第43卷 第2期 Vol.43 No.2
山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
Journal of Shandong University(Natural Science)
2008年2月 Feb. 2008

文章编号:1671-9352(2008)02-0001-07

连续时间完备市场下利用 BSDEs 考虑套期保值问题

何坤

(山东大学数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

摘要:利用倒向随机微分方程考虑连续时间完备市场下的套期保值问题。在非线性 Feynman-Kac 公式的基础上,从等价线性市场的几个典型例子入手,最终利用 BSDEs 的无穷小生成元得到了一般非线性完备市场下的套期保值公式。

关键词: 套期保值;完备市场;倒向随机微分方程;正倒向随机微分方程

中图分类号:O211 **文献标志码:**A

Continuous-time hedging under complete market by BSDEs

HE Kun

(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: Applying backward stochastic differential equations, the hedging under complete market were considered. Based on the generalized Feynman-Kac formula related with forward and backward equations, proposed by El. Karoui, Peng, Quenez(1997), a particular formula about the portfolio strategy for hedging one contingent claim was given.

Key words: hedging; complete market; BSDE; FBSDE

从 Black, Scholes[1] 到 Harrison, Pliska[2],在线性完备市场下,关于期权定价的问题研究已经比较成熟,而关于非线性市场以及非完备市场的研究是现在研究者们所关注的问题。1990 年,一般性非线性倒向随机微分方程的提出 Peng, Pardoux[3],给期权定价问题带来了新的研究工具。El. Karoui, Peng, Quenez 在文献[4]中,总结性地将倒向随机微分方程应用到金融研究的方向给予了基础性的讨论,这里面包括了推广的 Feynman-Kac 公式[5],从而奠定了倒向随机微分方程在金融中运用严格的理论基础。本文在倒向随机微分方程框架下,考虑在等价线性及其非线性完备市场,自资融资策略下,一方面利用非线性的 Feynman-Kac 公式,考察对于几个终端条件(头寸)的定价表达公式。另一方面,受启发于经典的生成元问题,可以将价值过程 V 表示为同时依赖于正,倒向随机微分方程的非线性最小生成元(参见文献[6])构成的一种广义的鞅(可以称之为 g-鞅)。从而使满足一定条件的交割时刻的头寸,其价格过程都满足的表达式。文章的第 2 节是给出相关的准备性概念及结果,第 3 节是本文的主要结果。

1 基本概念及结果

考虑一个由 $n+1$ 种标的资产构成的金融市场,其中包括一种债券 S^0 以及 n 支股票 S^i, $i=1,\cdots,n$,同时对于每个固定的 $(t,\nu)\in[0,T]\times\mathbf{R}^{n+1}$ 都有债券和股票分别满足下面的随机微分方程:

收稿日期:2008-01-14

作者简介:何坤(1980-),女,博士研究生,主要研究方向为倒向随机微分方程,g-期望及其在金融中的应用. Email: hekun@hotmail.com

$$\begin{cases} dS_u^0 = S_u^0 r_u du, & u \in [t, T], \\ S_u^0 = \nu_0 > 0, & u \in [0, t]。\end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} dS_u^i = S_u^i [b_u^i du + \sum_{j=1}^{d} \sigma_u^{i,j} dW_u^j], & u \in [t, T], \\ S_u^i = \nu_i > 0, & u \in [0, t]。\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{W} = (W^1, \cdots, W^d)^*$ 表示完备概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的 d-维标准布朗运动,这里的 $*$ 代表向量或矩阵的转置。下面考虑的信息流$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$,$T < \infty$为此布朗运动生成的 $\boldsymbol{\sigma}$ 信息流由所有 P-零集的完备化;r 为利率过程,$\boldsymbol{b} = (b^1, \cdots, b^n)^*$ 为每种股票的平均收益率过程,$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{i,j})_{i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,d}$为股票的波动率矩阵过程,每个都是关于$\{\mathscr{F}_t\}$-循序可测的过程,并且这里的 r 为非负过程,并且 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\sigma}$ 均为有界过程。后面我们只用 S 来表示 n 支股票的价值过程。

考虑一个小投资者,希望在 T 时刻锁定一个头寸,要求他由固定的初始投资开始,只能使用自融资策略,也就是说价值过程的初始值为 $V = \sum_{i=0}^{n} \nu_i$,并从此刻开始,他在每时刻的价值都等于此时他所持有以对应第 i 种标的资产,由 ν_i 开始的满足方式(1),(2)的价值过程之和。而不能出现在在初始时刻之后再融资或者减少融资的情况。从而由初始时刻开始,价值过程满足如下等式:

$$\boldsymbol{V}_t = \pi_t^0 + \sum_{i=1}^{d} \pi_t^i = V_0 + \int_0^t \sum_{i=0}^{n} \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i}, \ \forall t \in [0, T], \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{\pi}_t = (\pi_t^1, \cdots, \pi_t^d)^*$ 表示在 t 时刻的投资组合向量,其中的第 i 个分量π_t^i代表了第i种股票在t时刻在总价值 V_t 中占有的价值额度。V_t 为此投资组合策略在t时刻的价值(由于此时我们不考虑收入过程,从而此时的价值过程同财富过程相等)。由(1),(2),以及自融资策略所满足的上面的等式,可以得到价值过程 V 满足的随机微分方程:

$$d\boldsymbol{V}_t = [\boldsymbol{r}_t \boldsymbol{V}_t + \boldsymbol{\pi}_t^* (b_t - r_t \boldsymbol{1})] dt + \boldsymbol{\pi}_t^* \sigma_t dW_t, \ V_0 = \nu, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{1}$ 代表每个分量都等于1的 d- 维列向量,投资组合向量同波动率矩阵的乘积记作 $\boldsymbol{Z} = (Z^1, \cdots, Z^d) = \boldsymbol{\pi}^* \boldsymbol{\sigma}$,因为波动率矩阵是已知确定的,则得到 $\boldsymbol{Z}$ 等价于得到投资组合,于是在不混淆的情况下将 $\boldsymbol{Z}$ 称为投资组合。

下面依照 Karatzas, Shreve[7] 给出简化的关于完备金融市场的假设条件:

假设 1 假设如果存在有界循序可测向量过程 $\boldsymbol{\theta}$ 满足:

(ⅰ)(可行市场假设)

$$\boldsymbol{b}_t - \boldsymbol{r}_t \boldsymbol{1} = \boldsymbol{\sigma}_t \boldsymbol{\theta}_t, \ \text{a.s.},$$

其中 $\boldsymbol{\theta}$ 称为风险溢价。

(ⅱ)(标准金融市场假设)在可行金融市场下,如果作为标的资产的股票种类n等于布朗运动的维数d,并且波动率矩阵 $\boldsymbol{\sigma}_t$ 几乎处处对于所有的$t \in [0, T]$为满秩矩阵,并且其逆矩阵$(\boldsymbol{\sigma}_t)^{-1}$为有界过程。

(ⅲ)(完备市场假设)在标准金融市场下,如果市场上的每个头寸 $\xi \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, P)$ 都是可融资的,即对于任意市场上的头寸 ξ,都存在某个初始投资 $V_0 = \sum_{i=0}^{d} \nu > 0$,以及对应的投资组合过程 π 和价值过程V,使得方程(4) 成立。

从本质上说,完备金融市场即:对于市场上的每个头寸,都可以用债券 —— 股票标的资产构成的投资组合按照方程(4) 复制。下面的所有讨论都基于这个完备市场假设。

这里对于矩阵元素 $\boldsymbol{B} = (B_{i,j}) \in \mathbf{R}^{n\times d}$ 沿用前面的欧氏范数 $|\boldsymbol{B}| := \sqrt{\text{trace}(\boldsymbol{BB}^*)}$。

定义空间:

· 对于给定的正整数 k, l, $C^2(\mathbf{R}^k; \mathbf{R}^l)$ 代表所有定义在 $\mathbf{R}^k$ 上,取值于 $\mathbf{R}^l$,并且具有二阶导函数的函数构成的空间。

· 对于给定的正整数 k, l, $C^{1,2}([0, T] \times \mathbf{R}^k; \mathbf{R}^l)$ 代表所有定义在$[0, T] \times \mathbf{R}^k$ 上,取值于 $\mathbf{R}^l$,并且关于时间变量具有一阶偏导数,对于空间变量具有二阶偏导数的函数构成的空间。

当上面的函数取值空间为 $\mathbf{R}$,即 $l=1$ 时,将上面空间分别简记为 $C^2(\mathbf{R}^k)$ 和 $C^{1,2}([0,T]\times\mathbf{R}^k)$。

· $L^2(\Omega,\mathscr{F}_t,P)$ 和 $L^2(0,T,\mathbf{R}^d)$ 仍沿用前面章节的表示。

在[4] 中(定理 1.1) 给出了下面的结果:

引理 1　在完备市场下,对任意的 $\xi\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_T,P)$,存在惟一的关于 $\mathscr{F}_t$- 适应的套期保值策略(V,π) 达到它,即满足

$$\mathrm{d}V_t=[r_tV_t+\pi_t^*\sigma_t\theta_t]\mathrm{d}t+\pi_t^*\sigma_t\mathrm{d}W_t,\ V_T=\xi,\tag{5}$$

同时有 $V_t=E[H_T^t\xi\mid\mathscr{F}_t]$a.s.这里的 $H_t^s=\exp[\int_s^t-(r_u+\frac{1}{2}\mid\theta_u\mid^2)\mathrm{d}u-\int_s^t\theta_s^*\mathrm{d}W_u]$。

由前面的记号 $Z_t=\pi_t^*\sigma_t$,得上面的方程(5) 可以简写为:

$$\mathrm{d}V_t=[r_tV_t+Z_t\theta_t]\mathrm{d}t+Z_t\mathrm{d}W_t,\ V_T=\xi。\tag{6}$$

下面考虑的终端值均为一可测函数同股票价值过程在 T 时刻的随机变量同一个 Borel 可测函数复合的随机变量,即假设:

(A1): $\xi=\Phi(S_T)$, $\Phi:\mathbf{R}^d\mapsto\mathbf{R}$ 为一 Borel 函数,并且满足 $\boldsymbol{\Phi}(S_T)\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_T,P)$。

非线性 Feynman-Kac 公式,使用[4,5] 中的结果。

引理 2　设 $v\in\mathscr{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbf{R}^d)$,对每个$(s,x)$ 有

$$\mid v(s,x)\mid+\mid\partial_xv(s,x)'\sigma(s,x)\mid\leqslant C(1+\mid x\mid),$$

如果 v 为下面拟线性抛物型偏微分方程的解:

$$\begin{cases}\partial_tv(t,x)+\mathscr{L}v(t,x)+g(t,v(t,x),\partial_xv(t,x)'\sigma(t,x))=0,\\ v(T,x)=\Phi(x),\end{cases}\tag{7}$$

其中 $g(t,V,Z)=r_tV+Z\theta_t$,∂_xv 表示 v 关于 x 的偏导数,$\mathscr{L}v(t,x)$ 表示如下的二阶微分算子:

$$\mathscr{L}v(t,x)=\sum_{i,j}\frac{1}{2}[\sigma\sigma']_{i,j}\partial^2_{x_ix_j}v(t,x)+\sum_ib_i(t,x)\partial_{x_i}v(t,x)。$$

则 $v(t,x)=V_t^{t,x}$, 这里$(V_s^{t,x},Z_s^{t,x})$,$s\in[t,T]$ 表示 BSDE(6) 的解。同时有$(V_r^{t,x},Z_r^{t,x})=(v(r,S_r^{t,x}),\partial_xv(t,S_r^{t,x})'\sigma(t,S_r^{t,x}))$,$r\in[t,T]$ 这里上标^{t,x} 表示价值过程的初始状态是从 t 时刻取值 $x\in\mathbf{R}^{n+1}$。于是在时刻 t 之前,价值过程为常数。

需要注意的是,此时条件中要求方程(1),(2) 及相关的倒向方程的参数均为确定性函数,从而上面给出的 r_t,b_t,σ_t 均要求为关于 t 的确定性函数,并且是关于 t 连续的。

此时对方程(6) 利用耦合方法,对 $\mathrm{e}^{\int_0^t-r_u\mathrm{d}u}V_t$ 在$[s,T]$,$s\in[0,Y]$ 上作 Itô 公式,写成积分方程的形式,得到:

$$V_s=\mathrm{e}^{\int_s^T-r_u\mathrm{d}u}\xi-\int_s^T\mathrm{e}^{\int_s^t-r_u\mathrm{d}u}Z_t\theta_t\mathrm{d}t-\int_s^T\mathrm{e}^{\int_s^t-r_u\mathrm{d}u}Z_t\mathrm{d}W_t,$$

记作:

$$\bar V_s=\mathrm{e}^{\int_s^T-r_u\mathrm{d}u}\xi-\int_s^T\bar Z_t\theta_t\mathrm{d}t-\int_s^T\bar Z_t\mathrm{d}W_t。\tag{8}$$

不难发现此方程同(6) 解之间的关系为:$\bar V_t=\mathrm{e}^{\int_s^t-r_u\mathrm{d}u}V_t$,$\bar Z_t=\mathrm{e}^{\int_s^t-r_u\mathrm{d}u}Z_t$,对 $t\in[s,T]$。同时由于利率函数 r_u,$u\in[0,T]$ 为已知确定函数,从而只要得到(8) 的解,等价与得到(6) 的解。从而不失一般性,可假设 $r_t=0$,$t\in[0,T]$(此时有 $b_t=\sigma_t\theta_t$)。考虑形如(8) 的方程,即:

$$V_s=\Phi(S_T)-\int_s^TZ_t\theta_t\mathrm{d}t-\int_s^TZ_t\mathrm{d}W_t。\tag{9}$$

对应地,下面认为 $\boldsymbol{v}$ 为 n- 维向量。

2　主要结果

例 1　如果 $\Phi(S_T)=S_T$,则有

(ⅰ) $V_t = E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t] = S_t$,其中 Q 为$(\Omega,\mathscr{F}_T)$上同 P 等价的概率测度,并同 P 满足使得$H_T := \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^T |\theta_t|^2 \mathrm{d}t - \int_0^T \theta_t \mathrm{d}W_t\right]$为一指数鞅。于是,$\bar{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s$ 也对应地成为概率空间$(\Omega,\mathscr{F}_T,Q)$上的布朗运动。

(ⅱ) $Z_t^i = S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma_t^{i,j}$; $\pi_t^i = S_t^i$, $i = 1,\cdots,d$。

证明　(ⅰ) 由引理 1 及 Girsanov 定理(参见文献[8] 定理 8.6.4) 可得 $V_t = E[H_T\xi \mid \mathscr{F}_t] = E_Q[\xi \mid \mathscr{F}_t] = E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t]$。

现在来看在概率空间$(\Omega,\mathscr{F}_T,Q)$下,股票价格过程的表达式。也即对于股票价格过程

$$S_T^i = S_0^i + \int_0^T S_u^i b_u^i \mathrm{d}u + \int_0^T S_u^i \sum_{j=1}^d \sigma_u^{ij} \mathrm{d}W_u^j, i = 1,\cdots,d,$$

作用 Girsanov 变换。于是可得在概率 Q 下,S_T 满足下面的方程:

$$S_T^i = S_0^i + \int_0^T S_u^i \sum_{j=1}^d \sigma_u^{ij} \mathrm{d}\bar{W}_u^j,$$

从而由引理 1 可得:

$$V_t = E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t] = S_0 + \int_0^t S_u{}^i \sum_{j=1}^d \sigma_u^{ij} \mathrm{d}\bar{W}_u^j = S_t。$$

(ⅱ) 由于此时(9) 为线性方程,显然满足非线性 Feynman-Kac 公式的条件,此时 Φ 为线性函数,而(ⅰ)$u(t,x) = x$。从而可以利用引理 2 得到:

$$Z_t^i = S_t^i \frac{\partial V_t}{\partial x_i}(t,S_t)\sum_{j=1}^d \sigma_t^{i,j} = S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma_t^{i,j}, \text{i.e. } \pi_t^i = S_t^i,\ i = 1,\cdots,d。$$

证完。

Black-Scholes 公式是对于期权定价的最常用的结果。它是直接从数学期望的角度出发,对 $\max(S_T - K, 0)$ 的数学期望进行变换得到的,即在风险中性测度 P 下:$V = E[\max(S_T - K,0)]$。

下面来考虑在上面 Girsanov 变换意义上的完备市场,Black-Scholes 公式对应的结果:

引理 3　如果 $\xi = \Phi(S_T) = \max(S_T - K,0)$,这里 $K > 0$ 为某一正常数,则有

$$V_t = E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t]N\left(\frac{\ln(E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t]K) + \frac{\omega^2}{2}}{\omega}\right) - KN\left(\frac{\ln(E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t]K) - \frac{\omega^2}{2}}{\omega}\right)。\tag{10}$$

其中 ω 表示 S_T 在概率 Q 下的方差,定义为 $\omega_t^2 := \mathrm{Var}_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t] = \sigma^2(T - t)$。

证明　从例 1 容易类似地得到 $\ln S_T$ 在 Q 下的期望,记其为 $\mu_t := E_Q[\ln S_T \mid \mathscr{F}_t] = \ln S_t - \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$,同时有 $E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t] = e^{\mu_t + \frac{\omega_t^2}{2}}$。于是

$$V_t = E_Q[\max(S_T - K,0) \mid \mathscr{F}_t] = E_Q[1_{[S_T \geqslant K]}(S_T - K) \mid \mathscr{F}_t] = \int_{\ln K}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^x - K}{\sqrt{2\pi}\omega_t} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_t)^2}{2\omega_t^2}} \mathrm{d}x =$$

$$\mathrm{e}^{\mu_t + \frac{\omega_t^2}{2}} \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega_t} \mathrm{e}^{\frac{(x-\mu_t-\omega_t^2)^2}{2\omega_t^2}} \mathrm{d}x - K\int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega_t} \mathrm{e}^{\frac{(x-\mu_t)^2}{2\omega_t^2}} \mathrm{d}x,$$

变量代换,令 $y = \frac{x - \mu_t}{\omega_t}$,则上式 =

$$\mathrm{e}^{\mu_t + \frac{\omega_t^2}{2}} \int_{(\ln K-\mu_t)/\omega_t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega_t} \mathrm{e}^{\frac{(y-\omega_t)^2}{2}} \mathrm{d}x - K\int_{(\ln K-\mu_t)/\omega_t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega_t} \mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$\mathrm{e}^{\mu_t + \frac{\omega_t^2}{2}} \int_{(\ln K-\mu_t)/\omega_t}^{\infty} \varphi(y - \omega_t)\mathrm{d}y - K\int_{(\ln K-\mu_t)/\omega_t}^{\infty} \varphi(y)\mathrm{d}y =$$

$$e^{\mu_t+\frac{\omega_t^2}{2}}\int_{-\infty}^{(\mu_t-\ln K)/\omega_t}\varphi(y+\omega_t)\mathrm{d}y - K\int_{-\infty}^{(\mu_t-\ln K)/\omega_t}\varphi(y)\mathrm{d}y =$$

$$E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t]N(\frac{\mu_t-\ln K+\omega_t^2}{\omega_t}) - KN(\frac{\mu_t-\ln K}{\omega_t}) =$$

$$E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t]N(\frac{\mu_t+\frac{\omega_t^2}{2}-\ln K+\frac{\omega_t^2}{2}}{\omega_t}) - KN(\frac{\mu_t+\frac{\omega_t^2}{2}-\ln K-\frac{\omega_t^2}{2}}{\omega_t}) =$$

$$E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t]N(\frac{\ln(E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t])-\ln K+\frac{\omega_t^2}{2}}{\omega_t}) - KN(\frac{\ln(E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t])-\ln K-\frac{\omega_t^2}{2}}{\omega_t}) =$$

$$E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t]N(\frac{\ln(E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t]/K)+\frac{\omega_t^2}{2}}{\omega_t}) - KN(\frac{\ln(E_Q[S_T \mid \mathscr{F}_t]/K)-\frac{\omega_t^2}{2}}{\omega_t})。$$

其中 φ,N 分别代表概率测度 Q 下关于信息流 $\mathscr{F}_t$ 的标准正态条件密度函数和条件分布函数。结果得证。

注 1　如果希望将 E_Q 代回 E,即

$$= E[H_TS_T \mid \mathscr{F}_t]\bar{N}(\frac{\ln(E[H_TS_T \mid \mathscr{F}_t]/K)+\frac{\bar{\omega}_t^2}{2}}{\bar{\omega}_t}) - K\bar{N}(\frac{\ln(E[H_TS_T \mid \mathscr{F}_t]/K)-\frac{\bar{\omega}_t^2}{2}}{\bar{\omega}_t}),$$

主要的不同在于 $\ln(S_T)$ 的条件期望及其条件方差随之改变,上面的:$\bar{\mu}_t := E[\ln(H_TS_T) \mid \mathscr{F}_t] = \ln(H_tS_t) - \frac{1}{2}[\sigma - b\sigma^{-1}]^2(T-t)$,$\bar{\omega}_t^2 := \mathrm{Var}[\ln(H_TS_T) \mid \mathscr{F}_t] = (\sigma - b\sigma^{-1})^2(T-t)$ 并且有 $E_Q[H_TS_T \mid \mathscr{F}_t] = e^{\bar{\mu}_t+\frac{\bar{\omega}_t^2}{2}}$。这里的 $\bar{N}$ 代表概率测度 P 下的条件正态分布函数。

这里的结果同经典的 Black-Scholes 公式差一个折现因子 $e^{-r(T-t)}$,其中 r 常数表示利率。原因在前面第 2 节最后已经分析了,是因为已经假设了利率为零,如果利率不为零由前面第 2 节最后的分析知,折现因子在这里的讨论模式下,已经包含在价格 V 中。

下面来定义一个函数空间:

(A2) 函数 $\Phi \in C^2(\mathbf{R}^d)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界,并且满足一致 Lipschitz 条件,即:对任意的 $x,y \in \mathbf{R}^d$,存在正常数 C,使得 $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant C|x-y|$。

对于 $S_T \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_T, P)$ 和满足(A2) 的 Φ,存在常数 C 使得 $E[|\Phi(S_T)|^2] \leqslant C$。定义空间

$$H := \{\Phi : \Phi \text{ 满足条件(A1), (A2)}\}。$$

从上面的一般的 Feynman-Kac 公式可以看出,如果 $\Phi \in H$, 对于终端条件为 $\Phi(S_T)$ 的 BSDE,其解可以表示为一个抛物型偏微分方程的解。

仍然在上面的市场假设条件下,再来看一个例子,设 $\Phi(x) = |\ln x|^2, x \in \mathbf{R}^d$,这里 $x^i > 0, i = 1,\cdots,d$。

可以理解为在 Girsanov 变换的线性市场下,一投资者希望在 T 时刻持有价值为 $|\ln S_T|^2$ 的头寸,现在投资者需要投资多少,并且怎样在各种资产上分配投资。后面可以从对应的倒向随机微分方程出发解出这两个结果。事实上,金融市场上发行的每种衍生证券,在其上市以前,都会有类似于我们这里的定价系统作为参考标准,因此定价模型的选择,所选择模型同现实市场的拟合程度非常大的的影响了参考定价的标准,也影响着这种衍生证券发行的合理性和稳定性。

例 2　如果 $\Phi(S_T) = (\ln S_T)^*(\ln S_T) = |\ln S_T|^2$,则有:

(ⅰ) $V_s = |\ln S_s|^2 + E_Q[\sum_{i=1}^{d}\int_s^T(1-\ln S_r^i)(\sigma_r^{i,i})^2\mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_s]$,这里 Q 是如上面定义的同 P 等价的概率测度;

(ⅱ) 对于投资组合,得到如下两种表达形式:

$$Z_s = E[|\ln(S_T)|^2N_T^s + \int_s^T Z_r\theta_rN_r^s\mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_s]S_s\sigma_s$$

和

$$Z_s = \sum_{i=1}^{d}E[\frac{2|\ln S_T|}{S_T^i}\nabla_i S_T^{s,S_s}P_T^s \mid \mathscr{F}_s]\sigma^i(s,S_s)。$$

证明　（ⅰ）由例1知，在测度 Q 下，过程 S_T 满足下面的方程形式：

$$S_T^i = S_0^i + \int_0^T S_u^i \sum_{j=1}^d \sigma_u^{ij} \mathrm{d}\bar{W}_u^j。$$

于是在区间 $[0,T]$ 对 $\Phi(S_T)$ 应用 Itô 公式然后积分可得：

$$|\ln S_T|^2 = |\ln S_0|^2 + \sum_i \left\{\int_0^T 2(\ln S_r^i)\left[-\frac{1}{2}(\sigma_r^{i,i})^2 \mathrm{d}r + \sum_j \sigma_r^{i,j} \mathrm{d}\bar{W}_r^j\right] + \int_0^T (\sigma_r^{i,i})^2 \mathrm{d}r\right\}。$$

两边同取条件数学期望得到：

$$\begin{aligned} E_Q[|\ln S_T|^2 \mid \mathscr{F}_t] &= E_Q\left\{|\ln S_0|^2 + \sum_i \left[\int_0^T 2(\ln S_r^i)\left[-\frac{1}{2}(\sigma_r^{i,i})^2 \mathrm{d}r + \sum_j \sigma_r^{i,j} \mathrm{d}\bar{W}_r^j\right] + \int_0^T (\sigma_r^{i,i})^2 \mathrm{d}r\right] \middle| \mathscr{F}_t\right\} = \\ &|\ln S_t|^2 + E_Q\left[\sum_i \int_t^T -(\ln S_r^i)(\sigma_r^{i,i})^2 \mathrm{d}r + \int_t^T (\sigma_r^{i,i})^2 \mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_t\right] = \\ &|\ln S_t|^2 + E_Q\left[\sum_i \int_t^T (1-\ln S_r^i)(\sigma_r^{i,i})^2 \mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_t\right]。\end{aligned}$$

由方程(9)知这即为所求的 V_t，结论（ⅰ）成立。

（ⅱ）解 FBSDE 的变差方程：

$$\nabla_i S_t = e_i + \int_0^t \nabla_i S_u b_u^i \mathrm{d}u + \int_0^t \nabla_i S_u \sum_{j=1}^d \sigma_u^{i,j} \mathrm{d}W_u^j,$$

$$\nabla_i V_t = 2|\ln(S_T)| \nabla S_T^i - \int_t^T \nabla_i Z_s \theta_s \mathrm{d}s - \int_t^T \nabla_i Z_s \mathrm{d}W_s。$$

利用文献[9]中关于解得表示性结果可得（ⅱ）。证完。

以下考虑在一般的等价线性完备金融市场条件和自融资策略下的套期保值问题。

命题 1　如果 $\Phi \in H$，$\xi = \Phi(S_T)$，则有 $V_t = E_Q[\Phi(S_T) \mid \mathscr{F}_t] = \Phi(S_t) + E_Q[\int_t^T A^t \Phi(S_r)\mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_t]$，其中 A^t 为过程 S 的无穷小生成元，其定义为：$A^t\Phi(S_t) := \frac{1}{2}\sum_i (\sigma_t^2)_{i,i}(S_t^i)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}(S_t)$。如果 b,σ 都不依赖于时间 t，则简记 $A^t\Phi(S_t)$ 为 $A\Phi(S_t)$，且有：

$$A\Phi(S_t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{E_Q[\Phi(S_{t+h}) \mid \mathscr{F}_t] - \Phi(S_t)}{h},\ t \in [0,T]。$$

同时其中对每个固定的 $h > 0$，当 $t + h > T$ 时，定义 $S_{t+h} \equiv S_T \in \mathscr{F}_T$。

证明　（ⅰ）直接在 $[t,T]$ 上对 $\Phi(S_r)$ 应用 Itô 公式，然后取条件期望 $E[\cdot \mid \mathscr{F}_t]$ 即可得证。

现在容易验证上面例1和例2的结果：对于例1，$\Phi(x) = x$，于是 $A\Phi(S_s) = 0, s \in [t,T]$，从而

$$E_Q[\Phi(S_T) \mid \mathscr{F}_t] = \Phi(S_t) + E_Q[\int_t^T A\Phi(S_r)\mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_t] = S_t。$$

对例2，$\Phi(x) = |\ln x|^2$，$x \in \mathbf{R}^d$，有 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}(S_s) = \frac{1}{|S_s|^2} - \frac{|\ln S_s|}{|S_s|^2}$，于是 $A\Phi(S_s) = \sum_{i=1}^d (\sigma_s^{i,i})^2(1 - \ln S_s^i)$，显然有

$$E_Q[\Phi(S_T) \mid \mathscr{F}_t] = \Phi(S_t) + E_Q[\int_t^T A\Phi(S_r)\mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_t] = |\ln S_t|^2 + E_Q[\sum_i \int_t^T (\sigma_r^{i,i})^2(1-\ln S_r^i)\mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_t]。$$

联系到文献[6]中的结果：对于 $g: \Omega \times [0,T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$，满足(A3)：(一致 Lipschitz 条件)：$\forall t \in [0,T]$，$\forall (y,z),(y',z') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$，存在常数 $C \geqslant 0$，使得 $|g(t,y,z) - g(t,y',z')| \leqslant C(|y-y'| + |z-z'|)$，$P$-a.s.（平方可积）：$g(t,y,z)$ 为循序可测且满足 $E[\int_0^T |g(t,0,0)|^2 \mathrm{d}t] < \infty$。（连续性）：$t \to g(t,y,z)$，$P$-a.s. 连续。文献[6]基于文献[10]的结果，其终端条件为 S_T 的函数，则有：

引理 4

$$L^2 - \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\{{}^h y_t^{t,\Phi(x)} - \Phi(x)\} = g(t,\Phi(x),\Phi_x\sigma(x)) + A\Phi(x),$$

这里的 $\Phi\in H$,${}^hy_t^{t,\Phi(x)}$ 中的${}^{t,\Phi(x)}$ 表示从 t 时刻$\Phi(x)$出发的一个 Markov 过程,${}^hy_t^{t,\Phi(x)}$ 中的^h 表示此 Markov 过程发展到 $t+h$ 时刻,${}^hy_t^{t,\Phi(x)}$ 中的${}_t$ 表示将在 $t+h$ 时刻得到的 $\Phi(S_{t+h}^{t,\Phi(x)})$ 用倒向方程解回 t 时刻。

记 $\mathscr{A}_g^{t,S}\Phi = g(t,\Phi(x),\Phi_x\sigma(x)) + A\Phi(x)$,这里 $A\Phi$ 是上面定义的过程 S 的无穷小生成元。如果 g 不依赖于时间 t,则记:$\mathscr{A}_g^S\Phi = g(\Phi(x),\Phi_x\sigma(x)) + A\Phi(x)$,并且有:

$$\mathscr{A}_g^S\Phi(S_t) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{E[\Phi(S_{t+h}) + \int_t^{t+h} g({}^hy_u^{t,\Phi(S_t)},{}^hz_u^{t,\Phi(S_t)})\mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_t] - \Phi(S_t)}{h},\ t\in[0,T];$$

对每个固定的 $h>0$,如果 $t+h>T$,则令 $S_{t+h}\equiv S_T\in\mathscr{F}_T$。

先来给出两个理论上的结果:

引理 5　在上面的正倒向随机微分方程系统中,设其中参数 $\Phi\in H,\phi,b,\sigma$ 满足(A2),g 满足假设(A2)(A3),但此时 g 所有关于时间区间$[0,T]$的条件均改为关于时间区间$[0,\tau]$。同时 Φ 在 $\mathbf{R}^d$ 上有紧支撑,b,σ 关于(t,x)均有界,使得 S_T 属于 Φ 的紧支撑。令 $\tau>t$ 是关于信息流 $\{\mathscr{F}_r\}_{r\in[0,T]}$ 的停时,并且 $E[\tau\mid\mathscr{F}_t]<\infty$。则有:

$$\varepsilon_g[\Phi(S_\tau)\mid\mathscr{F}_t] = \Phi(\nu) + E[\int_t^\tau [g(r,\Phi(S_r),\Phi_x\sigma(r,S_r)) + A^t\Phi(S_r)]\mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_t]。$$

证明　证明只需要对 $\Phi(S_T)$ 作 Itô 公式,同时将文献[10]中的命题 2.3 稍作推广,然后使用同[8]中的引理 7.3.2 类似的方法即得。

如果 b,σ,g 均为不依赖于 t 的函数,还可得到一般的 Dynkin 公式:

推论 1　b,σ,g 均不依赖于 t,同时和 Φ 都满足上面引理 5 的条件,则有:

$$\varepsilon_g[\Phi(S_\tau)\mid\mathscr{F}_t] = \Phi(\nu) + E[\int_t^\tau \mathscr{A}_g^S\Phi(S_r)\mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_t]。$$

于是在这种非线性完备市场条件下定价,有如下结论:

定理 1　如果 Φ,b,σ,g 参数均满足引理 5 的条件。则有:

$$V_t = \varepsilon_g[\Phi(S_T)\mid\mathscr{F}_t] = \Phi(\nu) + E[\int_t^T [g(r,\Phi(S_r),\Phi_x\sigma(r,S_r)) + A^t\Phi(S_r)]\mathrm{d}r \mid \mathscr{F}_t]。$$

证明　定理证明直接由引理 5 即得。

参考文献:

[1] BLACK F, SCHOLESM. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81:637-659.

[2] HARRISON J M, PLISKA S R. Martingales and stochastic integrales in the theory of continuous trading[J]. Stochastic Processes and Applications, 1981, 11:215-260.

[3] PARDOUX E, PENG S G. Adapted solution of a backward stochastic differential equation[J]. Systems and Control Letters, 1990, 14:55-61.

[4] El Karoui N, PENG S G, QUENEZ M C. Bachward stochastic differential equations in finance[J]. Math Finance, 1997, 1:1-71.

[5] PARDOUX E, PENG S G. Backward stochastic differential equation and quasilinear parabolic patial differential equations[C]// Lecture Notes in Control and Inform Sci 176, New York: Springer, 1992, 176:200-217.

[6] CAI L. The infinitesimal generator under g-expectation, the g-supermartingale and g-superharmonic function[D]. Jinan: Shandong University, 2005.

[7] KARATZAS I, SHREVE S. Methods of mathematical finance[M]. New York: Springer, 1998.

[8] B Øksendal B. Stochastic differential equations[M]. New York: Springer, 1998.

[9] MA J, ZHANG J F. Representation theorems for backward stochastic differential equations[J]. The Annals of Applied Probability, 2002, 12(4):1390-1418.

[10] BRIAND P, COQUET F, HU Y, et al. A converse comparison theorem for BSDEs and related properties of g-expectations[J]. Electron Comm Probab, 2000, 5:101-117.

(编辑:李晓红)