第 42 卷 第 4 期
Vol.42 No.4

山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY

2007 年 4 月
Apr. 2007

文章编号:1671-9352(2007)04-0024-04

Halin 图的有点面约束的边染色

马巧灵[1,2],单 伟[2],吴建良[1]

(1. 山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100; 2. 济南大学 理学院, 山东 济南 250022)

摘要:研究了 Halin 图的有点面约束的边染色,给出了 Halin 图的有点面约束的边染色色数的一个精确结果.

关键词:Halin 图;有点面约束的边染色;平面图

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

Edge coloring with restriction of vertices and faces on Halin graphs

MA Qiao-ling[1,2], SHAN Wei[2] and WU Jian-liang[1]

(1. School of Math. and System Sci., Shandong Univ., Jinan 250100, Shandong, China;
2. School of Science, Jinan Univ., Jinan 250022, Shandong, China)

Abstract: The edge coloring of Halin graph with restriction of vertices and faces is studied. A precise result of $\chi_{e/vf}(G)$ for Halin graph G is obtained.

Key words: Halin graph; edge coloring with restriction of vertices and faces; planar graph

0 引言

本文讨论的图 $G=(V(G),E(G))$均为有限无向简单图.$V(G)$,$E(G)$分别为图 G 的点集和边集.若图 G 中两点之间有边相连,则称这两点相邻.$N(u)$表示 G 中与点 u 相邻的点的集合, 用 $d_G(u)=|N(u)|$表示点 u 的度,Δ 和 δ 分别表示图 G 的最大度与最小度.一个图 G,如果可以将它画在平面上,使它的边仅在端点处相交,则称图 G 是可平面图.图的这种平面上的画法称为图 G 的平面嵌入,或简称为平面图.用 f 表示平面图 G 的面,$b(f)$表示面 f 的边界,称面 f 与它的边界上的顶点和边是关联的.面 f 的度 $d_G(f)$是指和它关联的边的条数(即:$b(f)$中边的条数).当两个面有公共边时称其相邻.一个平面图 G,如果它所有的顶点都在无界面的边界上,则称图 G 为外平面图.其它未定义的符号见[1].

平面图 G 的有点面约束的边染色是指对 G 的边进行染色,使得关联同一点的边染不同颜色且在同一面上的边也有不同的颜色,称使图 G 可进行有点面约束的边染色所需最小的颜色数为图 G 的有点面约束的边色数,简称双(约束)边色数,记为 $\chi_{e/vf}(G)$.Borodin 和 Woodall 首先提出了有点面约束的边染色的概念,并研究了外平面图的有点面约束的边染色,得到下面的结论.

定理 0.1[2] 设图 G 是 2-连通的外平面图,$F_{ext}(G)$为外部面的度,则 $F_{ext}(G)\leq\chi_{e/vf}(G)\leq F_{ext}(G)+1$,且 $\chi_{e/vf}(G)=F_{ext}(G)+1$ 当且仅当图 G 恰好是由一个圈加上一条对角线构成.

Halin 图在平面图的染色中是一个重要的图类,很多学者都研究过 Halin 图的各种染色[3~5].本文主要讨论了 Halin 图的有点面约束的边染色,证明了外部面度为 $F_{ext}(G)$的 Halin 图有,$F_{ext}(G)\leq\chi_{e/vf}(G)\leq F_{ext}(G)+$

收稿日期:2006-09-25
基金项目:山东省自然科学基金资助项目(Y2003A01);济南大学科技基金资助项目(Y0625)
作者简介:马巧灵(1968-),女,讲师,主要从事图论方面的研究.

1,且 $\chi_{e/vf}(G)=F_{ext}(G)+1$ 当且仅当图 G 同构于图 H(见图 1).

图 1　具有 6 个点的 3-正则 Halin 图 H

Fig.1　3-regular Halin graph H with 6 vertices

1　Halin 图的结构性质

定义 1.1[6]　设 G 图是 3-连通平面图,f_0 是 G 的外部面,如果 $\delta(G)\geq 3$,且 G 去掉 f_0 的边界上的边之后是一棵树,则称 G 为 Halin 图.

为方便讨论,称除了 f_0 的其它面为内部面,在 f_0 上的点为外点,其它点为内点.轮图是恰好有惟一内点的一类特殊的 Halin 图.首先给出关于 Halin 图的结构引理.

引理 1.1[5]　设 G 是 Halin 图且不是轮图,则有

(1) 图 G 的外部面上的点的度均为 3.

(2) 图 G 的任意两个相邻的内部面有且仅有一条公共边;任意一个内部面都和外部面有且仅有一条公共边.

(3) 在 G 中必存在一个内点 w 与惟一的内点 u 相邻,即可设 $N(w)=\{u,v_1,\cdots v_m\}$ 其中 $m\geq 2$,且满足 $N(w)\cap V(f_0)=\{v_1,\cdots v_m\}$ 且 v_1 和 v_m 的邻点分别为 $N(v_1)=\{u_1,v_2,w\}$ 和 $N(v_m)=\{u_2,v_{m-1},w\}$,其中 u_1 和 u_2 是外部面上的两个点.

根据引理 1.1,令 $G_0=G-\{v_1,\cdots v_m\}+\{u_1w,u_2w\}$,则 G_0 仍是一个 Halin 图且 G_0 的内点数比 G 的内点数少 1.

引理 1.2　设 G 是 Halin 图,则 G 的最大面度必在外部面上达到且 $F_{ext}(G)\geq\Delta(G)$.

证明　为讨论方便,不妨设 f' 是图 G 的内部面中度最大的一个面.记 $d_G(f')=k$,即 $b(f')=\{e_1,e_2,\cdots e_k\}$,且 $b(f')\cap b(f_0)=e_k$,则 $e_i(i=1,2,\cdots k-1)$ 分别是图 G 的内部面 $f_i(i=1,2,\cdots k-1)$ 和 f' 的公共邻边,而 $f',f_i(i=1,2,\cdots k-1)$ 又分别和外部面 f_0 各有一条邻边.因此,$\{e_1,e_2,\cdots e_{k-1}\}$ 中的每一条边都和外部面上的一条边对应,且不同的边对应的外部边不同,所以可知 $F_{ext}(G)=d_G(f_0)\geq k$.即 Halin 图 G 的最大面度必在外部面上达到.

设 u 是图 G 的内点,且 $d(u)=\Delta\geq 3$.因为在 Halin 图中外部面上点的个数等于外部面上边的个数.令 $T=G-E(f_0)$,即 T 是 G 去掉 f_0 的边界上的边得到的树.显然树 T 的叶子点的个数恰好为 $F_{ext}(G)$,根据树的顶点度与边数的关系可得:

$$F_{ext}(G)+\Delta+2(n-F_{ext}(G)-1)\leq 2(n-1).$$

即有 $F_{ext}(G)\geq\Delta(G)$,引理得证.

引理 1.3　设 $W_{n+1}(n\geq 3)$ 是轮图,则 $\chi_{e/vf}(W_{n+1})=n$.

证明　设 v_0 是轮图 W_{n+1} 的内点,$V(f_0)=\{v_1,v_2,\cdots v_n\}$,对 W_{n+1} 的边染色如下:

边 v_0v_i 染 i 色$(i=1,2,\cdots n)$;边 $v_{i+1}v_{i+2}$ 染 i 色$(i=1,2,\cdots n-2)$,且 v_nv_1 染 $n-1$ 色,边 v_1v_2 染 n 色.显然这是一个有点面约束的边染色,因此 $\chi_{e/vf}(W_{n+1})=n$.

2　Halin 图的有点面约束的染色

定理 2.1　设 G 是 Halin 图,$F_{ext}(G)$ 为外部面的度,则 $F_{ext}(G)\leq\chi_{e/vf}(G)\leq F_{ext}(G)+1$,且 $\chi_{e/vf}(G)=$

$F_{ext}(G)+1$ 当且仅当图 G 同构于图 H.

证明　对 G 的内点数 $|V_I|$ 用归纳法证明.

若 $|V_I|=1$,则 G 是轮图,由引理 1.3,有 $\chi_{e/vf}(W_{n+1})=n=F_{ext}(G)$,结论成立.

显然,当图 G 同构于图 H 时,易知 $\chi_{e/vf}(G)=5=F_{ext}(G)=1$.下面假设对所有内点数 $|V_I|=p$ 的且不同构于 H 的 Halin 图结论成立,设 G 是一个内点数为 $p\geq 2$ 的不同构于 H 的 Halin 图.显然 G 不是轮图,且其内部面的个数大于 4.由引理 1.1 知,在图 G 中必存在一个内点 w 与惟一的内点 u 相邻,可设其邻点集为 $N(w)=\{u,v_1,\cdots v_m\}$ 其中 $m\geq 2$,且满足 $N(w)\cap V(f_0)=\{v_1,\cdots v_m\}$.设 v_1 和 v_m 的邻点分别为 $N(v_1)=\{u_1,v_2,w\}$ 和 $N(v_m)=\{u_2,v_{m-1},w\}$,其中 u_1 和 u_2 是外部面上的两个点.显然 $G_0=G-\{v_1,\cdots v_m\}+\{u_1w,u_2w\}$ 仍是一个 Halin 图且 G_0 的内点数比 G 少 1.

下面分两种情况讨论:

(1) 若 G_0 不同构于 H,由归纳假设知,$\chi_{e/vf}(G_0)=F_{ext}(G_0)$,下面分三种情形讨论.

情形 1.1　点 w 恰好有两个外部邻点,即 $m=2$ 时(如图 2-a).

设 f_1 是以边 $uw,wv_1,v_1u_1,\cdots$ 为边界的内部面,f_2 是以边 $uw,wv_2,v_2u_2,\cdots$ 为边界的内部面,f_0 是 G 的外部面.

论断 1　图 G 的内部面中,至多有两个内部面和 f_1,f_2 都相邻.

证明　因为 G 是内点数至少为 2 的且不同构于 H 的 Halin 图.所以图 G 中至少含有 5 个内部面.假设论断不成立,不妨设 f_3,f_4,f_5 与 f_1,f_2 都相邻.根据引理 1.1 知,在 Halin 图 G 中,外部面 f_0 与每一个内部面都相邻且只有一条公共边.于是在图 G 的对偶图 G^* 中必然含有子图 H'(如图 2-b),显然 H' 中含有子图 $K_{3,3}$,所以 G^* 不是平面图.又因为平面图的对偶图都是平面图,这与图 G 是平面图矛盾.所以论断成立.

图 2-a
Fig.2-a

图 2-b　图 H'
Fig.2-b　Graph H'

论断 2　图 G 中,内部面 f_1,f_2 的度至少有一个不大于 $F_{ext}(G)-1$.

证明　由论断 1 知,在图 G 中必然至少有一个内部面和 f_1,f_2 不同时相邻,不妨设内部面 f_5 与 f_2 相邻,与 f_1 不相邻.根据引理 1.1,面 f_1 边界上的每一条边都分别通过其所在的不同于 f_1 的面对应着外部面 f_0 上的一条边,这些(与面 f_1 上的边对应的)外部面上的边集记为 E_0^1.因为面 f_5 与 f_1 不相邻,令 $e_0=E(f_5)\cap E(f_0)$,显然有 $e_0\notin E_0^1$,所以有 $|E_0^1|=d(f_1)\leq F_{ext}(G)-1$,论断成立.

根据归纳假设知,G_0 的双边色数为 $\chi_{e/vf}(G_0)=F_{ext}(G_0)=F_{ext}(G)-1$.下面再添加一种新的颜色 γ 把 G_0 的这个有点面约束的边染色扩展成图 G 的有点面约束的边染色.为讨论方便记 $\sigma(e)$ 表示边 e 染的颜色.设在图 G_0 中 $\sigma(wu_1)=\alpha,\sigma(wu_2)=\beta$.

由论断 2,可设 $d(f_1)\leq F_{ext}(G)-1$.在面 f_1 边界上,除了边 wv_1,u_1v_1 外,其余各边在 G_0 中都已染色,且至多用了 $F_{ext}(G)-2$ 种颜色,不妨设 η 是 $F_{ext}(G)-1$ 种颜色中未在 f_1 的边界上出现的一种颜色.于是可以对边 $wv_1,wv_2,v_1v_2,u_1v_1,u_2v_2$ 进行如下染色,即令 $\sigma(wv_1)=\eta,\sigma(wv_2)=\gamma,\sigma(v_1v_2)=\alpha,\sigma(u_2v_2)=\beta,\sigma(u_1v_1)=\gamma$.其余的边染的颜色保持不变,显然,这是 G 的一个有点面约束的边染色.所以 $\chi_{e/vf}(G)=F_{ext}(G)$.

情形 1.2　点 w 恰有三个外部邻点,即 $m=3$ 时.

令 $G_0 = G - \{v_1, v_2, v_3\} + \{u_1w, u_2w\}$,根据归纳假设知,$G_0$ 的有点面约束的色数为 $\chi_{e/vf}(G_0) = F_{ext}(G_0) = F_{ext}(G) - 2$.下面再添加种新的颜色$\{\gamma_1, \gamma_2\}$把 G_0 的这个有点面约束的边染色扩展成图 G 的有点面约束的边染色.设在图 G_0 中 $\sigma(wu_1) = \alpha, \sigma(wu_2) = \beta$.于是可以对边 $u_1v_1, u_2v_3, wv_i(i=1,2,3)$及 v_1v_2, v_2v_3 进行如下染色,即令 $\sigma(u_1v_1) = \alpha, \sigma(v_iv_{i+1}) = \gamma_i(i=1,2)\sigma(wv_1) = \gamma_2, \sigma(wv_3) = \gamma_1, \sigma(wv_2) = \alpha$, $\sigma(u_2v_3) = \beta$.其余的边染的颜色保持不变,容易验证这是 G 的一个有点面约束的边染色.所以 $\chi_{e/vf}(G) = F_{ext}(G)$.

情形 1.3 点 w 至少有四个外部邻点,即 $m \geq 4$ 时.

类似地,令 $G_0 = G - \{v_1, \cdots v_m\} + \{u_1w, u_2w\}$,根据归纳假设知,$G_0$ 的有点面约束的色数为 $\chi_{e/vf}(G_0) = F_{ext}(G_0) = F_{ext}(G) - m + 1$.下面再添加 $m-1$ 种新的颜色$\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_{m-1}\}$把 G_0 的这个有点面约束的边染色扩展成图 G 的有点面约束的边染色.设在图 G_0 中 $\sigma(wu_1) = \alpha, \sigma(wu_2) = \beta$,.于是可以对边 u_1v_1, u_2v_m, $wv_i(i=1,2,\cdots m)$及 $v_iv_{i+1}(i=1,2,\cdots m-1)$进行如下染色,即令 $\sigma(u_1v_1) = \alpha, \sigma(v_iv_{i+1}) = \gamma_i(i=1,2,\cdots m-1)$, $\sigma(u_2v_m) = \beta$,而 $\sigma(wv_1) = \gamma_{m-1}, \sigma(wv_2) = \alpha, \sigma(wv_{i+2}) = \gamma_i(i=1,2,\cdots m-2)$,其余的边染的颜色保持不变.这是 G 的一个有点面约束的边染色.所以 $\chi_{e/vf}(G) = F_{ext}(G)$.

(2) 若 G_0 同构于 H,下面分两种情形讨论

情形 2.1 点 w 恰好有两个外部邻点 v_1, v_2,即 $m=2$(如图 3-a).

显然 $\chi_{e/vf}(G) = 5 = F_{ext}(G)$

情形 2.2 点 w 有 m 个外部邻点($m \geq 3$),如图 3-b.

图 3-a
Fig.3-a

图 3-b
Fig.3-b

构造 $G' = G - \{y, u_2\} + \{xu_1, xv_m\}$,显然 G'不同构于 H,且 G'是内点数比 G 的内点数少 1 的 Halin 图.类似情形 1.2 和情形 1.3 的证明可得:$\chi_{e/vf}(G) = F_{ext}(G)$.

综上所述,定理得证.

参考文献:

[1] J A Bondy, U S R Murty. Graph theory with applications[M]. New York: Macmillan, 1976.

[2] O V Borodin, D R Woodall. Thirteen coloring numbers for outerplane graphs[J]. Bull Inst Combin Appl, 1995, 14:87~100.

[3] Zhang Zhongfu, Wang Jianfang, Wang Weifan, et al. The complete chromatic number of some planar graphs[J]. Scientia Sinica (Series A), 1993, 4:363~368.

[4] 朱美琳,刘家壮.Halin 图的圈染色 [J]. 山东大学学报(自然科学版), 1999, 4:398~404.

[5] Zhang Zhongfu, Liu Xinzhong. On the complete chromatic number of Halin graphs[J]. Acata Math Appl Sinica, 1990, 13:102~106.

[6] R Halin. Studies on minimally n-connected graph[A]. Comb Math And Applications[C]. London: Academic Press, 1971. 129~136.

(编辑:李晓红)