不确定性对欧式期权定价的影响。

Delta ($\frac{\partial C}{\partial s}$ 或 $\frac{\partial P}{\partial s}$)(见文献[12])

结论　它代表当股价变动一个单位时，造成欧式期权价格的变动，以公式表示为

$$\delta_C = \frac{\partial C}{\partial s} = e^{-k\sigma T}N(d_1) > 0;\ \delta_P = \frac{\partial P}{\partial s} = -e^{k\sigma T}N(-d_3) < 0。\tag{29}$$

对于欧式看涨期权，随着股票价格的升高，期权价格将会升高；欧式看跌期权则相反。对于欧式看涨期权，$\frac{\partial \delta_C}{\partial k} < 0$，也就是说，对金融市场上的 Knight 不确定性越模糊，将会导致由于股价的变动，欧式看涨期权价格的变动将会越小；但是，$\frac{\partial \delta_P}{\partial k}$ 的正、负不确定。

证明　因为

$$\delta_C = \frac{\partial C}{\partial s} = e^{-k\sigma T}N(d_1) + e^{-k\sigma T}\cdot s\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\cdot\frac{\partial d_1}{\partial s} - Ke^{-rT}\cdot\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial s}。\tag{30}$$

由文献[12]容易得到，式(30)最后两项相等，相减变成零。所以 $\delta_C = \frac{\partial C}{\partial s} = e^{-k\sigma T}N(d_1) > 0$。

类似得到 $\delta_P = \frac{\partial P}{\partial s} = -e^{k\sigma T}N(-d_3) < 0$。

显然$\frac{\partial \delta_C}{\partial k} = -\sigma Te^{-k\sigma T}\cdot N(d_1) + e^{-k\sigma T}\cdot n(d_1)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{T}}) < 0$，其中 $n(d_1) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}$。 $\frac{\partial \delta_P}{\partial k} = -\sigma Te^{k\sigma T}\cdot N(-d_3) + e^{k\sigma T}\cdot n(-d_3)\cdot\frac{1}{\sqrt{T}}$，$\frac{\partial \delta_P}{\partial k}$ 的正、负不确定。

下面通过给出各参数的值以及数值计算的例子来说明欧式期权的价格和股票初始价格以及 Knight 不确定性的关系。

参数假设　期权的执行价格 $K = 50$ 元，所标股票的初始价格 $s \in [50,60]$(单位：元)，无风险利率 $r = 5\%$，股票波动率 $\sigma = 40\%$，交割期限 $T = 3$ 年，Knight 不确定性参数 $k \in [0,1]$。

针对以上参数，在 Matlab 6.5 平台下，验证以上结论，得到图 1 ~ 图 4 的结果。

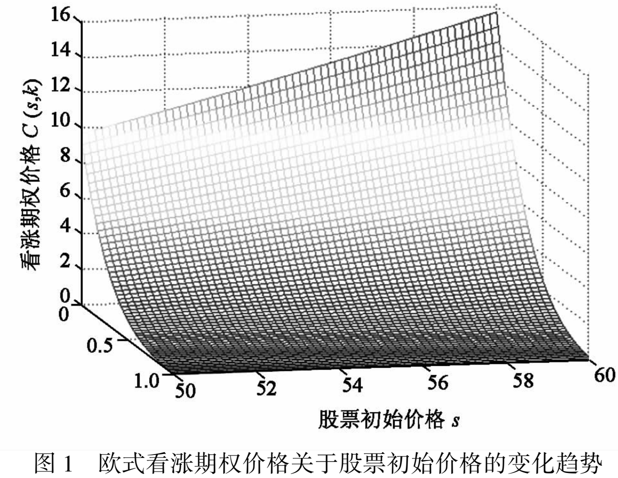

图 1　欧式看涨期权价格关于股票初始价格的变化趋势
Fig.1　Trend of change in European Call Option on stocks' initial price

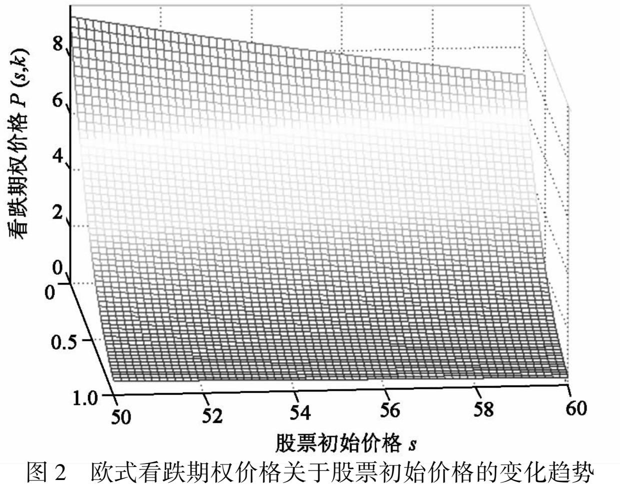

图 2　欧式看跌期权价格关于股票初始价格的变化趋势
Fig.2　Trend of change in European Put Option on stocks' initial price

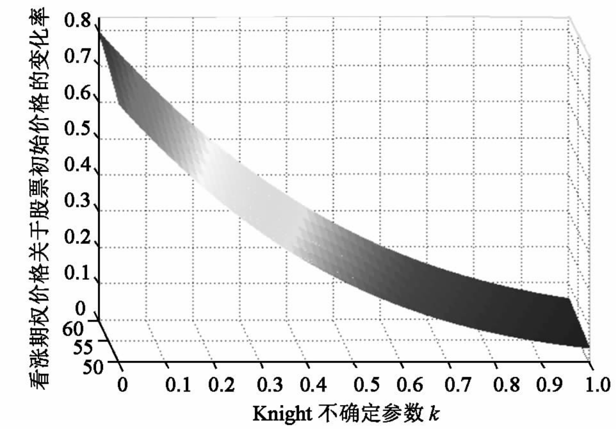

图3 欧式看涨期权关于股票初始价格的变化率 δ_C 与 Knight 不确定参数 k 的关系

Fig.3 Relationship between the change rate of European Call Option on stocks' initial price and Knight uncertainty parameter

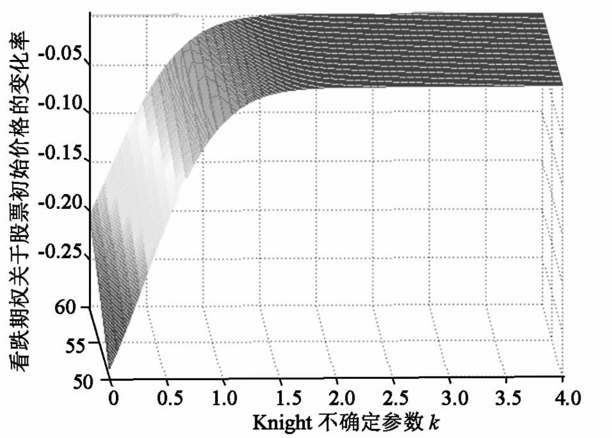

图4 欧式看跌期权关于股票初始价格的变化率 δ_P 与 Knight 不确定参数 k 的关系

Fig.4 Relationship between the change rate of European Put Option on stocks' initial price and Knight uncertainty parameter

由图1可以看出,欧式看涨期权价格 $C(S_T,K)$随着股票初始价格的增高而增高;由图2可以看出,欧式看跌期权价格 $P(S_T,K)$随着股票初始价格的增高而降低。同时由图1和图2可以看出 Knight 不确定性参数 k 越大,期权的定价越趋于稳定。由图3可以看出 Knight 不确定性越大,将会导致由于股价的变动,欧式看涨期权价格的变动将会越小;由图4可以看出 Knight 不确定性越大,欧式看跌期权关于股票初始价格的变化率将趋于稳定。

致谢:感谢陈增敬教授的指导和帮助!

参考文献:

[1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3):637-654 .
[2] 薛红,彭玉成. 鞅在未定权益定价中的应用[J]. 工程数学学报, 2000, 17(3): 135-138.
[3] 闫海峰,刘三阳. 带有 Poisson 跳的股票价格模型的期权定价[J]. 工程数学学报, 2003, 20(2):35-40.
[4] 闫海峰,刘三阳, 李文强. 股票价格遵循指数 O-U 过程的最大值期权定价 [J]. 工程数学学报, 2004,21(3):397-402.
[5] Knight Frank. Risk, Uncertainty and profit[M]. Boston: Houghton Mifflin, 1921.
[6] Dixit Avinash, Robert Pindyck. Investment under uncertainty[M]. Princeton: Princeton University Press,1994.
[7] Ghirardato Paolo, Massimo Marinacci. Ambiguity made precise: a comparative foundation[J]. Journal of Economic Theory, 2002, 102: 251-289.
[8] CHEN Zengjing, Larry Epstein. Ambiguity, Risk, and Asset Returns in continuous Time[J]. Econometrica, 2002, 70:1403-1443.
[9] Kiyohiko G Nishimura, Hiroyuki Ozaki. Irreversible investment and Knightian uncertainty[J]. ISER Seminar Series, 2003.
[10] 张慧. 条件 g-期望与相关风险测度[J]. 山东大学学报:理学版, 2005, 40(3):34-40.
[11] PARDOUX E, PENG S. Backward doubly stochastic differential equation and quasi-linear PDEs[J]. Lecture Notes in CIS, Springer-verlag, 1992, 176:200-217.
[12] 陈松男. 金融工程学[M]. 复旦大学出版社, 2002.

(编辑:孙培芹)