文章编号:1671-9352(2008)02-0109-04

一类二部图的(d,1)-全标号

马巧灵,张苏梅
(济南大学理学院,山东 济南 250022)

摘要:图 G 的一个 k-(d,1)-全标号是一个映射 $f: V(G)\cup E(G)\to\{0,1,2\cdots,k\}$,使得(1) 相邻的顶点标不同的号;(2) 相邻的边标不同的号;(3) 顶点与所关联的边标号数相差至少为 d ($d\geqslant 2$)。图 G 的(d,1)-全标号数定义为 G 有一个 k-(d,1)-全标号的最小的 k 值。给出了一类二部图的(d,1)–全标号数。

关键词:二部图;(d,1)-全标号;(d,1)-全标号数
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

The total labelling number of some bipartite graphs

MA Qiao-ling, ZHANG Su-mei
(School of Science, Jinan University, Jinan 250022, Shandong, China)

Abstract: The (d,1)-total labelling number of a graph G is the width of the smallest range of integers that suffices to label the vertices and edges of G such that: (1) any two adjacent vertices of G receive distinct integers; (2) any two adjacent edges of G receive distinct integers; (3) each vertex and its incident edges receive integers which differ as at least d($d\geqslant 2$) in absolute value. Some results of the (d,1)-total labelling number for some bipartite graphs were given.

Key words: bipartite graphs; (d,1)-total labelling; (d,1)-total labelling number

0 引言

当今世界,信息技术的发展突飞猛进,其通信技术正朝着高性能、多用途和方便用户的方向迅速发展。无线电频率资源逐渐成为一种紧缺资源,频率资源分配问题作为一个资源优化配置问题摆在人们面前。频率分配问题是对每个无线电发射台分配一个频率,使得相互干扰的无线电发射台所分配的频率的间隔在允许的范围之内。解决这个问题的一个数学模型就是图上的距离2标号问题,又称 $L(2,1)$-标号问题。

设 $\mathbf{Z}$ 为非负整数集合,$f: V(G)\to\mathbf{Z}$ 为一个映射,若对任意的 $x,y\in V(G)$,满足当 $d_G(x,y)=1$ 时,有 $|f(x)-f(y)|\geqslant 2$;当 $d_G(x,y)=2$ 时,有 $|f(x)-f(y)|\geqslant 1$,则称 f 为 G 的一个的 $L(2,1)$-标号。图的一个 k-$L(2,1)$-标号是指图的一个 $L(2,1)$-标号使得所有标号都不超过 k 并且至少有一个点的标号为 k。称使 G 有一个 k-$L(2,1)$-标号的最小 k 值为图 G 的 $L(2,1)$-标号数,记为 $\lambda(G)$。1992年,Griggs 和 Yeh 首先提出和研究了图的 $L(2,1)$-标号问题[1],确定了 $\lambda(P_n)$,$\lambda(C_n)$ 和 $\lambda(W_n)$ 的具体数值。他们证明了一般图的 $L(2,1)$-标号问题是NP-完备的,而且对最大度为 $\Delta\geqslant 1$ 的图 G,$\lambda(G)\leqslant\Delta^2+2\Delta$,Griggs 和 Yeh 猜想对任何最大度为 Δ 的图,总有 $\lambda(G)\leqslant\Delta^2$。

要直接证明 Griggs 和 Yeh 的猜想比较困难。目前,关于图的 $L(2,1)$-标号问题的研究大都集中在证明该猜想对某些特殊图成立。Georges给出了许多有意义的结果[2,3]。张苏梅和马巧灵在[4-7]中研究了几类

收稿日期:2008-01-05
基金项目:山东省教育厅科技基金资助项目(TJY0706);济南大学博士基金资助项目(B0625);济南大学科技基金资助项目(Y0615;XKY0705)
作者简介:马巧灵(1968-),女,讲师,主要从事图论研究.Email:ss_maql@ujn.edu.cn

特殊图的推广的标号问题,得出了较好的结果。1995 年,Whittlesey, Georges 和 Mauro 考虑了关联图的 $L(2,1)$-标号问题[8]。图 G 的关联图 $R(G)$ 是用长度为 2 的路替换 G 中的每条边后得到的图,$R(G)$ 的 $L(2,1)$-标号问题等价于在原图上的(2,1)-全标号问题。

设 d 是一个非负整数,图 G 的一个 k-$(d,1)$-全标号是一个映射 f: $V(G)\cup E(G)\to\{0,1,\cdots,k\}$,且满足:

(1) 对任意 2 个相邻点 u 和 v,有 $|f(u)-f(v)|\geqslant 1$;

(2) 对任意 2 个相邻边 e 和 e',有 $|f(e)-f(e')|\geqslant 1$;

(3) 对任意 2 个相关联的点 u 和边 e,有 $|f(u)-f(e)|\geqslant d$。

图 G 的$(d,1)$-全标号数 $\lambda_d^T(G)$ 定义为 G 有一个 k-$(d,1)$-全标号的最小的 k 值。注意到当 $d=1$ 时,图 G 的$(d,1)$-全标号就对应于图 G 的点边全染色,这种情况已被广泛研究。因此,图 G 的$(d,1)$-全标号不仅是对图的全染色的一种推广,也与图的距离 2 标号问题密切相关,故对它的研究有重要意义。图 G 的$(d,1)$-全标号是由 Havet 和 Yu 在[9]中首先提出并研究,正式发表在[10]。

引理 1.1[10] 图 G 的最大度为 Δ,那么

(1) $\lambda_d^T(G)\geqslant\Delta+d-1$;

(2) 如果 G 是 Δ 正则图,则 $\lambda_d^T(G)\geqslant\Delta+d$;

(3) 如果 $d\geqslant\Delta$,则 $\lambda_d^T(G)\geqslant\Delta+d$。

用 $\chi(G)$, $\chi'(G)$分别表示图 G 的点色数和边色数,则根据$(d,1)$-全标号的定义可得下面结论。

引理 1.2[10] 对任意图 G,有

(1) $\lambda_d^T(G)\leqslant\chi(G)+\chi'(G)+d-2$;

(2) $\lambda_d^T(G)\leqslant 2\Delta+d-1$。

由于二部图的点色数是 2,而边色数是 Δ,根据引理 1.1 和引理 1.2 可得到二部图的$(d,1)$-全标号数。

引理 1.3[11] 若图 G 是二部图,则有 $\Delta+d-1\leqslant\lambda_d^T(G)\leqslant\Delta+d$。

2 二部图的$(d,1)$-全标号

根据引理 1.3,对于二部图 G,有 $\Delta+d-1\leqslant\lambda_d^T(G)\leqslant\Delta+d$。自然地,可以把二部图分为两类,称满足 $\lambda_d^T(G)=\Delta+d-1$ 的图为第一类图,而满足 $\lambda_d^T(G)=\Delta+d$ 的图为第二类图。根据引理 1.1 可知,正则的二部图或 $d\geqslant\Delta$ 的二部图是第二类的。显然,对于 $d<\Delta$,讨论二部图的分类是很有意义的。本节主要研究了一类二部图的分类问题给出了若干结果。

定义 2.1 定义图 $G_{m\times n}$,对于两组自然数$\{1, 2,\cdots,m\}$和$\{1, 2,\cdots,n\}$,$V(G_{m\times n}):=\{(i,j): i\in\{1, 2,\cdots,m\}, j\in\{1,2,\cdots,n\}\}$ $E(G_{m\times n}):=\{(i,j)(k,l): |i-k|+|j-l|=1,(i,j),(k,l)\in V(G_{m\times n})\}$,则 $G_{m\times n}$ 叫作 $m\times n$ 生成图。

根据上述定义,由于 $G_{m\times n}$ 与 $G_{n\times m}$ 同构,下面不妨只对 $m\leqslant n$ 的情况讨论。

C.N.Campos, C.P.de Mello 在[11]中讨论了 $d=1$ 时,图 $G_{m\times n}$ 的分类问题。

首先给出几个有用的引理。

引理 2.1 对任意图 G_1、G_2,若 $G_1\subset G_2$,则 $\lambda_d^T(G_1)\leqslant\lambda_d^T(G_2)$。

引理 2.2 设 $d\geqslant 2$,对任意图 G,若由图 G 的所有最大度点构成的导出子图中含有 $K_{1,r}$ 且 $\Delta-d<r$,则 $\lambda_d^T(G)\geqslant\Delta+d$。

证明 因为图 G 的最大度点导出子图中含有 $K_{1,r}$,为方便讨论,不妨设最大度点为 $v_1, v_2\cdots, v_r$ 都和另一个最大度点 u 相邻。如果 $\lambda_d^T(G)\leqslant\Delta+d-1$,根据引理 1.1 及$(d,1)$-全标号的定义,必有 $\lambda_d^T(G)=\Delta+d-1$,且任一个最大度点必标 0 或 $\Delta+d-1$。不妨设 u 标 0,则 $v_1, v_2\cdots, v_r$ 必都标 $\Delta+d-1$。则边 $uv_i(i=1,2,\cdots,r)$的标号需回避 $2d$ 个标号数。而这样的边至少有 r 条,所以有 $\Delta+d-2d=\Delta-d\geqslant r$, 显然与已知条件矛盾。引理 2.2 得证。

定理 2.1 设 $d\geqslant 2$,若 $m\geqslant 4$, $n\geqslant 5$,则图 $G_{m\times n}$ 是第二类的。

证明　对于图 $G_{m\times n}$,当 $m\geqslant 4$,$n\geqslant 5$ 时,根据图 $G_{m\times n}$ 的定义有 $\Delta(G_{m\times n})=4$,且图 $G_{m\times n}$ 中,最大度点的导出子图一定含有 $K_{1,3}$。当 $d\geqslant 4$ 时,根据引理 1.1, 图 $G_{m\times n}$ 是第二类的。当 $d=2,3$ 时,根据引理 2.2 知:$\lambda_d^T(G)\geqslant\Delta+d$,所以图 $G_{m\times n}$ 是第二类的。

定理 2.2　对于图 $G_{m\times n}$,当 $m=3$, $n=5$ 时,若 $d\geqslant 3$,则图 $G_{m\times n}$ 是第二类的;若 $d=2$,则图 $G_{m\times n}$ 是第一类的。

证明　对于图 $G_{m\times n}$,当 $m=3$, $n=5$ 时,根据图 $G_{m\times n}$ 的定义有 $\Delta(G_{3\times 5})=4$,当 $d\geqslant 4$ 时,根据引理 1.1, 图 $G_{3\times 5}$ 是第二类的。且图 $G_{3\times 5}$ 中,最大度点的导出子图一定含有 $K_{1,2}$。当 $d=3$ 时,根据引理 2.2 知:$\lambda_d^T(G_{m\times n})\geqslant\Delta+d$,所以图 $G_{3\times 5}$ 是第二类的。当 $d=2$ 时,图 2.1 给出了图 $G_{3\times 5}$ 的一个$(2,1)$-全标号,且其标号数为 5,此时,图 $G_{3\times 5}$ 是第一类的。

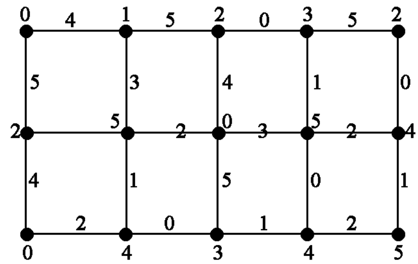

图 2.1
Fig.2.1

定理 2.3　对于图 $G_{m\times n}$,当 $m=4$,$n=4$ 时,若 $d\geqslant 3$,则图 $G_{m\times n}$ 是第二类的; 若 $d=2$ 时,则图 $G_{m\times n}$ 是第一类的。

证明　对于图 $G_{m\times n}$,当 $m=4$, $n=4$ 时,有 $\Delta(G_{4\times 4})=4$,且其最大度点的导出子图一定含有 $K_{1,2}$。当 $d\geqslant 3$ 时,根据引理 2.2 知:$\lambda_d^T(G)\geqslant\Delta+d$,所以图 $G_{4\times 4}$ 是第二类的。当 $d=2$ 时,图 2.2 给出了 $G_{4\times 4}$ 的一个$(2,1)$-全标号,且其标号数为 5,此时,图 $G_{4\times 4}$ 是第一类的。

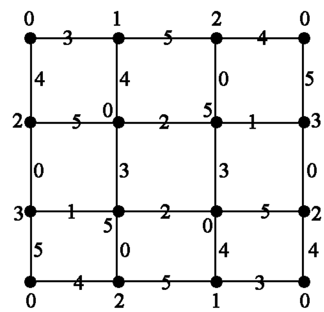

图 2.2
Fig.2.2

根据引理 2.1,图 $G_{3\times 4}$,$G_{3\times 3}$ 都是 $G_{4\times 4}$ 的子图,且其最大度相同,由定理 2.3 可得下面推论。

推论　当 $d=2$ 时,图 $G_{3\times 4}$,$G_{3\times 3}$ 都是第一类的。

定理 2.4　当 $d\geqslant 3$ 时,图 $G_{3\times 3}$,$G_{3\times 4}$ 是第二类的。

证明　当 $d=3$ 时,如图 2.3,假设图 $G_{3\times 3}$ 是第一类的。则可以用 $\lambda_3^T(G_{3\times 3})=\Delta+d-1=4+3-1=6$,对图 $G_{m\times n}$,$(m=3,n=3)$ 进行全标号,显然最大度点只能标{0, 6},不妨最大度标{0},则其关联的四边只能标{3, 4, 5, 6},如图 2.3,与标{3}的边关联的点 H 只能标{6},B 点可以标{1, 2, 3},但 B 点若标{2, 3},则边 AB, BC 无法进行$(3,1)$-全标号,所以点 B, D, F 这三个三度点只能标{1},才能有三个数{4, 5, 6}标关联的三条边,由于 BI,DI,FI 可以选择{4, 5, 6}进行标号,显然,边 GF 的标号可能标{4, 5, 6}。

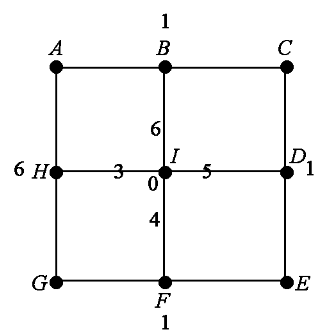

图 2.3
Fig.2.3

若 $f(GF)=4$,则 $f(G)=0$,那么边 $f(HG)=3$ 与 $f(HI)=3$ 矛盾,即点 G 不能标 0,边 GF 不能标 4;

若 $f(GF)=5$,则 $f(G)=2$,此时边 HG 无法进行$(3,1)$-全标号;

若 $f(GF)=6$,则点 G 可能标{0, 2, 3}。

由上边的证明可知:点 G 不能标{0, 2};当 $f(G)=3$,显然 $f(GH)=0$ 相应的边 AH 只能标{1, 2}。若 $f(AH)=1$,则点 A 只能标{4, 5},此时 AB 无法进行$(3,1)$-全标号;若 $f(AH)=2$,则点 A 只能标{5},此时边 AB 无法进行$(3,1)$-全标号。

综上所述:$\lambda_3^T(G_{3\times 3})>\Delta+d-1=6$,所以 图 $G_{3\times 3}$ 是第二类的。

由于 $G_{3\times 3}\subset G_{3\times 4}$,根据引理 2.1,有 $\lambda_3^T(G_{3\times 3})\leqslant\lambda_3^T(G_{3\times 4})$,而 $\lambda_3^T(G_{3\times 4})>\Delta+d-1=6$,所以图 $G_{3\times 4}$ 也是第二类的。

当 $d\geqslant 4=\Delta(G_{m\times n})$ 时,根据引理 1.1,图 $G_{m\times n}$ 是第二类的。所以当 $d\geqslant 3$ 时,图 $G_{3\times 3}$,$G_{3\times 4}$ 是第二类的。

定理 2.5　对于图 $G_{m\times n}(m=2, n\geqslant 4)$,当 $d\geqslant 2$ 时,图 $G_{m\times n}$ 是第二类的。

证明　对于 $G_{m\times n}$,当 $m=2$, $n=4$ 时,根据图 $G_{m\times n}$ 的定义有 $\Delta(G_{2\times 4})=3$,且图 $G_{2\times 4}$ 中,最大度点的导出子图一定含有 $K_{1,2}$。当 $d\geqslant 2$ 时,根据引理 2.2 知:$\lambda_d^T(G)\geqslant\Delta+d$,所以图 $G_{2\times 4}$ 是第二类的。当 $m=2$, $n\geqslant 5$ 时,根据图 $G_{m\times n}$ 的定义有 $\Delta(G_{m\times n})=3$,且图 $G_{m\times n}$ 中,最大度点的导出子图一定含有 $K_{1,3}$。根据引理 2.2 知:$\lambda_d^T(G)\geqslant\Delta+d$,所以图 $G_{m\times n}$ 是第二类的。

定理 2.6　对于图 $G_{m\times n}(m=2, n=3)$,当 $d=2$ 时,则 G 是第一类的。当 $d\geqslant 3$ 时,则 G 是第二类的。

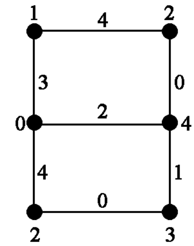

图 2.4
Fig.2.4

证明 在图 $G_{m\times n}$,($m=2,n=3$)中,$\Delta(G_{2\times 3})=3$,当 $d=2$ 时,只须用{0, 1, 2, 3, 4},就可以对 $G_{2\times 3}$进行(2,1)-全标号,即:$\lambda_2^T(G_{2\times 3})=\Delta+d-1=3+2-1=4$。如图 2.4。

所以图 $G_{2\times 3}$是第一类的。

当 $d\geqslant\Delta(G_{2\times 3})=3$ 时,根据引理 1.1,图 $G_{2\times 3}$是第二类的。

定理 2.7 对于图 $G_{m\times n}$($m=2$, $n=2$),当 $d\geqslant 2$ 时,则 $G_{2\times 2}$是第二类的。

证明 根据图 $G_{m\times n}$的定义:$\Delta(G_{2\times 2})=2$,当 $m=2$, $n=2$ 是圈,显然最大度点的导出子图一定含有 $K_{1,2}$。当 $d\geqslant 2$ 时,根据引理 2.2 知:$\lambda_d^T(G)\geqslant\Delta+d$,所以图 G 是第二类的。

3 可进一步讨论的问题

当 $m=3$, $n>5$ 时,则 $G_{m\times n}$是第几类的?

参考文献:

[1] GRIGGS J R, YEH R K. Labeling graphs with a condition at distance 2[J]. SIAM J Discrete Math, 1992, 5(4):586-595.
[2] GEORGES J P, MAURO D W, STEIN M I. Labeling products of complete graphs with a condition at distance two[J]. SIAM J Discrete Math, 2000, 14(1):28-35.
[3] GEORGES J P, MAURO D W, WHITTLESEY M A. Relating path covering to vertex labelings with a condition at distance two[J]. Discrete Math, 1994, 135:103-111.
[4] ZHANG Su-mei, MA Qiao-ling. Labelling some planar graphs with a condition at distance two[J]. Applied Mathematics & Computing, 2007, 24(1):421-426.
[5] 马巧灵,张苏梅. 广义 Petersen 图的 $L(d,1)$-标号[J]. 济南大学学报:自然科学版,2007, 21(3):256-258.
[6] 马巧灵,张苏梅.自补图的 $L(2,1)$-标号[J]. 济南大学学报:自然科学版,2006, 20(2):182-183.
[7] 张苏梅,马巧灵.高度平面图的 $L(p,q)$-标号[J]. 山东大学学报:理学版, 2007, 42(4):39-43.
[8] WHITTLESEY M A, GEORGES J P, MAURO D W. On the λ-number of Q_n and related graphs[J]. SIAM J Discrete Math, 1995, 8(4):499-506.
[9] HAVET F, YU M-L. $(d,1)$-total labelling of graphs: Technical Report 4650[R]. Sophia Antipolis: INRIA, 2002.
[10] HAVET F. $(d,1)$-total labelling of graphs[C]// Workshop on Graphs and Algorithms, Dijon: [s.n.], 2003.
[11] Fabrice Bazzaro, Mickael Montassier, Andre Raspaud. $(d,1)$-total labeling of planar graphs with large girth and high maximum degree: Research Report RR-1307-03.19[R]. [S.l.] Janvier, 2004.
[12] CAMPOS C N, C P de Mello. The total chromatic number of some bipartite graphs[J]. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2005, 22:557-561.

(编辑:李晓红)