第 43 卷　第 2 期
Vol.43　No.2
山　东　大　学　学　报　（理　学　版）
Journal of Shandong University(Natural Science)
2008 年 2 月
Feb. 2008

文章编号:1671-9352(2008)02-0062-04

一类上三角矩阵环的 Armendariz 与半交换性质

王文康
（西北民族大学计算机科学与信息工程学院，甘肃 兰州 730124）

摘要: 称环 R 是 Armendariz 环，如果$(\sum_{i=0}^{m}a_ix^i)(\sum_{j=0}^{n}b_jx^j)=0\in R[x]$，那么 $a_ib_j=0$,其中 $0\leqslant i\leqslant m$，$0\leqslant j\leqslant n$。称环 R 是 reduced 环,如果它没有非零的幂零元。称环 R 是半交换环，如果由 $ab=0$,可得 $aRb=0$,其中 $a,b\in R$。找到了 reduced 环上的上三角矩阵环的一类子环既是 Armendariz 环又是半交换环。

关键词: Armendariz 环；reduced 环；上三角矩阵环；半交换环
中图文分类号: O153.3　　**文献标志码:** A

Armendariz and semicommutative properties of a class of upper triangular matrix rings

WANG Wen-kang
(School of Computer Science and Information Engineering, Northwest University for Nationalities, Lanzhou 730124, Gansu, China)

Abstract: A ring R is called Armendariz, if $(\sum_{i=0}^{m}a_ix^i)(\sum_{j=0}^{n}b_jx^j)=0\in R[x]$, then $a_ib_j=0$, where $0\leqslant i\leqslant m$, $0\leqslant j\leqslant n$. A ring R is called semicommutative if for any a, $b\in R$, $ab=0$ implies $aRb=0$. A ring is called reduced if it has no non-zero nilpotent elements. Every reduced ring is semicommutative. A class of upper triangular matrix rings over-reduced rings is found to be both Armendariz and semicommutative.

Key words: Armendariz ring; reduced ring; upper triangular matrix ring; semicommutative ring

文中 R 表示有单位元的结合环,环 R 上的多项式环记为 $R[x]$。称环 R 是 reduced 环，如果它没有非零的幂零元．在 Bare 环的研究中，Armendariz 注意到 reduced 环 R 满足这样的性质[1]：如果$(\sum_{i=0}^{m}a_ix^i)(\sum_{j=0}^{n}b_jx^j)=0\in R[x]$，那么 $a_ib_j=0$,其中 $0\leqslant i\leqslant m$，$0\leqslant j\leqslant n$。在[2]中，Rege 和 Chhawchharia 称具有这种性质的环为 Armendariz 环。称环 R 是半交换环，如果由 $ab=0$，可得 $aRb=0$,其中 a，$b\in R$。reduced 环是半交换环。

文献[3]证明了 reduced 环 R 上的上三角矩阵环

$$R_n=\left\{\begin{pmatrix} a_0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_0\end{pmatrix} \mid a_0,\ a_{ij}\in R\right\},$$

在 $n\leqslant 3$ 时是 Armendariz 环,而在 $n\geqslant 4$ 时,不是 Armendariz 环。文献[4]证明了 R_n 在 $n\leqslant 3$ 时是半交换环,而在 $n\geqslant 4$ 时，不是半交换环。本文找出并证明了 R_n 的一类子环 $W_n^{pq}(R)$既是 Armendariz 环又是半交换环，从而推广了[3,4]的结论。

下面给出本文中使用的一些记号。用 $M_n(R)$和 $T_n(R)$分别表示环 R 上的 $n\times n$ 阶矩阵环和上三角矩阵环，用 I_n 表示 $n\times n$ 阶单位矩阵。

收稿日期: 2007-07-03
作者简介: 王文康(1964-　),女,副教授,研究方向为代数学.Email:jswwk@xbmu.edu.cn

1 主要结果

按照[5], 对于 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j}),\boldsymbol{B}=(b_{i,j})\in M_n(R)$,用 $[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}]_{i,j}=0$ 表示 $a_{i,l}b_{l,j}=0$,其中 $l=1,\cdots,n$。把 $M_n(R)[x]$和 $M_n(R[x])$看成一样的。

引理 1.1[5] 对于 $\alpha(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}\boldsymbol{A}_i x^i$, $\beta(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}\boldsymbol{B}_j x^j\in M_n(R)[x]$,设 $f_{i,j}=\sum\limits_{s=0}^{m}a_{i,j}^{(s)}x^s$, $g_{i,j}=\sum\limits_{t=0}^{m}b_{i,j}^{(t)}x^t$, 其中 $a_{i,j}^{(l)}$和 $b_{i,j}^{(l)}$分别是 $\boldsymbol{A}_l$ 和 $\boldsymbol{B}_l$ 的第 i 行第列 j 的值, $l=0,1,\cdots,m$。所以 $\alpha(x)=(f_{i,j}),\beta(x)=(g_{i,j})\in M_n(R[x])$。如果 R 是 Armendariz 环, 且$[\alpha(x)\cdot\beta(x)]_{i,j}=0$, 那么 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j=0$,其中 $1\leqslant i$, $j\leqslant n$。

引理 1.2 如果 R 是一个 reduced 环, 那么 $R[x]$也是 reduced 环。

对于 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant n$, 记 $W_n^{p,q}(R)=$

$$\left\{\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,p} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,q} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & \cdots & 0 & a_{2,p} & 0 & \cdots & 0 & a_{2,q} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_{p-1,p} & 0 & \cdots & 0 & a_{p-1,q} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_{p,q} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{q-1,q} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \middle| \; a_0, a_{ij}\in R\right\}。$$

引理 1.3 设 R 是 reduced 环。如果 $\boldsymbol{AB}=0$, 那么$[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}]_{i,j}=0$, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in W_n^{p,q}(R)$, $1\leqslant i$, $j\leqslant n$。

证明 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,p} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,q} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & \cdots & 0 & a_{2,p} & 0 & \cdots & 0 & a_{2,q} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_{p-1,p} & 0 & \cdots & 0 & a_{p-1,q} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_{p,q} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{q-1,q} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,p} & 0 & \cdots & 0 & b_{1,q} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_0 & \cdots & 0 & b_{2,p} & 0 & \cdots & 0 & b_{2,q} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_{p-1,p} & 0 & \cdots & 0 & b_{p-1,q} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & b_{p,q} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{q-1,q} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix}\in W_n^{p,q}(R),\text{满足}$$

$\boldsymbol{AB}=0$。因此有

$$a_0b_0=0, \tag{1}$$

$$a_0b_{1,p}+a_{1,p}b_0=0, \tag{2}$$

$$a_0 b_{2,p} + a_{2,p} b_0 = 0, \tag{3}$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$a_0 b_{p-1,p} + a_{p-1,p} b_0 = 0, \tag{4}$$
$$a_0 b_{1,q} + a_{1,p} b_{p,q} + a_{1,q} b_0 = 0, \tag{5}$$
$$a_0 b_{2,q} + a_{2,p} b_{p,q} + a_{2,q} b_0 = 0, \tag{6}$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$a_0 b_{p-1,q} + a_{p-1,p} b_{p,q} + a_{p-1,q} b_0 = 0, \tag{7}$$
$$a_0 b_{p,q} + a_{p,q} b_0 = 0, \tag{8}$$
$$a_0 b_{p+1,q} + a_{p+1,q} b_0 = 0, \tag{9}$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$a_0 b_{q-1,q} + a_{q-1,q} b_0 = 0。 \tag{10}$$

因 R 是一个 reduced 环，由式(1)得，$b_0 a_0 = 0$。给 (2) $\times\ a_0$ 得，$a_0 b_{1,p} a_0 = 0$,又因 R 是 reduced 环，所以 $a_0 b_{1,p} = 0$，因此 $a_{1,p} b_0 = 0$。因 R 是一个 reduced 环，所以 $b_0 a_{1,p} = 0$。同理由式(2) ~ (4)和(8) ~ (10)可得，对 $2 \leqslant k \leqslant p-1$，有 $a_0 b_{k,p} = 0$，$a_{k,p} b_0 = 0$. 对 $p \leqslant s \leqslant q-1$，有 $a_0 b_{s,q} = 0$，$a_{s,q} b_0 = 0$。又由 R 是 reduced 环得，对 $p \leqslant s \leqslant q-1$，有 $b_{s,q} a_0 = 0$。给(5) $\times\ a_0$ 得，$a_0 b_{1,q} a_0 = 0$，所以 $a_0 b_{1,q} = 0$，因此式(5)变为：

$$a_{1,p} b_{p,q} + a_{1,q} b_0 = 0, \tag{5'}$$

给(5)′ $\times\ a_{1,p}$ 得，$a_{1,p} b_{p,q} a_{1,p} = 0$,所以 $a_{1,p} b_{p,q} = 0$，因此 $a_{1,q} b_0 = 0$。同理由式(6)，(7)可得，对 $2 \leqslant k \leqslant p-1$，有 $a_0 b_{k,q} = 0$，$a_{k,p} b_{p,q} = 0$，$a_{k,q} b_0 = 0$。

综上所述，对所有的 i,j,有$[\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}]_{i,j} = 0$。

定理 1.1　设 R 是 reduced 环。则当 $n \geqslant 2$ 时，$W_n^{p,q}(R)$是 Armendariz 环。

证明　显然 $W_n^{p,q}(R)$是环。设 $\alpha(x) = \sum\limits_{i=0}^{u} \boldsymbol{A}_i x^i = (f_{i,j})$，$\beta(x) = \sum\limits_{j=0}^{v} \boldsymbol{B}_j x^j = (g_{i,j}) \in W_n^{p,q}(R)[x]$，满足 $\alpha(x)\beta(x) = 0$。那么 $f_{i,j}$，$g_{i,j} \in R[x]$,且$(f_{i,j})(g_{i,j}) = 0$。由引理 1.1，引理 1.2 和引理 1.3，可得 $W_n^{p,q}(R)$ 是 Armendariz 环。

定理 1.2　设 R 是 reduced 环。则当 $n \geqslant 3$ 时，$W_n^{p,q}(R)$是半交换环。

证明　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & & 0 & a_{1,p} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,q} & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & \cdots & 0 & a_{2,p} & 0 & \cdots & 0 & a_{2,q} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_{p-1,p} & 0 & \cdots & 0 & a_{p-1,q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_{p,q} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{q-1,q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,p} & 0 & \cdots & 0 & b_{1,q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & 0 & b_{2,p} & 0 & \cdots & 0 & b_{2,q} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_{p-1,p} & 0 & \cdots & 0 & b_{p-1,q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & b_{p,q} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{q-1,q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \in W_n^{p,q}(R)$，满足 $\boldsymbol{AB} = 0$。再设

$$
\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}
c_0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,p} & 0 & \cdots & 0 & c_{1,q} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & c_0 & \cdots & 0 & c_{2,p} & 0 & \cdots & 0 & c_{2,q} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & c_0 & c_{p-1,p} & 0 & \cdots & 0 & c_{p-1,q} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 & 0 & \cdots & 0 & c_{p,q} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{q-1,q} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\ 0 \\
 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_0 &
\end{pmatrix}\in W_n^{p,q}(R),
$$

因 R 是半交换环，由式(1)得，$a_0c_0b_0=0$。只需证 $\boldsymbol{ACB}$ 的第 p,q 列全为零。第 p 列为 $a_0c_0b_{t,p}+(a_0c_{t,p}+a_{t,p}c_0)b_0(1\leqslant t\leqslant p-1)$。因为 $a_0b_{t,p}=a_{t,t}b_{t,p}$, $a_{t,p}b_0=a_{t,p}b_{p,p}$，由引理2.3知，$a_{t,t}b_{t,p}=0$，$a_{t,p}b_{p,p}=0$，因 R 是半交换环，故 $a_0c_0b_{t,p}=0$，$a_0c_{t,p}b_0=0$，$a_{t,p}c_0b_0=0$，那么第 p 列全为零。第 q 列为 $a_0c_0b_{t,q}+(a_0c_{t,p}+a_{t,p}c_0)b_{p,q}+(a_0c_{t,q}+a_{t,p}c_{t,q}+a_{t,q}c_0)b_0(1\leqslant t\leqslant p-1)$, $a_0c_0b_{s,q}+(a_0c_{s,q}+a_{s,q}c_0)b_0(p\leqslant s\leqslant q-1)$。因为 $a_0b_{t,q}=a_{t,t}b_{t,q}$，$a_0b_{p,q}=a_{p,p}b_{p,q}$, $a_{t,p}b_0=a_{t,p}b_{p,p}$, $a_{t,q}b_0=a_{t,q}b_{q,q}$, $a_0b_{s,q}=a_{s,s}b_{s,q}$，$a_{s,q}b_0=a_{s,q}b_{q,q}$，由引理1.3知，$a_{t,t}b_{t,q}=0$，$a_{p,p}b_{p,q}=0$，$a_{t,p}b_{p,p}=0$，$a_{t,q}b_{q,q}=0$，$a_{t,p}b_{p,q}=0$，$a_{s,s}b_{s,q}=0$, $a_{s,q}b_{q,q}=0$，因 R 是半交换环，故 $a_0c_0b_{t,q}=0$，$a_0c_{t,p}b_{p,q}=0$，$a_{t,p}c_0b_{p,q}=0$, $a_0c_{t,q}b_0=0$，$a_{t,p}c_{t,q}b_0=0$，$a_{t,q}c_0b_0=0$，$a_0c_0b_{s,q}=0$，$a_{s,q}c_0b_0=0$，那么第 q 列全为零。

推论 1.1[3] 设 R 是 reduced 环。则

$$
W_3^{2,3}(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\,\middle|\, a,\ b,\ c,\ d\in R\right\}
$$

既是 Armendariz 环又是半交换环。

推论 1.2 设 R 是 reduced 环。则

$$
W_n^{n-1}(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{pmatrix}\,\middle|\, a,\ a_{ij}\in R\right\}
$$

既是 Armendariz 环又是半交换环。

文献[6]中定理1是推论1.2的前半部分。

参考文献:

[1] ARMENDARIZ E P. A note on extensions of Baer and p.p. rings[J]. Aust Math Soc, 1974, 18:470-473.
[2] REGEM B, CHHAWCHHARIA S. Armendariz rings[J]. Proc Japan Acad Ser A Math Sci, 1997, 73:14-17.
[3] KIM N K, LEE Y. Armendariz rings and reduced rings[J]. J Algebra, 2000, 223: 477-488.
[4] KIM N K, LEE Y. Extensions of reversible rings[J]. J Pure Appl Algebra, 2003, 185:207-223.
[5] LEE Tsiu-Kwen, ZHOU Yiqiang. Armendariz and reduced rings[J]. Comm Algebra, 2004, 32(6):2287-2299.
[6] 闫占平. 一类矩阵环的 Armendariz 性质[J]. 西北师大大学学报, 2004, 39(3):22-24.

(编辑:李晓红)