第 42 卷 第 3 期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2007 年 3 月
Vol.42 No.3 JOURNAL OF SHANDONG UNIVERSITY Mar. 2007

文章编号:1671-9352(2007)03-0029-03

一类部分可观测信息下不定 LQ 问题可解的充分条件

孙艳艳[1],吴 臻[2]

(1. 山东大学 第一附属中学, 山东 济南 250100; 2. 山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

摘要: 结合分离原理和处理 LQ 问题的通常技术, 给出了一类部分可观测信息下不定 LQ 问题可解的充分条件.

关键词: 滤波;LQ; 黎卡提方程; 分离原理

中图分类号: O231 **文献标识码:** A

Sufficient condition of one kind of indefinite LQ solvable problem under partial information

SUN Yan-yan[1] and WU Zhen[2]

(1. The First Middle School Attached to Shandong Univ., Jinan 250100, Shandong, China;
2. School of Math. and System Sci., Shandong Univ., Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: Combining the separated principle with the usual technique of solving LQ problems, the sufficient condition of one kind of indefinite LQ solvable problem is given under partial information.

Key words: filtering; linear quadratic; Riccati equation; separated principle

1 问题的阐述

线性二次最优控制问题不但可以模拟现实世界中的很多现象,而且可以近似一些复杂问题, 同时其结构又相对简单, 处理方便, 因而成为现代控制理论中的一类重要问题. 不管是确定性的情形,还是随机情形,都已经得到很多经典的结果, 它们是现代控制不可或缺的部分.

一个随机线性二次(LQ)最优控制问题,当状态和控制的权重矩阵为不定时,称为不定 LQ 问题. 不定随机 LQ 理论已经得到进一步的发展,而且在金融中有了广泛的应用. S. Chen, X. Li, X. Zhou[1] 和 M. Ait Rami, J.B. Moore and X. Y. Zhou[2] 在完全可观测信息的假定下,考虑了不定控制权重的随机 LQ 最优控制问题. 事实上,控制系统的状态不可能完全被观测到. 本文将研究一类部分信息下的不定随机 LQ 问题.

给定有限时间区间$[0, T]$, 令$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为带有自然信息流 $\mathscr{F}_t = \sigma\{W_s, V_s; 0 \le s \le t\}$ 的完备概率空间,其中 $W(t)$, $V(t)$分别为定义在该概率空间上的一维标准布朗运动.

考虑下面的具有不定控制权重的部分可观测的随机 LQ 最优控制问题:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = [\boldsymbol{A}(t)x(t) + \boldsymbol{B}(t)u(t)]\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}W(t), \\ \mathrm{d}y(t) = \boldsymbol{H}(t)x(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}V(t), y(s) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2006-05-28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371067);霍英东青年教师基金资助项目(91064);教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目
作者简介:孙艳艳(1980-),女,硕士,研究方向:随机控制.

$$J(s,x_s;u(\cdot)) = E\left\{\int_s^T [x'(t)\boldsymbol{Q}(t)x(t) + u'(t)\boldsymbol{R}(t)u(t)]\mathrm{d}t + x'(T)\boldsymbol{F}x(T)\right\}. \tag{2}$$

这里 $x(s) = x_s \in \mathbf{R}^n, y(t) \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{Q}(t)$ 为 $n\times n$ 对称矩阵, $\boldsymbol{R}(t)$ 为对称 $n^u \times n^u$ 非负定矩阵,且矩阵 $\boldsymbol{R}(t)$ 和 $\boldsymbol{Q}(t)$ 的各元素是关于 t 的有界函数. $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$, $\boldsymbol{H}(t)$ 分别为 $n\times n$, $n\times n^u$, $m\times n$ 确定性矩阵,且有

$$|A_{ij}(t)| \le c,\ |B_{ij}(t)| \le c,\ |g_i(t)| \le c,\ \int_s^T H_{ij}^2(t)\mathrm{d}t < \infty,\ \int_s^T \sigma_i^2(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

同时假定 $[\sigma(t)\sigma'(t)]^{-1}$ 存在且一致有界. x_s 是可观测的正态随机变量, 其具有有限均值和方差,且与标准布朗运动 V 及 W 相互独立. 记 $\mathscr{G}_t = \sigma\{y(r): s\le r\le t\}$.若 $u(t)\in \mathscr{U}_{ad} = \mathscr{L}_{\mathscr{F}}^2(0,T;\mathbf{R}^{n^u})$ 且关于 $\mathscr{G}_t$- 适应, 则称 $u(t)$ 为容许控制, $s\le t\le T$.

我们的最优控制问题是: 对给定的 $(s,x_s)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n$,寻求 $u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$,使目标泛函 $J(s,x_s;u(\cdot))$ 达到最小.

Bensoussan[3] 也考虑了形如(2) 的最优 LQ 问题,但是他不可避免地假定了控制权重是正定的这一条件. 因此其结果可以看作本文结果的一个特例.

2 主要结果

下面的定理说明, 一般 Riccati 方程(3) 可解为 LQ 问题(1),(2) 适定及存在最优线性反馈控制的充分条件,并且任何反馈控制都可以由此 Riccati 方程的解来表示.

定理 2.1 若一般 Riccati 方程(GRE)

$$\begin{cases}\dot{P} + PA + A'P - PBR^+B'P + Q = 0,\ P(T) = F,\\ RR^+B'P - B'P = 0,\ R\ge 0\end{cases} \tag{3}$$

有解, 则 LQ 问题(1),(2) 为适定的; 且对初值 $(s,x_s)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n$, 任一最优控制有下述形式:

$$u_{(Y,Z)}(t) = -[R^+(t)B'(t)P(t) + Y(t) - R^+(t)R(t)Y(t)]\hat{x}(t) + Z(t) - R^+(t)R(t)Z(t), \tag{4}$$

相应的值函数为

$$V(s,\hat{x}_s) = Ex_sP(s)Ex_s + \int_s^T \mathrm{Tr}[SH'(\sigma\sigma')^{-1}HSP](t)\mathrm{d}t + \int_s^T \mathrm{Tr}(QS)(t)\mathrm{d}t + \mathrm{Tr}[FS(T)]. \tag{5}$$

这里 $Y(\cdot)\in L_{\mathscr{G}}^2(s,T;\mathbf{R}^{n_u\times n})$, $Z(\cdot)\in L_{\mathscr{G}}^2(s,T;\mathbf{R}^{n_u})$, $\hat{x}(t) = E[x(t)\mid\mathscr{G}_t]$ 满足

$$\mathrm{d}\hat{x}(t) = [A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t)]\mathrm{d}t + S(t)H'(t)[\sigma(t)\sigma'(t)]^{-1}[\mathrm{d}y(t) - H(t)\hat{x}(t)\mathrm{d}t],$$

$S(t) = E[(x(t)-\hat{x}(t))(x(t)-\hat{x}(t))']$ 是下述方程的解:

$$\mathrm{d}S(t) = (A(t)S(t) + S(t)A'(t) - S(t)H'(t)[\sigma(t)\sigma'(t)]^{-1}H(t)S(t) + g(t)g'(t))\mathrm{d}t.$$

证明 利用[1] 中定理 12.1, 我们知道 $\hat{x}(t)$ 满足

$$\mathrm{d}\hat{x}(t) = [A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t)]\mathrm{d}t + S(t)H'(t)[\sigma(t)\sigma'(t)]^{-1}[\mathrm{d}y(t) - H(t)\hat{x}(t)\mathrm{d}t], \tag{6}$$

其中 $S(t) = E[(x(t)-\hat{x}(t))(x(t)-\hat{x}(t))']$ 是下述方程的解:

$$\mathrm{d}S(t) = (A(t)S(t) + S(t)A'(t) - S(t)H'(t)[\sigma(t)\sigma'(t)]^{-1}H(t)S(t) + g(t)g'(t))\mathrm{d}t. \tag{7}$$

若记 $\mathrm{d}y(t) - H(t)\hat{x}(t)\mathrm{d}t = \sigma(t)\mathrm{d}\hat{V}(t)$,则易知 $\hat{V}(t)$ 为一维标准可观测布朗运动.

注意到(6), (7), 并利用分离原理技术, (2) 可改写为

$$J(u(\cdot)) = E\left\{\int_s^T [\hat{x}'(t)\boldsymbol{Q}(t)\hat{x}(t) + u'(t)\boldsymbol{R}(t)u(t)]\mathrm{d}t + \hat{x}'(T)\boldsymbol{F}\hat{x}(T)\right\} + \int_s^T \mathrm{Tr}[\boldsymbol{Q}(t)S(t)]\mathrm{d}t + \mathrm{Tr}[\boldsymbol{F}S(T)].$$

若记

$$\mathscr{Z} = \int_s^T \mathrm{Tr}[\boldsymbol{Q}(t)S(t)]\mathrm{d}t + \mathrm{Tr}[\boldsymbol{F}S(T)],$$

$$\hat{J}(u(\cdot)) = E\left\{\int_s^T [\hat{x}'(t)\boldsymbol{Q}(t)\hat{x}(t) + u'(t)\boldsymbol{R}(t)u(t)]\mathrm{d}t + \hat{x}'(T)\boldsymbol{F}\hat{x}(T)\right\},$$

则有 $J(u(\cdot)) = \hat{J}(u(\cdot)) + \mathscr{Z}$.因为 $S(t)$ 与 u 无关,所以 $\mathscr{Z}$ 与 u 无关. 因此使得 $J(u(\cdot))$ 达到最小值的最优控制 $u(\cdot)$ 也能使得 $\hat{J}(u(\cdot))$ 达到最小值.

从而, 不完全可观测信息下的 LQ 问题(1),(2) 被等价转化成下述完全可观测信息下的 LQ 问题:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\hat{x}(t) = [\boldsymbol{A}(t)\hat{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)u(t)]\mathrm{d}t + S(t)\boldsymbol{H}'(t)[\sigma(t)\sigma'(t)]^{-1}\sigma(t)\mathrm{d}\hat{V}(t), \\ \hat{J}(s,T;u(\cdot)) = E\left\{\int_s^T[\hat{x}'(t)\boldsymbol{Q}(t)\hat{x}(t) + u'(t)\boldsymbol{R}(t)u(t)]\mathrm{d}t + \hat{x}'(T)\boldsymbol{F}\hat{x}(T)\right\}. \end{cases} \tag{8}$$

为方便起见, 我们记 $S(t)\boldsymbol{H}'(t)[\sigma(t)\sigma'(t)]^{-1}\sigma(t) = G(t)$.因为下面的证明类似于[2], 所以我们仅给出主要步骤.

若 P 为 GRE(3) 的解,则利用伊滕公式得

$$E[\hat{x}(T)P(T)\hat{x}(T)] = \hat{x}'(s)P(s)\hat{x}(s) + E\left\{\int_s^T[\hat{x}'(\dot{P} + A'P + PA)\hat{x}](t)\mathrm{d}t\right\} + E\left\{\int_s^T[2u'B'P\hat{x} + G'PG](t)\mathrm{d}t\right\}.$$

给定 $Y(\cdot) \in L^2_{\mathscr{G}}(s,T;\mathbf{R}^{n\times n})$, $Z(t) \in L^2_{\mathscr{G}}(s,T;\mathbf{R}^n)$,令

$$m(t) = Y(t) - R(t)^+\boldsymbol{R}(t)Y(t),\ n(t) = Z(t) - R(t)^+\boldsymbol{R}(t)Z(t),$$

易知 $\boldsymbol{R}(t)m(t) = R^+(t)m(t) = \boldsymbol{R}(t)n(t) = R^+(t)n(t) = 0$, $P(t)\boldsymbol{B}(t)m(t) = P(t)\boldsymbol{B}(t)n(t) = 0$, 则

$$\begin{aligned} \hat{J}(s,\hat{x}(s);u(\cdot)) = {} & \hat{x}(s)P(s)\hat{x}(s) + E\int_s^E[\hat{x}'(\dot{P} + A'P + PA + Q)\hat{x}] + \\ & 2u'B'P\hat{x} + G'PG + u'Ru](t)\mathrm{d}t = \hat{x}'(s)P(s)\hat{x}(s) + \\ & E\int_s^T\{\hat{x}'(\dot{P} + A'P + PA + Q - PBR^+B'P)\hat{x} + \\ & [u + (R^+B'P + m)\hat{x} + n]'R[u + (R^+B'P + m)\hat{x} + n] + G'PG\}(t)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

因此当控制为 $u^*(t) = -[R^+(t)B'(t)P(t) + m(t)]\hat{x}(t) + n(t)$ 时,$\hat{J}$ 达到最小,且有

$$\begin{aligned} V(s,\hat{x}_s) = {} & \hat{x}(s)'P(s)\hat{x}(s) + E[\int_s^T G'(t)P(t)G(t)\mathrm{d}t] + \mathscr{Z} = \\ & Ex_sP(s)Ex_s + \int_s^T\mathrm{Tr}[SH'(\sigma\sigma')^{-1}HSP](t)\mathrm{d}t + \int_s^T\mathrm{Tr}(Q(t)S(t))\mathrm{d}t + \mathrm{Tr}[FS(T)]. \end{aligned}$$

下面仅需证明任何最优控制都可以表示成(4) 的形式.若令 $u(\cdot)$ 为最优的,则有

$$R^{1/2}(t)[u(t) + (R^+(t)B'(t)P(t) + m(t))\hat{x}(t) + n(t)] = 0,$$
$$R(t)u(t) + B'(t)P(t)\hat{x}(t) = 0,\ \text{a.e. } t \in [s,T].$$

由于 $RR^+B'P - B'P = 0$, 那么

$$u(t) = -R^+(t)B'(t)P(t)\hat{x}(t) + Z(t) - R^+(t)R(t)Z(t),$$

即 $u(\cdot)$ 可以表示为形式(4).

参考文献:

[1] R S Liptser, A N Shiryayev. Statistics of random processes[M]. Berlin: Springer-verlag, 1978.

[2] M Ait Rami, J B Moore, X Y Zhou. Indefinite stochastic linear quadratic control and generalized differential Riccati equation[J]. SIAM J Control Optim, 2001, 40:1 296 ~ 1 311.

[3] A Bensoussan. Stochastic control of partially observable systems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[4] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations[M]. Berlin: Springer, 1985.

[5] S Chen, X Li, X Y Zhou. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs[J]. SIAM J Control & Optimization, 1998, 36: 1 685 ~ 1 702.

[6] S Chen, X Y Zhou. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs, II[J]. SIAM J Control & Optimization, 2000, 39:1 065 ~ 1 081.

(编辑:冯保初)