

文章编号:1671-9352(2007)02-0019-09

一类余维2的高次退化平面多项式系统的极限环分布

李宗成^{1,2}

(1. 山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100; 2. 山东建筑大学 理学院, 山东 济南 250014)

摘要: 讨论了一类余维2的高次退化平面多项式系统的极限环分布,证明了此系统至多存在3个极限环.如果极限环存在,则它们有且只有7种不同的相对位置.

关键词: 极限环; 高次退化多项式系统; 余维2

中图分类号: O175.12 **文献标识码:** A

Distribution of limit cycles for a class of higher-degree degenerate planar polynomial systems of codimension two

LI Zong-cheng^{1,2}

(1. School of Math. and System Sci., Shandong Univ., Jinan 250100, Shandong, China;
2. School of Sci., Shandong Jianzhu Univ., Jinan 250014, Shandong, China)

Abstract: Distribution of limit cycles for a class of higher-degree degenerate planar polynomial systems of codimension two is discussed. It is proved that the system has at most three limit cycles. If they exist, then there will be only seven distinct relative locations.

Key words: limit cycle; higher-degree degenerate polynomial system; codimension two

0 引言

由微分动力系统理论^[1]可知,余维2的高次退化平面多项式系统

$$\dot{x} = y + X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y)$$

的普适开折可表示为如下形式:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu'_1 x + \mu'_2 y + cx^n + dx^{n-1}y. \quad (0.1)$$

其中 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 为最低次数是2的多项式, μ'_1 与 μ'_2 为实参数, c 与 d 为实常数, $n \geq 2$. 本文讨论 $c \cdot d \neq 0$ 的情形.

对系统(0.1)当 $n=2$ 和 $n=3$ 时,文[2~5]进行了局部分岔研究.当 $n=5$ 时,文[6]通过变换

$$\delta = |\mu'_1 c^{-1}|^{\frac{1}{4}}, \mu'_2 = |c|^{\frac{1}{2}} \delta^2 \mu, x = \delta \bar{x}, y = |c|^{\frac{1}{2}} \delta^3 \bar{y}, t = |c|^{-\frac{1}{2}} \delta^{-2} \bar{t},$$

变换后仍记 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$ 为 x, y, t ,把系统(0.1)化为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \pm x + \mu y \pm x^5 + \gamma \delta^2 x^4 y. \quad (0.2)$$

其中 $\gamma = d|c|^{-\frac{1}{2}}$ 利用 Picard-Fuchs 方程法进行了局部分岔研究. 应用这个方法可以研究更高次退化情形的局部分岔. 文[7~9]对 $n = 3$ 时进行了大范围分析研究, 但是如果采用 $n = 3$ 时的研究方法对 $n \geq 5$ 的情形进行研究, 我们会非常困难, 因此需要探索新的研究方法. 文[10]对系统(0.2)的一种情形

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x + \mu y - x^5 + \gamma \delta^2 x^4 y, \quad \gamma < 0$$

进行了大范围分析研究, 得到了极限环的大范围分布情况. 本文利用与上述不同的变换把系统(0.1)简化为两种情形, 受文[10]的启发, 应用文[11]关于极限环唯一性和惟二性的研究结果, 以及文献[12]关于极限环定性讨论的方法, 得到了系统(0.1)当 $n = 5$ 时的大范围分析结果.

本文安排如下, 第1节对系统(0.1)进行了简化, 将系统分为两种情形; 第2节给出了几个基本引理; 第3节和第4节分别对系统(0.1)的两种情形进行了大范围分析研究.

1 简化研究对象

当 $n = 5$ 时, 系统(0.1)为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu'_1 x + \mu'_2 y + cx^5 + dx^4 y. \tag{1.1}$$

在系统(1.1)中可假设 $d < 0$. 否则, 作变换 $y \rightarrow -y, t \rightarrow -t$, 则变换后 $x^4 y$ 的系数变为 $-d$. 当 $c > 0$ 时, 作变换 $x \rightarrow \left(\frac{c}{d^2}\right)^{\frac{1}{4}} x, y \rightarrow -\left(\frac{c}{d^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{c}{d} y, t \rightarrow -\frac{d}{c} t$, 则系统(1.1)化为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \frac{d^2}{c^2} \mu'_1 x - \frac{d}{c} \mu'_2 y + x^5 - x^4 y. \tag{1.2}$$

当 $c < 0$ 时, 作变换 $x \rightarrow \left(\frac{-c}{d^2}\right)^{\frac{1}{4}} x, y \rightarrow \left(\frac{-c}{d^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{c}{d} y, t \rightarrow \frac{d}{c} t$, 则系统(1.1)化为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \frac{d^2}{c^2} \mu'_1 x + \frac{d}{c} \mu'_2 y - x^5 - x^4 y. \tag{1.3}$$

从而对系统(1.2)和(1.3)的研究可等价于对系统

$$\dot{x} = y; \quad \dot{y} = \mu_1 x + \mu_2 y \pm x^5 - x^4 y; \quad = Q \pm(x, y) \tag{1^*}$$

的研究, 其中 μ_1 与 μ_2 为任意实参数.

2 基本引理

考虑 Liénard 型方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{2.1}$$

或它的等价方程组

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x)y - g(x). \tag{2.2}$$

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且满足保证初值解的惟一性条件, 其中 $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$. 记带形区域 $D: x \in (a, b), |y| < \infty$,

$$F(x) := \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad G(x) := \int_0^x g(\xi) d\xi.$$

为了研究方便, 先给出文[11]的两个结论.

引理 2.1^[11] 假设存在 $x'_1 \in (a, 0], x_1 \in [0, b)$ 使得

- (i) $g(x'_1) = g(x_1) = 0$, 且当 $x \notin [x'_1, x_1]$ 时, $xg(x) > 0$;
- (ii) 当 $x \in (x'_1, x_1) \cup \{0\}$ 时, $f(x) \leq 0$ ($\neq 0$);
- (iii) 函数 $f(x), g(x)(x - x_1)^{-1}$ 与 $(x - x_1)f(x)(g(x))^{-1}$ 在 (x_1, b) 上不减;
- (iv) 函数 $f(x), g(x - x'_1)^{-1}$ 与 $(x - x'_1)f(x)(g(x))^{-1}$ 在 (a, x'_1) 上不减.

如果还存在 $x'_2 \in (a, x'_1], x_2 \in [x_1, b)$ 使得

(V) $G(x'_2) = G(x_2)$;

(vi) 当 $x \in [x'_2, x_2]$ 时, $f(x) \leq 0$,

则方程组(2.2)在带域 D 中至多存在一个极限环. 如果存在, 则极限环为包围全部奇点的稳定环.

引理 2.2^[11] 假设存在 $x'_2 \in (a, 0), x_2 \in (0, b), x'_1 \in [x'_2, 0), x_1 \in (0, x_2], x'_0 \in [x'_1, 0), x_0 \in (0, x_1]$, 使得

(i) 当 $x \in [x_0, x_2] \cup (x'_2, x'_0]$ 时, $xg(x) < 0$, 当 $x \in (x_2, b) \cup (a, x'_2)$ 时, $xg(x) > 0$;

(ii) 当 $x \in (x'_1, x_1)$ 时, $f(x) \leq 0 (\neq 0)$, 当 $x \notin (x'_1, x_1)$ 时, $f(x) \geq 0$;

(iii) $F(x_0) = F(x_2), F(x'_0) = F(x'_2)$;

(iv) 函数 $f(x), g(x)(x - x_2)^{-1}$ 与 $(x - x_2)f(x)(g(x))^{-1}$ 在 (x_2, b) 上不减, 函数 $f(x), g(x)(x - x'_2)$ 与 $(x - x'_2)f(x)(g(x))^{-1}$ 在 (a, x'_2) 上不增,

则方程组(2.2)在带域 D 中至多存在两个包围全部奇点的极限环. 如果存在两个极限环, 则外(里)面的那个极限环必定是稳定(不稳定)的.

考虑方程(2.1)另一形式的等价方程组

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -g(x). \tag{2.3}$$

假设当 $x \in (a, b)$ 且 $x \neq 0$ 时, $xg(x) > 0$. $\limsup_{x \rightarrow b-0} F(x) = +\infty, \liminf_{x \rightarrow a+0} F(x) = -\infty$, 当 $b = +\infty$ 时, $x \rightarrow b-0$ 表示 $x \rightarrow +\infty$; 当 $a = -\infty$ 时, $x \rightarrow a+0$ 表示 $x \rightarrow -\infty$. 作变换 $z = G(x)$, 此变换在 $x > 0$ 或 $x < 0$ 上单调, 从而可逆. 所以方程组(2.3)化为

$$\frac{dz}{dy} = F_i(z) - y, \quad 0 < z < z_{0i}, \quad i = 1, 2, \tag{E}_i$$

其中 $F_i(z) := F(x_i(z)), x_i(z)$ 是 $z = G(x)((-1)^{i+1}x > 0)$ 的反函数, $i = 1, 2, z_{01} = G(b), z_{02} = G(a)$.

下面给出方程组(2.3)不存在闭轨线的两个充分条件.

引理 2.3 假设 $F_1(z), F_2(z) \in C^0[0, +\infty) \cap C^1(0, +\infty)$. 如果当 $z \geq 0$ 时, $F_2(z) \geq (\leq) F_1(z)$, 而当 $0 < z \ll 1$ 时, $F_2(z) \neq F_1(z)$, 则方程 $(E)_1$ 和 $(E)_2$ 的具有相同初值条件 $z_1(y_0) = z_2(y_0) (y_0 < 0)$ 的解 $z_1(y)$ 和 $z_2(y)$, 满足 $z_1(y) < (>) z_2(y), y \in (y_0, y_r]$, 其中 $[y_0, y_r]$ 是 $z_1(y)$ 和 $z_2(y)$ 右行解的公共存在区间. 从而方程组(2.3)不存在闭轨线.

证明 考虑方程组

$$\frac{dz}{dt} = F_i(z) - y, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad i = 1, 2. \tag{H}_i$$

下面证明在区域 $I: z \geq 0, y > F_i(z)$ 上, 方程组 $(H)_i$ 的正半轨 L_{ci}^+ 与 y 的正半轴相交.

用反证法, 假设不然. 在区域 I 上, 当 t 增加时方程组 $(H)_i$ 的解 $z_i(t)$ 单调下降, $y_i(t)$ 单调上升. 若 L_{ci}^+ 有界, 则 L_{ci}^+ 在区域 I 上有惟一极限点 J , 且 J 必为奇点, 但显然方程组 $(H)_i$ 在区域 I 上无奇点, 得矛盾. 若 L_{ci}^+ 无界, 则 L_{ci}^+ 必有垂直渐近线 $z = l$, 但当 $z \rightarrow l, y \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{F_i(z) - y} \rightarrow 0$, 又得矛盾. 所以方程组 $(H)_i$ 的正半轨 L_{ci}^+ 与 y 的正半轴相交. 同理可证方程 $(H)_i$ 的负半轨 L_{ci}^- 在区域 $z \geq 0, y < F_i(z)$ 上与 y 的负半轴相交. 从而方程 $(E)_i$ 的轨线必与 y 的正负半轴相交. 考虑方程 $(E)_i$ 过相同初始点 $N(y_0, 0) (y_0 < 0)$ 的解 $z_i(y)$ (见图1与图2).

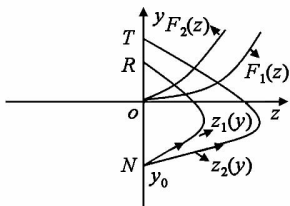


图1

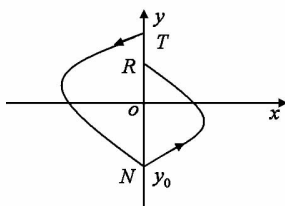


图2

当 $z \geq 0$ 时,不妨设 $F_2(z) \geq F_1(z)$,而当 $0 < z \ll 1$ 时, $F_2(z) \neq F_1(z)$,所以当 $0 < z \ll 1$ 时, $F_2(z) - y > F_1(z) - y$.由微分方程比较定理得方程 $(E)_1$ 和 $(E)_2$ 的解 $z_1(y)$ 和 $z_2(y)$,满足 $z_1(y) < z_2(y)$, $y \in (y_0, y_r]$,其中 $[y_0, y_r]$ 是 $z_1(y)$ 和 $z_2(y)$ 右行解的公共存在区间.假设在 (z, y) 平面内轨线 $z_1(y)$ 和 $z_2(y)$ 分别对应弧 NR 和 NT ,则弧 NR 整个位于弧 NT 的左边,返回到 (x, y) 平面就得到经过点 $N(0, y_0)$ 的轨线段 TNR ,如图 R 在 T 的下方,所以方程组(2.3)不存在闭轨线.当 $F_2(z) \leq F_1(z)$ 时同理可证.

引理 2.4 假设 (x, u) 平面上的两条曲线 $F(x) = F(u)$ 和 $G(x) = G(u)$ 在区域 $u < 0, x > 0$ 或 $u > 0, x < 0$ 内不相交,则方程组(2.3)不存在闭轨线.

证明 下面仅证明方程组(2.3)在第一种情形下不存在闭轨线,第二种情形类似可证.当 $x > 0$ 时,令 $z = G(x)$,则 $F(x) = F_1(z)$;当 $u < 0$ 时,令 $U = G(u)$,则 $F(u) = F_2(U)$.由 $G(x) = G(u)$ 知 $z = U$.由曲线 $F(x) = F(u)$ 和 $G(x) = G(u)$ 在区域 $u < 0, x > 0$ 内不相交,可得 $F_1(z) \neq F_2(z)$,故由引理2.3得方程组(2.3)不存在闭轨线.

3 系统 (1^+) 的极限环分布

本节讨论系统 (1^+) 的大范围分析.对系统 (1^+) ,当 $\mu_1 < 0$ 时,有三个奇点 $O(0,0)$, $A_1(\sqrt[4]{-\mu_1}, 0)$ 和 $B_1(-\sqrt[4]{-\mu_1}, 0)$;当 $\mu_1 \geq 0$ 时,只有惟一奇点 $O(0,0)$.

定理 3.1 对于系统 (1^+) 有以下结论:

- (i) 当 $\mu_1 > 0$ 时,系统无闭轨;
- (ii) 当 $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ 时,系统产生 Pitchfork 分岔;
- (iii) 当 $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ 时,系统无闭轨;
- (iv) 当 $\mu_1 < 0, \mu_2 = 0$ 时,系统发生 Hopf 分岔;
- (v) 当 $\mu_1 < 0$ 时,存在 μ_1 的某个函数 $\mu_2^*(\mu_1)$,使得当 $0 < \mu_2 < \mu_2^*(\mu_1)$ 时,系统存在惟一的包围奇点 O 的稳定极限环;
- (vi) 当 $\mu_1 < 0, \mu_2 = \mu_2^*(\mu_1)$ 时,系统存在连接奇点 A_1 和 B_1 的异宿环;
- (vii) 当 $\mu_1 < 0, \mu_2 > \mu_2^*(\mu_1)$ 时,系统的异宿环破裂且系统无极限环.

证明 (i) 当 $\mu_1 > 0$ 时,由于系统的惟一奇点 O 为鞍点,所以此时系统 (1^+) 无闭轨.

(ii) 当 $\mu_1 = 0$ 时,系统 (1^+) 变为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu_2 y + x^5 - x^4 y. \quad (3.1)$$

由中心流形理论^[1],考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{\mu}_1 = 0, \\ \dot{y} = \mu_1 x + \mu_2 y + x^5 - x^4 y, \end{cases} \quad (3.2)$$

用线性变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_2} \begin{pmatrix} \mu_2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

将(3.2)变为

$$\begin{cases} \dot{u} = f_1(u, v, \mu_1), \\ \dot{\mu}_1 = 0, \\ \dot{v} = \mu_2 v + g_1(u, v, \mu_1). \end{cases} \quad (3.3)$$

其中 $f_1(u, v, \mu_1) = -g_1(u, v, \mu_1) = -\frac{1}{\mu_2} [\mu_1(u+v) + (u+v)^5 - \mu_2 v(u+v)^4]$.则系统(3.3)的中心流形可表示为

$$W^c = \{(u, \mu_1, v) \mid v = h(u, \mu_1), h(0,0) = 0, Dh(0,0) = 0\}.$$

对充分小的 u 和 μ_1, h 满足

$$D_u h(u, \mu_1) f_1(u, h(u, \mu_1), \mu_1) - \mu_2 h(u, \mu_1) - g_1(u, h(u, \mu_1), \mu_1) = 0. \tag{3.4}$$

令 $h(u, \mu_1) = \sum_{k=2}^4 \sum_{i=0}^k a_{ki} u^i \mu_1^{k-i} + \dots$, 将其代入(3.4)式, 比较等式两边 u 和 μ_1 的同次幂系数, 得

$$a_{21} = -\frac{1}{\mu_2}, a_{31} = \frac{2}{\mu_2^4}, a_{41} = -\frac{5}{\mu_2^6}, a_{ki} = 0, i = 0, 2, \dots, k, k = 2, 3, 4.$$

所以 $h = -\frac{1}{\mu_2} u \mu_1 + \frac{2}{\mu_2^4} u \mu_1^2 - \frac{5}{\mu_2^6} u \mu_1^3 + O(5)$, 其中 $O(5)$ 表示 $u^\alpha \mu_1^\beta (\alpha + \beta = 5)$ 的同阶无穷小. 因此系统(3.3)的中心流形为

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{1}{\mu_2} u [\mu_1 (1 - \frac{1}{\mu_2} \mu_1 + \frac{2}{\mu_2^4} \mu_1^2 - \frac{5}{\mu_2^6} \mu_1^3) + u^4] + O(6), \\ \dot{\mu}_1 = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

其中 $O(6)$ 表示 $u^\alpha \mu_1^\beta (\alpha + \beta = 6)$ 的同阶无穷小. 由文[1]关于 Pitchfork 分岔的判定知系统(3.5)在 $(u, \mu_1) = (0, 0)$ 时发生 Pitchfork 分岔, 所以系统(1⁺) 在 $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ 时发生 Pitchfork 分岔.

(iii) 当 $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ 时, 由于 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q_+}{\partial y} = \mu_2 - x^4 < 0$, 所以由 Bendixson-Dulac 定理知系统无闭轨.

(iv) 当 $\mu_1 < 0, \mu_2 = 0$ 时, 奇点 O 为焦点. 令 $\xi = -\mu_1 x, \eta = -\sqrt{-\mu_1} y, \tau = \sqrt{-\mu_1} t, \sigma = \sqrt{-\mu_1}$, 则系统(1⁺) 变为

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\eta, \frac{d\eta}{d\tau} = \xi + \epsilon_1 \xi^5 + \epsilon_2 \xi^4 \eta. \tag{3.6}$$

其中 $\epsilon_1 = -\sigma^{-10}, \epsilon_2 = -\sigma^{-9}$. 由文[13]取形式级数 $\Phi(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 + \Phi_3(\xi, \eta) + \Phi_4(\xi, \eta) + \dots$, 其中 $\Phi_i(\xi, \eta)$ 为 ξ 和 η 的 i 次齐次多项式, $i = 3, 4, \dots$, 则 $\Phi(\xi, \eta)$ 关于系统(3.6)的全微分为

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Phi}{d\tau} \right|_{(3.6)} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{d\tau} = -\left(2\xi + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial \xi} + \dots\right) \eta + \\ &\quad \left(2\eta + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial \eta} + \dots\right) (\xi + \epsilon_1 \xi^5 + \epsilon_2 \xi^4 \eta). \end{aligned}$$

令三次项为零并取极坐标得 $\frac{d\Phi_3(\cos\theta, \sin\theta)}{d\theta} = 0$, 由此求得三次齐次函数 $\Phi_3(\xi, \eta) = 0$. 同理可求得 $\Phi_4(\xi, \eta) = 0, \Phi_5(\xi, \eta) = 0$. 令六次项为零:

$$-\eta \frac{\partial \Phi_6}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_6}{\partial \eta} \xi + 2\epsilon_1 \xi^5 \eta + 2\epsilon_2 \xi^4 \eta^2 = 0,$$

取极坐标, 上式化为

$$\frac{d\Phi_6(\cos\theta, \sin\theta)}{d\theta} = -2\epsilon_1 \cos^5 \theta \sin\theta - 2\epsilon_2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta,$$

但 $\int_0^{2\pi} 2\epsilon_1 \cos^5 \theta \sin\theta d\theta = 0, \int_0^{2\pi} 2\epsilon_2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\pi}{4} \epsilon_2 \neq 0$. 所以改取 Φ_6 满足方程

$$\frac{d\Phi_6(\cos\theta, \sin\theta)}{d\theta} = -2\epsilon_1 \cos^5 \theta \sin\theta - 2\epsilon_2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + C_6.$$

其中 $C_6 = \frac{\epsilon_2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{\epsilon_2}{8}$. 所以 $\frac{d\Phi}{d\tau} = C_6 r^6 + o(r^6)$, 其中 $r^2 = \xi^2 + \eta^2, o(r^6)$ 表示 r^6 的高阶无穷小,

奇点 O 的二阶焦点量 $V_2 = \frac{\epsilon_2}{8} = -(8\sigma^9)^{-1} < 0$. 当 $\mu_1 < 0, \mu_2 = 0$ 时, 奇点 O 为稳定细焦点, 当 μ_2 向正向微扰时, 奇点 O 由二阶稳定细焦点变为不稳定焦点, 从而系统必在奇点 O 的外围跳出一个稳定极限环, 所以当 $\mu_1 < 0, \mu_2 = 0$ 时, 发生 Hopf 分岔.

(v) ~ (vii) 当 $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ 时, 奇点 O 为源点, A_1 和 B_1 为鞍点, 所以由 Bendixson 指数公式知系统(1⁺) 不存在包围三个奇点的大环.

假设 $0 < \mu'_2 < \mu''_2$, 由于

$$\begin{vmatrix} y & \mu_1 x + \mu'_2 y + x^5 - x^4 y \\ y & \mu_1 x + \mu''_2 y + x^5 - x^4 y \end{vmatrix} = (\mu''_2 - \mu'_2) y^2 > 0,$$

所以系统(1⁺)对 μ_2 构成广义旋转向量场. 当 μ_2 从 0 增大时, 向量场逆时针旋转, 围绕奇点 O 的极限环逐渐扩大, 过奇点 A_1 和 B_1 的两对分界线分别互相靠近, 直到出现 μ_1 的某一个函数 $\mu_2^*(\mu_1)$, 使得当 $\mu_2 = \mu_2^*(\mu_1)$ 时, 出现连接 A_1 和 B_1 的异宿环, 而围绕原点的极限环消失于上述的异宿环, 当 $\mu_2 > \mu_2^*(\mu_1)$ 时, 异宿环破裂, 且系统无极限环.

4 系统(1⁻)的极限环分布

当 $\mu_1 \leq 0$ 时, 系统(1⁻)有惟一奇点 O . 当 $\mu_1 > 0$ 时, 系统(1⁻)除奇点 O 外, 还有奇点 $A_2(\sqrt[4]{\mu_1}, 0)$ 和 $B_2(-\sqrt[4]{\mu_1}, 0)$, 并且若 $\mu_2 > (<)\mu_1, \mu_1 > 0$, 则 A_2 和 B_2 为源(汇)点; 若 $\mu_1 = \mu_2 > 0$, 则 A_2 和 B_2 为中心. 对于奇点 O , 若 $\mu_1 > 0$, 则 O 为鞍点; 若 $\mu_1 = 0$, 则 O 为复杂奇点; 若 $\mu_1 < 0, \mu_2 = 0$, 则 O 为中心; 若 $\mu_1 < 0, \mu_2 > (<)0$, 则 O 为源(汇)点.

定理 4.1 (i) 当 $\mu_2 \leq 0$ 时, 系统(1⁻)无闭轨.

(ii) 当 $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$ 时, 系统(1⁻)不存在只包围一个奇点的极限环, 且包围三个奇点的大环至多一个. 如果存在, 则极限环是稳定的.

证明 (i) 当 $\mu_2 \leq 0$ 时, 由于 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \mu_2 - x^4 \leq 0$, 所以由 Bendixson-Dulac 定理知, 系统(1⁻)无闭轨.

(ii) 首先证明当 $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$ 时, 系统(1⁻)不存在只包围一个奇点的极限环. 由于此时奇点 O 为鞍点, 所以不存在只包围奇点 O 的极限环. 由系统(1⁻)的对称性, 只对奇点 A_2 证明即可. 由于奇点 O 为鞍点, 且 $\dot{x} = y$, 所以只包围奇点 A_2 的极限环不与 $x = 0$ 相交. 令 $L = x + y = 0$. 当 $x > 0$ 时, 沿系统(1⁻)有 $\left. \frac{dL}{dt} \right|_{L=0} = -(\mu_2 - \mu_1 + 1)x < 0$, 从而只包围奇点 A_2 的闭轨也不与 L 相交. 取 Dulac 函数 $B(x, y) = \frac{x}{x+y}$, 则对系统(1⁻)有 $\text{div}(BP, BQ_-) = \frac{(\mu_2 - \mu_1)x^2 + y^2}{(x+y)^2} \geq 0$, 从而不存在只包围奇点 A_2 的极限环.

其次, 为了讨论包围三个奇点的大环, 将系统(1⁻)改写为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f_2(x)y - g_2(x). \quad (4.1)$$

其中 $f_2(x) = x^4 - \mu_2, g_2(x) = x^5 - \mu_1 x$. 取带形区域 $D_1: x \in (a_1, b_1), |y| < \infty$, 其中 $a_1 = -\sqrt[4]{\mu_1} - \delta, b_1 = \sqrt[4]{\mu_1} + \delta, \delta > 0$ 充分小. 取 $x'_1 = -\sqrt[4]{\mu_1}, x_1 = \sqrt[4]{\mu_1}$, 则 $x'_1 \in (a_1, 0), x_1 \in (0, b_1)$, 对方程组(4.1)有:

(i) $g_2(x'_1) = g_2(x_1) = 0$, 且当 $x \notin [x'_1, x_1]$ 时, $xg_2(x) = x^2(x^4 - \mu_1) > 0$.

(ii) 当 $x = 0$ 时, $f_2(0) = -\mu_2 < 0$; 当 $x \in (x'_1, x_1)$ 时, $f_2(x) = x^4 - \mu_2 \leq x^4 - \mu_1 < 0$.

(iii) 当 $x \in (x_1, b_1)$ 时, 令

$$M_1(x) = \frac{g_2(x)}{x - \sqrt[4]{\mu_1}} = \frac{x^5 - \mu_1 x}{x - \sqrt[4]{\mu_1}} = x(x^2 + \sqrt{\mu_1})(x + \sqrt[4]{\mu_1}),$$

$$M_2(x) = \frac{x - \sqrt[4]{\mu_1}}{g_2(x)} f_2(x) = \frac{x - \sqrt[4]{\mu_1}}{x^5 - \mu_1 x} (x^4 - \mu_2) = \frac{x^4 - \mu_2}{x(x^2 + \sqrt{\mu_1})(x + \sqrt[4]{\mu_1})},$$

则

$$\frac{dM_1(x)}{dx} = 4x^3 + 2\sqrt[4]{\mu_1}x^2 + 2\sqrt{\mu_1}x + \sqrt[4]{\mu_1^3} > 0,$$

$$\frac{dM_2(x)}{dx} = \frac{x^6 \sqrt[4]{\mu_1} + 2x^5 \sqrt{\mu_1} + 3x^4 \sqrt[4]{\mu_1^3} + \mu_2(x^2 + \sqrt{\mu_1})(2x + \sqrt[4]{\mu_1}) + 2\mu_2 x^2(x + \sqrt[4]{\mu_1})}{x^2(x^2 + \sqrt{\mu_1})^2(x + \sqrt[4]{\mu_1})^2} > 0,$$

而且 $\frac{df_2(x)}{dx} = 4x^3 > 0$. 所以 $M_1(x), M_2(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $x \in (x_1, b_1)$ 上都不减.

(iv) 同(iii) 可证 $f_2(x), \frac{g_2(x)}{x + \sqrt[4]{\mu_1}}$ 及 $\frac{x + \sqrt[4]{\mu_1}}{g_2(x)} f_2(x)$ 在 $x \in (a_1, x'_1)$ 上都不增.

(v) 取 $x'_2 = x'_1, x_2 = x_1$, 可得 $G_2(x'_1) = G_2(x_1)$, 其中 $G_2(x) = \int_0^x g_2(\xi) d\xi$.

从而由引理 2.1 知系统(1⁻) 至多存在一个极限环. 如果存在, 则极限环为包围三个奇点的稳定环.

定理 4.2 对于系统(1⁻), 如果 $0 < \mu_2 < \mu_1$ 那么系统至多存在三个极限环. 若只包围一个奇点的环存在, 则只包围奇点 A_2 或 B_2 的环至多各一个. 如果存在, 则极限环为不稳定环. 此时包围三个奇点的大环也至多一个, 如果存在, 则极限环为稳定环; 若只包围一个奇点的环不存在, 则包围三个奇点的大环至多两个.

证明 首先证明当 $0 < \mu_2 < \mu_1$ 时, 系统(1⁻) 只包围一个奇点的极限环至多一个, 由系统(1⁻) 的对称性, 只对奇点 A_2 证明即可. 把原点移到奇点 A_2 , 令 $\bar{x} = x - \sqrt[4]{\mu_1}, \bar{y} = y$, 变换后仍以 x 和 y 表示 \bar{x} 和 \bar{y} , 则系统(1⁻) 变为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f_3(x)y - g_3(x). \tag{4.2}$$

其中 $f_3(x) = (x + \sqrt[4]{\mu_1})^4 - \mu_2, g_3(x) = (x + \sqrt[4]{\mu_1})^5 - \mu_1(x + \sqrt[4]{\mu_1})$. 下面验证系统(4.2) 满足文[12, 定理 4.6] 的全部条件.

(i) 当 $x \in (-\sqrt[4]{\mu_1}, 0) \cup (0, +\infty)$ 时, $xg_3(x) = x^2(x + \sqrt[4]{\mu_1}), (x + 2\sqrt[4]{\mu_1})[(x + \sqrt[4]{\mu_1})^2 + \sqrt[4]{\mu_1}] > 0$.

(ii) $f_3(0) = \mu_1 - \mu_2 > 0$.

(iii) $\frac{d}{dx}(\frac{f_3(x)}{g_3(x)}) = \frac{M_3(x)}{(g_3(x))^2}$, 其中

$$M_3(x) = f'_3(x)g_3(x) - f_3(x)g'_3(x) = -[(x + \sqrt[4]{\mu_1})^8 + (3\mu_1 - 5\mu_2)(x + \sqrt[4]{\mu_1})^4 + \mu_1\mu_2].$$

当 $0 < \mu_2 \leq \frac{3}{5}\mu_1$ 时, $M_3(x) < 0$; 当 $\frac{3}{5}\mu_1 < \mu_2 < \mu_1$ 时, 令 $\Delta = (3\mu_1 - 5\mu_2)^2 - 4\mu_1\mu_2 = (9\mu_1 - 25\mu_2)(\mu_1 - \mu_2) < 0$, 从而 $M_3(x) < 0$. 因此当 $0 < \mu_2 < \mu_1$ 时, $\frac{d}{dx}(\frac{f_3(x)}{g_3(x)}) < 0$.

所以依据[12, 定理 4.6] 知系统(1⁻) 只包围奇点 A_2 的极限环至多有一个. 如果存在, 则极限环必为不稳定环.

其次, 讨论包围三个奇点大环的情形. 下面证明当 $0 < \mu_2 \leq \frac{1}{5}\mu_1$ 时, 系统(1⁻) 在区域 $|x| > \sqrt[4]{\mu_1}$ 上不存在大环.

当 $\mu_2 = \frac{1}{5}\mu_1$ 时, 若 $x > \sqrt[4]{\mu_1}$, 令 $\bar{x} = x - \sqrt[4]{\mu_1}, \bar{y} = y$, 变换后仍以 x 和 y 表示 \bar{x} 和 \bar{y} , 则系统(1⁻) 变为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f_4(x)y - g_4(x). \tag{4.3}$$

其中 $f_4(x) = (x + \sqrt[4]{\mu_1})^4 - \frac{1}{5}\mu_1, g_4(x) = (x + \sqrt[4]{\mu_1})^5 - \mu_1(x + \sqrt[4]{\mu_1})$. 考虑其等价的系统

$$\dot{x} = y - F_4(x), \quad \dot{y} = -g_4(x). \tag{4.4}$$

其中 $F_4(x) = \int_0^x f_4(\xi) d\xi = \frac{1}{5}[(x + \sqrt[4]{\mu_1})^5 - \mu_1 x - \mu_1 \sqrt[4]{\mu_1}]$.

令 $G_4(x) = \int_0^x g_4(\xi) d\xi = \frac{1}{6}[(x + \sqrt[4]{\mu_1})^6 - \mu_1 \sqrt[4]{\mu_1}] - \frac{1}{2}[\mu_1(x + \sqrt[4]{\mu_1})^2 - \mu_1 \sqrt[4]{\mu_1}]$. 下面证明曲线 $F_4(x) = F_4(u)$ 和 $G_4(x) = G_4(u)$ 在带形区域 $D_2: u < 0, x > 0$ 内不相交, 即证明以下方程组在 D_2 内无解:

$$\begin{cases} (u + \sqrt[4]{\mu_1})^4 + (u + \sqrt[4]{\mu_1})^3(x + \sqrt[4]{\mu_1}) + (u + \sqrt[4]{\mu_1})^2(x + \sqrt[4]{\mu_1})^2 + \\ \quad (u + \sqrt[4]{\mu_1})(x + \sqrt[4]{\mu_1})^3 + (x + \sqrt[4]{\mu_1})^4 = \mu_1, \\ (u + x + 2\sqrt[4]{\mu_1})[(u + \sqrt[4]{\mu_1})^4(u + \sqrt[4]{\mu_1})^2(x + \sqrt[4]{\mu_1})^2 + (x + \sqrt[4]{\mu_1})^4] = 3\mu_1(u + x + 2\sqrt[4]{\mu_1}). \end{cases}$$

若 $u + x + 2\sqrt[4]{\mu_1} = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -2\sqrt[4]{\mu_1}$, 均不在 D_2 内;

若 $u + x + 2\sqrt[4]{\mu_1} \neq 0$, 联立得:

$$2(u + \sqrt[4]{\mu_1})^4 + 3(u + \sqrt[4]{\mu_1})^3(x + \sqrt[4]{\mu_1}) + 2(u + \sqrt[4]{\mu_1})^2(x + \sqrt[4]{\mu_1})^2 + 3(u + \sqrt[4]{\mu_1})(x + \sqrt[4]{\mu_1})^3 + 2(x + \sqrt[4]{\mu_1})^4 = [2(u + \sqrt[4]{\mu_1})^2 - (u + \sqrt[4]{\mu_1})(x + \sqrt[4]{\mu_1}) + 2(x + \sqrt[4]{\mu_1})^2] \cdot (u + x + 2\sqrt[4]{\mu_1})^2 = 0,$$

即
$$2(u + \sqrt[4]{\mu_1})^2 - (u + \sqrt[4]{\mu_1})(x + \sqrt[4]{\mu_1}) + 2(x + \sqrt[4]{\mu_1})^2 = 0$$

看作关于 $u + \sqrt[4]{\mu_1}$ 的一元二次方程, 其判别式 $\Delta = -15(x + \sqrt[4]{\mu_1})^2 < 0$, 所以方程无解, 从而方程组在 D_2 内无解. 由引理 2.4 知, 系统(1⁻) 在 $x > \sqrt[4]{\mu_1}$ 内不存在极限环. 若 $x - \sqrt[4]{\mu_1}$, 同理可证系统(1⁻) 不存在极限环.

由于系统(1⁻) 对 μ_2 形成广义旋转向量场, 所以由旋转向量场理论知, 当 $0 < \mu_2 \leq \frac{1}{5}\mu_1$ 时, 系统(1⁻) 在区域 $|x| > \sqrt[4]{\mu_1}$ 上不存在极限环, 从而不存在包围三个奇点的大环.

当 $\frac{1}{5}\mu_1 < \mu_2 < \mu_1$ 时, 取带形区域

$$D_3: x \in (a_3, b_3), |y| < +\infty.$$

其中 $a_3 = -\sqrt[4]{\mu_1} - \delta, b_3 = \sqrt[4]{\mu_1} + \delta, \delta$ 充分小.

取 $x'_2 = -\sqrt[4]{\mu_1}, x'_1 = -\sqrt[4]{\mu_2}, x_1 = \sqrt[4]{\mu_2}, x_2 = \sqrt[4]{\mu_1}$. 令 $W(x) := x^4 + \sqrt[4]{\mu_1}x^3 + \sqrt{\mu_1}x^2 + \sqrt[4]{\mu_1^3}x + \mu_1 - 5\mu_2$, 由于 $W(0) = \mu_1 - 5\mu_2 < 0, W(x_1) > 0$, 所以方程 $W(x) = 0$ 必存在一个正根 x_0 , 使得 $x_0 \in (0, x_1)$. 令 $x'_0 = -x_0$, 则 $x'_0 \in (x'_1, 0)$. 对方程组(4.1) 有:

(i) 当 $x \in [x_0, x_2] \cup (x'_2, x'_0]$ 时, $xg_2(x) = x(x^5 - \mu_1x) = x^2(x^4 - \mu_1) < 0$; 当 $x \in (x_2, b_3) \cup (a_3, x'_2)$ 时, $xg_2(x) > 0$;

(ii) 当 $x \in (x'_1, x_1)$ 时, $f_2(x) = x^4 - \mu_2 < 0$; 当 $x \notin (x'_1, x_1)$ 时, $f_2(x) \geq 0$;

(iii) $F_2(x_0) = F_2(x_2), F_2(x'_0) = F_2(x'_2)$, 其中 $F_2(x) = \int_0^x f_2(\xi) d\xi = \frac{1}{5}x^5 - \mu_2x$;

(iv) 类似于定理 4.1 的证明, 可证得函数 $f_2(x), g_2(x)(x - x_2)^{-1}, (x - x_2)f_2(x)(g_2(x))^{-1}$ 在 (x_2, b_3) 上不减; 函数 $f_2(x), g_2(x)(x - x'_2)^{-1}, (x - x'_2)f_2(x)(g_2(x))^{-1}$ 在 (a_3, x'_2) 上不减. 从而由引理 2.2 知, 系统(1⁻) 在带域 D_3 上至多存在两个包围全部奇点的极限环. 如果存在两个极限环, 则外(里) 环必是稳定(不稳定) 的. 下面分三种情形讨论.

(a) 若只包围奇点 A_2 或 B_2 的极限环存在, 分别记为 L_{A_2} 和 L_{B_2} , 则 L_{A_2} 和 L_{B_2} 为惟一包围一个奇点的不稳定极限环.

假设最内包围奇点 A_2, B_2 和 O 的大环为 L_1 , 则 L_1 必为内侧稳定. 下证 L_1 必为外侧稳定. 若不然, 由于系统(1⁻) 关于 μ_2 形成广义旋转向量场, 微扰 μ_2 , 则 L_1 必分解成两个环 $L_1^* \subset L_2^*$, 且 L_1^* 至少内侧稳定, L_2^* 至少外侧不稳定, 这与上述结论矛盾. 所以 L_1 为稳定极限环, 且 L_1 之外无其它极限环, 此时系统至多存在三个极限环.

(b) 若只包围奇点 A_2 或 B_2 的极限环不存在, 但存在过奇点 O 的双同宿环(过奇点 O 的 ∞ 分界线环).

由于 $(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q_-}{\partial y}) \Big|_{(0,0)} = \mu_2 > 0$, 所以双同宿环为不稳定的. 假设最内包围双同宿环的极限环为 L_1 , 则 L_1 必为内侧稳定. 重复情形(a) 的讨论可得 L_1 为稳定环, 且 L_1 的外围没有其它的极限环.

(c) 若只包围奇点 A_2 或 B_2 的极限环以及过奇点 O 的双同宿环都不存在.

由于奇点 A_2 和 B_2 都为汇点, 所以最内包围三个奇点的极限环 L_1 必为内侧不稳定. 若 L_1 外侧不稳定, 则重复情形(a) 的讨论可得, L_1 的外围至多存在一个稳定环 L_2 , 此时系统(1⁻) 至多存在两个大环包围三个奇点; 若 L_1 外侧稳定, 则它是惟一的二重环. 若不然, 设 L_2 是最靠近 L_1 的环, 则 L_2 必为内侧不稳定, 这与上述

已证矛盾.所以 L_1 的外围无环,微扰 μ_2 可使 L_1 分解为两个以上的环,但由于上述讨论, L_1 只能分解成两个环,这就证明了 L_1 为唯一的二重环.

定理 4.3 当 $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \infty$ 时,系统(1⁻)必存在惟一的包围三个奇点的稳定大环,不存在其它的极限环.

证明 由定理 4.1 知,当 $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \infty$ 时,系统(1⁻)不存在只包围一个奇点的极限环,且包围三个奇点的大环至多一个,所以只需证明存在性.

由于此时奇点 A_2 和 B_2 为源点,所以只需作外境界线 S ,使系统(1⁻)的轨线与 S 相交时都由外部穿入内部.为此,验证方程组(4.1)满足 Levinson 关于耗散系统的三个条件:

- (i) 取 $\mu > \mu_2$.当 $|x| \geq \sqrt[4]{\mu}$ 时, $f_2(x) \geq \mu - \mu_2$,当 $|x| < \sqrt[4]{\mu}$ 时, $f_2(x) \geq -\mu_2$;
- (ii) 当 $x \geq \sqrt[4]{\mu}$ 时, $g_2(x) = x^5 - \mu_1 x$ 单调上升,当 $|x| \geq \sqrt[4]{\mu}$ 时, $xg_2(x) > 0$;
- (iii) 当 $|x| \rightarrow +\infty$ 时, $|g_2(x)| = |x^5 - \mu_1 x| \rightarrow +\infty$, $\frac{g_2(x)}{G_2(x)} = \frac{x^5 - \mu_1 x}{\frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{2}\mu_1 x^2} = O(\frac{1}{x})$.

所以由文[12,定理 8.1]知,系统(1⁻)存在包围三个奇点的大环.于是,定理得证.

由以上讨论,可得到如下结果:

定理 4.4 系统(1⁻)的极限环有且仅有如下六种分布:

- (1) 当 $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ 时,存在惟一的稳定环包围原点;
- (2) 当 $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \infty$ 时,存在惟一的稳定大环包围三个奇点;
- (3) 当 $0 < \frac{3}{4}\mu_1 < \mu_2 < \mu_1$ 时,存在一个大环包围两个小环;
- (4) 当 $\mu_2 = \frac{3}{4}\mu_1 > 0$ 时,存在一个大环包围过原点的同宿环;
- (5) 存在一个常数 $0 < \xi < \frac{3}{4}$,当 $0 < \xi\mu_1 < \mu_2 < \frac{3}{4}\mu_1$ 时,存在二包围三个奇点的两个大环;
- (6) 当 $\mu_2 = \xi\mu_1 > 0$ 时,存在惟一的二重环.

证明 当 $\mu_2 \leq 0$ 时,由定理 4.1 知系统(1⁻)无闭轨.当 $\mu_1 < 0, \mu_2 = 0$ 时,类似于定理 3.1(iv) 的证明可知系统(1⁻)发生 Hopf 分岔(略),从而当 $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ 时,系统(1⁻)产生惟一包围原点的稳定环,为情形(1).当 $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \infty$ 时,为情形(2),这就是定理 4.3.

下证(3)~(6).当 $\mu_1 = \mu_2$ 时,由定理 4.3 知系统(1⁻)存在一个包围三个奇点的稳定环 L_0 ,且无其它环.由于此时奇点 A_2 和 B_2 都为不稳定细焦点,所以微扰 μ_2 使得 $\mu_2 < \mu_1$,将会把奇点 A_2 和 B_2 变为稳定焦点,从而从奇点 A_2 和 B_2 的外围各跳出一个不稳定环 L_{A_2} 和 L_{B_2} .

下证 L_0 不消失.若不然,由于 L_0 包围三个奇点且随 μ_2 减小时缩小,所以它只能消失与过原点的同宿环,此同宿环必外侧稳定.但是奇点 O 的鞍点量 $\sigma = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q_-}{\partial y}) \Big|_{(0,0)} = \mu_2 > 0$,得矛盾,故 L_0 不消失.由定理 4.2 知,此时恰有一个大环且呈(3)分布.在分布(3)中,由系统(1⁻)为广义旋转向量场知,不稳定环 L_{A_2} 和 L_{B_2} 随 μ_2 减小而扩大,稳定环 L_0 则减小.注意到奇点 O 的鞍点量 $\sigma > 2$,所以 L_{A_2} 和 L_{B_2} 将同时消失与过原点的同宿环,由文[6]知,此时 $\mu_2 = \frac{3}{4}\mu_1$.这就是说,当 $\frac{3}{4}\mu_1 < \mu_2 < \mu_1$ 时,呈(3)分布.当 $\mu_2 = \frac{3}{4}\mu_1$ 时,呈(4)分布.当 μ_2 从 $\frac{3}{4}\mu_1$ 减小时,从同宿环跳出一个不稳定环,且包围三个奇点.当 μ_2 继续减小时,不稳定大环扩大,而稳定环缩小,最后重合为一个二重环.由文[6]知,存在惟一的 $\mu_2 = \xi\mu_1$,其中常数 $0 < \xi < \frac{3}{4}$,使得当 $\xi\mu_1 < \mu_2 < \frac{3}{4}\mu_1$ 时,呈(5)分布,当 $\mu_2 = \xi\mu_1$ 时,呈(6)分布.

(上接第27页)

参考文献:

- [1] Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [2] Carr J. Applications of center manifold theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [3] Chow S N, Hale J K. Methods of bifurcation theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [4] Kopell N, Howard L N. Bifurcations and trajectories joining critical points[J]. Advances in Mathematics, 1975, 18:306 ~ 358.
- [5] Li C, Rousseau C. The cusp of order 4[J]. Journal of Differential Equations, 1989, 79:132 ~ 167.
- [6] 陈芳跃. 高次退化的非线性向量场分支[J]. 应用数学学报, 1995, 18(1):8 ~ 17.
- [7] Wang M S, Luo D J. Global bifurcation of some cubic planar systems[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 1984, 8(7):711 ~ 722.
- [8] Li J B. Distribution of limit cycles of the planar cubic system[J]. Science in China, Ser A, 1985, 28:1 ~ 35.
- [9] 王 现. $\dot{x} + (\alpha_1 + 3\alpha_3 x^2)\dot{x} - \beta_1 x + \beta_3 x^3 = 0$ 的大范围分析[J]. 应用数学, 1990, 3(2):59 ~ 63.
- [10] 韩茂安. 包围多个奇点的极限环的不存在性与惟二性[J]. 应用数学学报, 1998, 21(2):206 ~ 214.
- [11] 周毓荣, 韩茂安. 包围多个奇点的极限环的惟一性与惟二性[J]. 数学学报, 1993, 36(4):505 ~ 515.
- [12] 张芷芬, 丁同仁. 微分方程定性理论[M]. 北京:科学出版社, 1997.
- [13] Guo G Y. Formulae of saddle values and integrable conditions for a class of cubic systems[J]. Annals of Differential Equations, 1990, 6(1):11 ~ 14.

(编辑:李晓红)

