文章编号: 1000-5641(2008)05-0045-06

矩阵 Hadamard 积和 Fan 积特征值的界

杜 琨
(华东师范大学 数学系, 上海 200062)

摘要: 利用 Cauchy–Schwitz 不等式给出两个 n 阶非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})$ 的一组上界; 并且与前人给出的结果进行比较, 从而说明新结果的创新之处. 类似地, 利用 Cauchy–Schwitz 不等式给出两个 n 阶 M–方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Fan 积 $\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B}$ 的最小特征值 $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})$ 的一组下界.

关键词: Hadamard 积; Fan 积; M–方阵; 谱半径; 最小特征值
中图分类号: Q948 **文献标识码**: A

Bounds for eigenvalues of Hadamard product and Fan product of matrices

DU Kun
(*Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*)

Abstract: This paper found a new type upper bound of $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})$ which was the spectral radius of the Hadamard product of two nonnegative matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ by using Cauchy–Schwitz inequality and compared the new type upper bound with the classical results. In the same way, this paper found a new type lower bound of $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})$ which was the minimum eigenvalue of the Fan product of two M–matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$.

Key words: Hadamard product; Fan product; M–matrix; spectral radius; minimum eigenvalue

0 引 言

对一个正整数 n, 记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为 n 阶实方阵, 若 $a_{ij}\geqslant b_{ij}$ 对任意的 $i,j\in N$ 都成立, 则记 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$; 若 $a_{ij}\geqslant 0$ 对任意的 $i,j\in N$ 都成立, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵; 若 $a_{ij}>0$ 对任意的 $i,j\in N$ 都成立, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为正矩阵; $\boldsymbol{A}$ 的谱半径记为 $\rho(\boldsymbol{A})$. 若 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵, 则由 Perron–Frobenius 定理知: $\rho(\boldsymbol{A})\in\lambda(\boldsymbol{A})$ 并且有非负特征向量 x 与之对应, 其中 $\lambda(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的集合.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果存在置换阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix},$$

收稿日期: 2007-11
基金项目: 国家自然科学基金 (10571060)
作者简介: 杜琨, 男, 硕士, 研究方向为矩阵分析. E-mail:d31415927@126.com.

其中 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}$ 都是至少为 1 阶的方阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是可约的. 若 $\boldsymbol{A}$ 不是可约的, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的. 约定 1 阶的矩阵是不可约的. $D(\boldsymbol{A})$ 表示 1 所对应的有向图.

令 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的非负矩阵. 一个众所周知的结论是: 存在正向量 u, v 使得 $\boldsymbol{A}u = \rho(\boldsymbol{A})u$, $v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \rho(\boldsymbol{A})v^{\mathrm{T}}$; 其中 u 和 v 分别被称为 $\boldsymbol{A}$ 的右 Perron 特征向量和左 Perron 特征向量.

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 为 n 阶非负矩阵, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积定义为 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} \equiv (a_{ij}b_{ij})$; 令 $r > 0$, 记 $\boldsymbol{A}^{(r)} = (a_{ij}^r)$, 称 $\boldsymbol{A}^{(r)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 次 Hadamard 幂.

对于非负矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积谱半径上界的估计前人已经做了很多的研究, 有一些经典的结果. 例如文献 [1] 中有 $\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leqslant \rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B})$; 文献 [2] 中给出 $\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leqslant \sqrt{\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A})}\sqrt{\rho(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B})} \leqslant \rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B})$. 程光辉等人在文献 [3–5] 中也对类似问题做了很好的研究工作, 给出如下好结果: 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 为 n 阶非负方阵, 则

$$\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leqslant \min\{\rho(\boldsymbol{A}) \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(b_{ij}), \rho(\boldsymbol{B}) \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(a_{ij})\}.$$

特别地, 当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都为对角占优时有

$$\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leqslant \min\{\rho(\boldsymbol{A}) \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(b_{ii}), \rho(\boldsymbol{B}) \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(a_{ii})\} \leqslant \rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B}).$$

上述结论在一些情况下估计得非常精确, 例如设 $\boldsymbol{J}$ 为 n 阶全 1 矩阵, $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵, 令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J}$, 则 $\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) = n \leqslant \min\{n, n\} = n \leqslant \rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B}) = n^2$, 再令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J}$, 则 $\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) = 1 \leqslant \min\{1, n\} = 1 \leqslant \sqrt{\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A})}\sqrt{\rho(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B})} = \sqrt{n}$. 但遗憾的是当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 中非对角元很大而对角元相对较小时, 上述结论中给出的上界并不一定比文献 [1, 2] 中的经典估计更精确. 例如令

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 100 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则有 $\rho(\boldsymbol{A}) = 11, \rho(\boldsymbol{B}) = 10, \rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A}) = 101, \rho(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B}) = 100$;

$$\begin{aligned} 100 \quad = \quad & \rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leqslant \sqrt{\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A})}\sqrt{\rho(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B})} = \sqrt{101}\sqrt{100} \leqslant \rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B}) = 110 \\ \leqslant \quad & \min\{\rho(\boldsymbol{A}) \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(b_{ij}), \rho(B) \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(a_{ij})\} = \min\{11 \times 100, 10 \times 100\} = 1\,000. \end{aligned}$$

本文将给出 $\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})$ 的一组新上界作为对前人研究结果的补充, 并且保证这组新上界比文献 [1, 2] 中的经典结果更接近于 $\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})$ 的真实值. 新结果将包含文献 [6] 中的结论.

将所有非对角元素都为非正实数的 n 阶方阵的集合记为 Z_n. 若存在 n 阶非负阵 $\boldsymbol{B}$ 和正实数 α 使得 $\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$ 且 $\alpha > \rho(\boldsymbol{B})$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶 M–方阵. 记 M_n 为 n 阶 M–方阵的集合.

令 $\boldsymbol{A} \in Z_n$, 记 $\tau(\boldsymbol{A}) = \min\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \lambda(\boldsymbol{A})\}$. 由文献 [1] 中的结论知: $\tau(\boldsymbol{A}) \in \lambda(\boldsymbol{A})$. 称 $\tau(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值.

令 $\boldsymbol{A}$ 是不可约 M–方阵, 则存在正向量 u, v 使得 $\boldsymbol{A}u = \tau(\boldsymbol{A})u$, $v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \tau(\boldsymbol{A})v^{\mathrm{T}}$; 其中 u 和 v 分别被称为 $\boldsymbol{A}$ 的右 Perron 特征向量和左 Perron 特征向量.

假设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n$, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的 Fan 积定义为 $\boldsymbol{A} \star \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})$, 其中当 $i \neq j$ 时 $c_{ij} = -a_{ij}b_{ij}$, 当 $i = j$ 时 $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$; 令 $r \geqslant 1$, 记 $\boldsymbol{A}^{[r]} = (d_{ij})$, 称 $\boldsymbol{A}^{[r]}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 次 Fan 幂, 其中当 $i \neq j$ 时 $d_{ij} = -|a_{ij}|^r$, 当 $i = j$ 时 $d_{ii} = a_{ii}^r$. 显然, $\boldsymbol{A}^{[1]} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{[2]} = \boldsymbol{A} \star \boldsymbol{A}$. 由文献 [1] 中的结论知: 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n$, 则 $\boldsymbol{A} \star \boldsymbol{B} \in M_n$. 本文将给出 $\tau(\boldsymbol{A} \star \boldsymbol{B})$ 下界的一个新结果, 这个新结果将包含文献 [6] 中的结论.

1 逆阵元素的估计

引理 1　设 $a=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$, $b=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i^k)^{\frac{1}{k}}(\sum_{i=1}^{n}b_i^k)^{\frac{1}{k}} \tag{1}$$

对 $k=1,2$ 成立.

证明　由 Cauchy–Schwitz 不等式容易得结论成立.

引理 2[6]　设 $\boldsymbol{P}$ 为非负不可约方阵, 若存在不等于零的非负向量 z 使得 $\boldsymbol{P}z\leqslant kz$, 则 $\rho(\boldsymbol{P})\leqslant k$.

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为 n 阶非负方阵, 则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}b_{ii}+[(\rho(\boldsymbol{A}^{(k)})-a_{ii}^k)(\rho(\boldsymbol{B}^{(k)})-b_{ii}^k)]^{\frac{1}{k}}\}, \tag{2}$$

其中 $k=1,\ 2$.

证明　首先假设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 为不可约的. 则 A,B 不可约, 从而 $D(\boldsymbol{A}),D(\boldsymbol{B})$ 强连通, 所以 $D(\boldsymbol{A}^{(k)})$, $D(\boldsymbol{B}^{(k)})$ 也强连通, 从而 $\boldsymbol{A}^{(k)},\boldsymbol{B}^{(k)}$ 也不可约. 所以, 存在 $u^{(k)}=(u_1^k,\cdots,u_n^k)^{\mathrm{T}}>0$, $v^{(k)}=(v_1^k,\cdots,v_n^k)^{\mathrm{T}}>0$, 分别为 $\boldsymbol{A}^{(k)},\boldsymbol{B}^{(k)}$ 的右 Perron 特征向量. 记 $u=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}>0$, $v=(v_1,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}>0$. 因为

$$\boldsymbol{A}^{(k)}u^{(k)}=\rho(\boldsymbol{A}^{(k)})u^{(k)}\Longleftrightarrow a_{ii}^ku_i^k+\sum_{j\neq i}a_{ij}^ku_j^k=\rho(\boldsymbol{A}^{(k)})u_i^k,$$

所以

$$\sum_{j\neq i}a_{ij}^ku_j^k=[\rho(\boldsymbol{A}^{(k)})-a_{ii}^k]u_i^k. \tag{3}$$

同理

$$\sum_{j\neq i}b_{ij}^kv_j^k=[\rho(\boldsymbol{B}^{(k)})-b_{ii}^k]v_i^k. \tag{4}$$

令 $z=u\circ v$, 则 $z>0$. 所以对任意的 $i\in N$ 有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{C}z)_i &= a_{ii}b_{ii}z_i+\sum_{j\neq i}a_{ij}b_{ij}z_j=a_{ii}b_{ii}z_i+\sum_{j\neq i}(a_{ij}u_j)(b_{ij}v_j)\\ &\leqslant a_{ii}b_{ii}z_i+(\sum_{j\neq i}a_{ij}^ku_j^k)^{\frac{1}{k}}(\sum_{j\neq i}b_{ij}^kv_j^k)^{\frac{1}{k}}\\ &= a_{ii}b_{ii}z_i+[\rho(\boldsymbol{A}^{(k)})-a_{ii}^k]^{\frac{1}{k}}u_i[\rho(\boldsymbol{B}^{(k)})-b_{ii}^k]^{\frac{1}{k}}v_i\\ &= a_{ii}b_{ii}z_i+[(\rho(\boldsymbol{A}^{(k)})-a_{ii}^k)(\rho(\boldsymbol{B}^{(k)})-b_{ii}^k)]^{\frac{1}{k}}z_i\\ &= \{a_{ii}b_{ii}+[(\rho(\boldsymbol{A}^{(k)})-a_{ii}^k)(\rho(\boldsymbol{B}^{(k)})-b_{ii}^k)]^{\frac{1}{k}}\}z_i.\end{aligned}$$

上式中第二行由引理 1 得到, 第三行由 (3), (4) 式得到. 再由引理 2 得

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}b_{ii}+[(\rho(\boldsymbol{A}^{(k)})-a_{ii}^k)(\rho(\boldsymbol{B}^{(k)})-b_{ii}^k)]^{\frac{1}{k}}\}.$$

所以 (2) 式对 $k = 1, 2$ 成立. 若 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$ 是可约阵, 定义 $\boldsymbol{T} = (t_{ij})$ 为 n 阶置换阵, 其中 $t_{12} = t_{23} = \cdots = t_{n-1,n} = t_{n,1} = 1$, 其余元素为零. 则 $\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B} + \varepsilon\boldsymbol{T}$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 均是非负不可约阵. 用 $\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B} + \varepsilon\boldsymbol{T}$ 代替 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$; 再令 $\varepsilon \to 0$, 则由连续性知 (2) 式对 $k = 1, 2$ 仍成立. 证毕.

在 (2) 式中令 $k = 1$ 得

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{a_{ii}b_{ii} + (\rho(\boldsymbol{A}) - a_{ii})(\rho(\boldsymbol{B}) - b_{ii})\} \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{2a_{ii}b_{ii} + \rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B}) - a_{ii}\rho(\boldsymbol{B}) - b_{ii}\rho(\boldsymbol{A})\}.\end{aligned}$$

即是文献 [6] 中定理 4 的结果. 由文献 [6] 中 Remark 1 知

$$2a_{ii}b_{ii} + \rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B}) - a_{ii}\rho(\boldsymbol{B}) - b_{ii}\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B}).$$

再在 (2) 式中令 $k = 2$ 得

$$\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{a_{ii}b_{ii} + [(\rho(\boldsymbol{A}^{(2)}) - a_{ii}^2)(\rho(\boldsymbol{B}^{(2)}) - b_{ii}^2)]^{\frac{1}{2}}\}.$$

对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$, 以下不等式

$$\begin{aligned}[a_{ii}\rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B}) - b_{ii}\rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A})]^2 &\geqslant 0, \\ a_{ii}^2\rho(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B}) + b_{ii}^2\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A}) &\geqslant 2a_{ii}b_{ii}\rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B})\rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A}), \\ (\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A}) - a_{ii}^2)(\rho(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B}) - b_{ii}^2) &\leqslant [\rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B})\rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A}) - a_{ii}b_{ii}]^2, \\ a_{ii}b_{ii} + [(\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A}) - a_{ii}^2)(\rho(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B}) - b_{ii}^2)]^{\frac{1}{2}} &\leqslant \rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B})\rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A})\end{aligned}$$

是等价的. 又由于 $\sqrt{\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{A})}\sqrt{\rho(\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{B})} \leqslant \rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B})$. 从而说明用 (2) 式估计 $\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})$ 比用 $\rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B})$ 估计 $\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})$ 更加精确.

引理 3[7] 设 $\boldsymbol{Q} \in M_n$ 且为不可约的, 若存在不等于零的非负向量 z 使得 $\boldsymbol{Q}z \geqslant kz$, 则 $\tau(\boldsymbol{Q}) \geqslant k$.

定理 2 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in M_n$, 则

$$\tau(\boldsymbol{A} \star \boldsymbol{B}) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} \{a_{ii}b_{ii} - [(a_{ii}^k - \tau(\boldsymbol{A}^{[k]}))(b_{ii}^k - \tau(\boldsymbol{B}^{[k]}))]^{\frac{1}{k}}\}, \tag{5}$$

其中 $k = 1, 2$.

证明 首先假设 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \star \boldsymbol{B}$ 不可约. 则 A, B 是不可约的 M-方阵, 从而 $D(\boldsymbol{A}), D(\boldsymbol{B})$ 强连通, 所以 $D(\boldsymbol{A}^{[k]})$, $D(\boldsymbol{B}^{[k]})$ 也强连通, 从而 $\boldsymbol{A}^{[k]}, \boldsymbol{B}^{[k]}$ 也不可约. 所以, 存在 $u^{[k]} = (u_1^k, \cdots, u_n^k)^{\mathrm{T}} > 0$, $v^{[k]} = (v_1^k, \cdots, v_n^k)^{\mathrm{T}} > 0$, 分别为 $\boldsymbol{A}^{[k]}, \boldsymbol{B}^{[k]}$ 的右 Perron 特征向量. 记 $u = (u_1, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}} > 0$, $v = (v_1, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}} > 0$. 因为

$$\boldsymbol{A}^{[k]}u^{[k]} = \tau(\boldsymbol{A}^{[k]})u^{[k]} \Longleftrightarrow a_{ii}^k u_i^k - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|^k u_j^k = \tau(\boldsymbol{A}^{[k]})u_i^k,$$

所以

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}|^k u_j^k = [a_{ii}^k - \tau(\boldsymbol{A}^{[k]})]u_i^k. \tag{6}$$

同理

$$\sum_{j\neq i}|b_{ij}|^k v_j^k=[b_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{B}^{[k]})]v_i^k. \tag{7}$$

令 $z=u\circ v$, 则 $z>0$. 所以对任意的 $i\in N$ 有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{C}z)_i &= a_{ii}b_{ii}z_i-\sum_{j\neq i}|a_{ij}||b_{ij}|z_j=a_{ii}b_{ii}z_i-\sum_{j\neq i}(|a_{ij}|u_j)(|b_{ij}|v_j)\\ &\geqslant a_{ii}b_{ii}z_i-(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|^k u_j^k)^{\frac{1}{k}}(\sum_{j\neq i}|b_{ij}|^k v_j^k)^{\frac{1}{k}}\\ &= a_{ii}b_{ii}z_i-[a_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{A}^{[k]})]^{\frac{1}{k}}u_i[b_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{B}^{[k]})]^{\frac{1}{k}}v_i\\ &= a_{ii}b_{ii}z_i-[(a_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{A}^{[k]}))(b_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{B}^{[k]})]^{\frac{1}{k}}z_i\\ &= \{a_{ii}b_{ii}-[(a_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{A}^{[k]})(b_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{B}^{[k]})]^{\frac{1}{k}}\}z_i.\end{aligned}$$

上式中第二行由引理1得到, 第三行由 (6), (7) 式得到. 再由引理3得

$$\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}b_{ii}-[(a_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{A}^{[k]}))(b_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{B}^{[k]}))]^{\frac{1}{k}}\}.$$

所以 (5) 式对 $k=1,2$ 成立. 若 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B}$ 是可约阵, 定义 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})$ 为 n 阶置换阵, 其中 $t_{12}=t_{23}=\cdots=t_{n-1,n}=t_{n,1}=1$, 其余元素为零. 对于足够小的 $\varepsilon>0$, $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{T}$ 的所有顺序主子式为正. 所以当 $\varepsilon>0$ 足够小时 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{T}$ 均是不可约 M–方阵. 用 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{T}$ 代替 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$; 再令 $\varepsilon\longrightarrow 0$, 则由连续性知 (5) 式对 $k=1,2$ 仍成立. 证毕.

在 (5) 式中令 $k=1$ 得

$$\begin{aligned}\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B}) &\geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}b_{ii}-[(a_{ii}-\tau(\boldsymbol{A}))(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))]\}\\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}\tau(\boldsymbol{B})+b_{ii}\tau(\boldsymbol{A})-\tau(\boldsymbol{A})\tau(\boldsymbol{B})\}.\end{aligned}$$

即是文献 [6] 中定理9的结果. 由文献 [2] 中 Remark 3 知

$$a_{ii}\tau(\boldsymbol{B})+b_{ii}\tau(\boldsymbol{A})-\tau(\boldsymbol{A})\tau(\boldsymbol{B})\geqslant\tau(\boldsymbol{A})\tau(\boldsymbol{B}).$$

从而说明用 (5) 式估计 $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})$ 比用 $\tau(\boldsymbol{A})\tau(\boldsymbol{B})$ 估计 $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})$ 更加精确. 下面给出一个例子来说明这一点.

例 1 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -1 & 3\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -4 & 4\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_2$; $\tau(\boldsymbol{A})=1$, $\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{A})=5$, $a_{11}=a_{22}=3$; $\tau(\boldsymbol{B})=1$, $\tau(\boldsymbol{B}\star\boldsymbol{B})=7.684\,0$, $b_{11}=5,b_{22}=4$. 则

$$6.4113=\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant\tau(\boldsymbol{A})\tau(\boldsymbol{B})=1.$$

在 (5) 式中令 $k=1$ 得

$$6.411\,3=\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B})\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant 2}\{a_{ii}b_{ii}-[(a_{ii}-\tau(\boldsymbol{A}))(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))]\}=\min\{7,6\}=6.$$

在 (5) 中令 $k=2$ 得

$$\begin{aligned} 6.411\,3=\tau(\boldsymbol{A}\star\boldsymbol{B}) &\geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant 2}\{a_{ii}b_{ii}-[(a_{ii}^2-\tau(\boldsymbol{A}^{[2]}))(b_{ii}^2-\tau(\boldsymbol{B}^{[2]}))]^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \min\{6.6775, 6.232\,5\}=6.232\,5. \end{aligned}$$

致谢: 作者感谢詹兴致教授的帮助.

[参　考　文　献]

[1] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[2] KARILIN S, OST F. Some monotonicity properties of Schur powers of matrices and related inequalities[J]. Linear Algebra Appl, 1985, 68: 47-65.

[3] CHENG G H, CHENG X Y, HUANG T Z, et al. Some bounds for the spectral radius of the Hadamard product of nonnegative matrices[J]. Applied Mathematics E-Notes. 2005(5): 202-209.

[4] 程光辉, 成孝予, 黄廷祝. A bound for the maximum eigenvalue of the Hadamard product of matrices[J]. 电子科技大学学报, 2007, 36(2): 422-423.

[5] 程光辉, 成孝予, 黄廷祝. M–矩阵和H–矩阵在 Fan 积下的 Oppenheim 型不等式[J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(2): 253-255.

[6] FANG M Z. Bounds on eigenvalues of Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2007, 425: 7-15.

[7] BERMAN A, PLEMMONS R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. London: Academic Press, 1978.

(上接第 16 页)

[1] CHANDRASEKHAR S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability [M]. Oxford: Oxford University Press, 1961.

[2] LIN C C. The Theory of Hydrodynamic Stability [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

[3] FURTH H P, KILLEN J, ROSENBLUTH M N. Finite-resistive instabilities of a sheet pinch [J]. Physics of Fluids, 1963, 6(4): 459 - 484.

[4] PARIS R B, SY W N-C. Influence of equilibrium shear flow along the magnetic flows on the resistive tearing instability [J]. Physics of Fluids, 1983, 26: 2966-2975.

[5] HOU L. PhD thesis [D]. Scotland: University of Abertay Dundee, 1994.

[6] HOU L, PARIS R B, WOOD A D. Resistive Interchange Mode in the Presence of Equilibrium Flow [J]. Physics of Plasmas, American Institute of Physics, 1996, 3(2): 473-481.

[7] HOU L, NASSEHI V. Evaluation of stress effective flow in rubber mixing [J]. Nonlinear analysis, Elsevier Science, 2001, 47(3): 1809-1820.

[8] EINAUDI G, RUBINI F. Resistive instabilities in a flowing plasma I: Inviscid case [J]. Physics of Fluids, 1986, 29: 2563-2568 .

[9] EINAUDI G, RUBINI F. Resistive instabilities in a flowing plasma II: Effects of viscosity [J]. Physics of Fluids, 1989, 1(11): 2224-2228.

[10] CHEN X L, MORRISON P L. The effect of viscosity on the resistive tearing mode with the presence of shear flow [J]. Physics of Fluids , 1990, 2(11): 2575-2580.

[11] PARIS R B, WOOD A D, STEWART S. The effects of equilibrium flow on the resistive tearing mode [J]. Physics of Fluids, 1993, 5(3): 1027-1029.

[12] BURDEN R L, FAIRES J D. Numerical Analysis [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001.