第 28 卷第 6 期　　温 州 大 学 学 报 · 自 然 科 学 版　　2007 年 12 月
Vol 28, No 6　　Journal of Wenzhou University · Natural Sciences　　Dec, 2007

一类 Poincaré 系统的中心条件及极限环个数

诸　慧

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州　325035）

摘　要：考虑了形如 $\begin{aligned}\dot{x}&=-y+x(a+f_1(x,y)+f_n(x,y))\\ \dot{y}&=\ \ x+y(a+f_1(x,y)+f_n(x,y))\end{aligned}$ 的 Poincaré 系统，这里 $f_n(x,y)$ 是 n 次齐次多项式，得到了当 $n=4,5,\cdots,8$ 时系统的中心条件及细焦点的阶数和极限环个数.

关键词：Poincaré 系统；焦点量；中心；极限环

中图分类号：O175.13　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2007)06-0005-07

Poincaré 系统是目前研究中一类重要的平面微分多项式系统,其一般形式如下：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+x(F(x,y))\\ \dot{y}&=x+y(F(x,y))\end{aligned}\tag{I}$$

这里 $F(x,y)$ 是形如 $F(x,y)=\sum_{i=0}^{n}f_i(x,y)$ 的 n 次多项式，其中 $f_i(x,y)$ 是 i 次齐次多项式．这类系统只有一个奇异点即原点（0, 0），原点是中心时它是一个等时中心．当 $F(x,y)$ 为一次多项式时，系统（I）既为一种特殊的二次系统，不存在极限环．当 $F(x,y)$ 为二次多项式时，文[1]、[2]和[3]采用了不同的方法对系统（I）中心焦点的判定问题进行了研究，并得到了完整的结果．当 $F(x,y)$ 为三次多项式时，丰建文[4]、岳喜顺[5]和 Jaume Giné[6]等人分别讨论了 $F(x,y)=f_1(x,y)+f_3(x,y)$ 时的情形，得到原点为中心的充要条件. 丰建文[7]、田德生、曾宪武等人[8]讨论了 $F(x,y)=f_2(x,y)+f_3(x,y)$ 时的情形，得到原点为中心的充要条件．Evgenii P. Volokitin[9,10]分别对 $F(x,y)=f_2(x,y)+f_4(x,y)$ 和 $F(x,y)=f_2(x,y)+f_6(x,y)$ 时的情形进行了讨论，并得到原点为中心的充要条件.

本文考虑如下系统的中心焦点判定问题：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+x(a+f_1(x,y)+f_n(x,y))\\ \dot{y}&=x+y(a+f_1(x,y)+f_n(x,y))\end{aligned}\tag{II}$$

其中 f_n 是 n 次齐次多项式．我们证明了系统（II）当 $f_n, n=4\cdots8$ 时的中心条件及细焦点的阶数和极限环个数.

收稿日期：2007-03-22

基金项目：国家自然科学基金(10371090)，浙江省自然科学基金(M1030343)，国家九七三重点基础规划项目(2004CB318000)

作者简介：诸慧(1982-)，女，浙江温州人，硕士研究生，研究方向：机器证明，动力系统，生物数学

1 预备知识

本文利用一般形式的平面系统焦点量算法[11]——形式幂级数方法，借助符号计算软件 Maple 这个工具来计算焦点量．这里设 L_i 为系统（II）的第 i 阶焦点量，若存在系统 L_i 的一组实根使得对于任意的 i，均有 L_i=0，则可证明原点为中心，又按 Hilbert 基定理，存在 N，只要使得前 N 阶焦点量等于零，就可以保证原点是中心．因此分析前 N 个焦点量我们几乎就可得到系统（II）为中心的充要条件，同时得到该系统至多具有（II）个小扰动极限环．但是，Hilbert 基定理并没有给出计算 N 的方法，所以一般情况下，我们只能通过计算前 K 个焦点量得到原点为中心的必要条件，再通过其它途径证明这些条件是充分的，从而得到充要条件．本文是沿用这个思路处理的．

引理 1[12]　考虑系统 $\begin{aligned}\dot{x}&=-y+x(f_n(x,y))\\ \dot{y}&=x+y(f_n(x,y))\end{aligned}$，定义 $B:=\int_0^{2\pi} f_n(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$.

其中 f_n 为 n 次齐次多项式．则

（i）如果 $B=0,\ a=0$ 则原点是中心且没有极限环；

（ii）如果 $a^2+B^2\neq 0$ 和 $aB\neq 0$，则没有周期轨；

（iii）如果 $aB<0$，则至多 1 个周期轨，如果存在则它是双曲极限环．进一步，f_n 固定，$B>0$，a 是变量，则存在 $a^*=a^*(f_n)\in R\bigcup\{-\infty\}$ 使得极限环存在，当且仅当 $a^*<a<0$.

引理 2　（对称原理）设系统 $\begin{aligned}\dot{x}&=-y+X(x,y)\\ \dot{y}&=x+Y(x,y)\end{aligned}$

右侧的向量场关于 x 轴或 y 轴对称，即函数 $X(x,y)$，$Y(x,y)$ 满足 $X(x,-y)=-X(x,\ y)$，$Y(x,-y)=Y(x,\ y)$ 或 $X(-x,\ y)=X(x,\ y),\ Y(-x,\ y)=-Y(x,\ y)$，则点(0, 0)必为系统的中心点．

2 主要结果及证明

首先考虑系统(II)当 $f_1(x,y)+f_4(x,y)=a_1x+a_2y+a_3x^4+a_4x^3y+a_5x^2y^2+a_6xy^3+a_7y^4$ 时的情形，我们有以下主要结果：

定理 1　$F(x,y)=f_1(x,y)+f_4(x,y)=a_1x+a_2y+a_3x^4+a_4x^3y+a_5x^2y^2+a_6xy^3+a_7y^4$ 时，系统（II）的前四个焦点量如下：

(1) $L_1=0$；

(2) $L_2=-3a_7-a_5-3a_3$；

(3) $L_3=a_1^2a_3+a_2a_1a_6+a_2a_1a_4+a_2^2a_7-a_2^2a_3-a_1^2a_7$；

(4) $L_4=-50a_2^4a_7-50a_1^4a_7+100a_1^2a_2^2a_3+50a_1^3a_2a_6+200a_1^2a_2^2a_7-50a_2^3a_1a_6$.

证明：利用文[11]中的焦点量算法，当 $a=0$，通过符号计算软件 Maple 得到系统（II）的前 7 个焦点量，其中

$$L_1=0；$$

$$L_2=-3a_7-a_5-3a_3；$$

$$L_3=187a_1^2a_3+16a_2a_1a_4+13a_2^2a_7-19a_2^2a_3+155a_1^2a_7+16a_1a_2a_6+57a_1^2a_5-a_2^2a_5 .$$

L_4,L_5,L_6,L_7 分别是含有 19，39，78，133 个单项式的多项式．

要使 $L_2=0$，只需令 $a_5=-3a_7-3a_3$ 即可，再将 a_5 迭代到 L_3,L_4,L_5,L_6,L_7，得到约化后的焦点量为：

$$L_3=a_1^2a_3+a_2a_1a_6+a_2a_1a_4+a_2^2a_7-a_2^2a_3-a_1^2a_7\text{；}$$

$$L_4=-69a_2^4a_7+19a_2^4a_3+1411a_1^4\ a_7-1461a_1^4a_3+1542a_1^2a_2^2a_3-1411a_1^3a_2a_6$$
$$-1461a_1^3a_2a_4-1242a_1^2a_2^2a_7-69a_2^3a_1a_6-19a_2^3a_1a_4\,.$$

L_5,L_6,L_7 分别是含有 27，42，86 个单项式的多项式.

同样令 $a_4=-(a_2a_1a_6-a_1^2a_7+a_1^2a_3+a_2^2a_7-a_2^2a_3)/(a_2a_1)$ 使得 $L_3=0$，迭代到 L_4,L_5,L_6,L_7，得到约化后的焦点量为 $L_4=\text{-}50(a_2{}^4a_7+a_1^4a_7-a_1^3a_2a_6+a_2^3a_1a_6)+100(a_1^2\ a_2^2a_3+2a_1^2a_2^2a_7)$，$L_5,L_6$，$L_7$ 分别是含有 20，30，66 个单项式的多项式.

再令 $a_3=(a_2^4a_7+a_1^4a_7-a_2a_1^3a_6-4a_1^2a_2^2a_7+a_2^3a_1a_6)/(2a_1^2a_2^2)$，这样 $L_4=0$，同样迭代到 L_5,L_6,L_7，得到约化后的焦点量为 $L_5=L_6=L_7=0$. 定理 1 得证.

定理 2　原点 O 为系统（II）的中心，当且仅当 $L_2=L_3=L_4=0$，即以下条件之一成立：

(1) $a_1=a_3=a_5=a_7=0$；

(2) $a_2=a_3=a_5=a_7=0$；

(3) $a_1=0,a_2=0,a_5=-3a_7-3a_3$；

(4) $a_1\neq0,a_2\neq0,-3[a_6(a_2^3a_1-a_1^3a_2)+a_7(a_2^2-a_1^2)^2]-2a_5a_1^2a_2^2=0,$

$a_6(a_2^3a_1-a_1^3a_2)+a_7(a_2^4-4a_1^2a_2^2+a_1^4)-2a_3a_1^2a_2^2=0,$

$a_6(4a_2^3a_1^3-a_2^5a_1-a_1^5a_2)+a_7(a_1^6-7a_1^4a_2^2+7a_2^4a_1^2-a_2^6)+2a_4a_1^3a_2^3=0.$

证明：充分性：解多项式组 $L_2=L_3=L_4=0$ 即得.

必要性：对于情形(1)，$F(x,y)=a_2y+a_4x^3y+a_6y^3x$，$F(x,-y)=-F(x,y)$，系统（II）关于 x 轴对称，根据对称原理，O(0,0)为中心.

对于情形(2)，$F(x,y)=a_1x+a_4x^3y+a_6y^3x$，$F(-x,y)=-F(x,y)$，系统（II）关于 y 轴对称，根据对称原理，O(0, 0)为中心.

对于情形(3)，$F(x,y)=a_3x^4+a_4x^3y+(-3a_7-3a_3)y^2x^2+a_6xy^3+a_7y^4$，这样 $\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=0$. 满足引理 1（i），原点 O(0,0)为中心.

对于情形(4)，做旋转变换 $x=\dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}u+\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}v$，$y=-\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}u+\dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}v$，系统（II）在新的变量 (u,v) 下有：

$$\begin{aligned}\dot u=P(u,v)=&\frac{u^2v^3(a_7a_1^8-a_2a_6a_1^7-a_1^6a_7a_2^2-2a_1^5a_6a_2^3-5a_1^4a_7a_2^4-a_1^3a_2^5a_6-3a_1^2a_2^6a_7)}{2(a_1^3(a_1^2+a_2^2)a_2^3)}\\&+\frac{u^4v(-3a_1^6a_7a_2^2+a_1^5a_2^3a_6-5a_1^4a_7a_2^4+2a_1^3a_6a_2^5-a_1^2a_7a_2^6+a_2^7a_6a_1+a_2^8a_7)}{2(a_1^3(a_1^2+a_2^2)a_2^3)}\\&+\frac{uv(2a_1^3(a_1^2+a_2^2)^{3/2}a_2^3-2a_1^5a_2^3-2a_2^5a_1^3)}{2(a_1^3(a_1^2+a_2^2)a_2^3)}\end{aligned}$$

$$\dot{v}=Q(u,v)=\frac{uv^4(a_7a_1^8-a_2a_6a_1^7-a_1^6a_7a_2^2-2a_1^5a_6a_2^3-5a_1^4a_7a_2^4-a_1^3a_2^5a_6-3a_1^2a_2^6a_7)}{2(a_1^3(a_1^2+a_2^2)a_2^3)}$$
$$+\frac{u^3v^2(-3a_1^6a_7a_2^2+a_1^5a_2^3a_6-5a_1^4a_7a_2^4+2a_1^3a_6a_2^5-a_1^2a_7a_2^6+a_2^7a_6a_1+a_2^8a_7)}{2(a_1^3(a_1^2+a_2^2)a_2^3)}$$
$$+\frac{v^2(2a_1^3(a_1^2+a_2^2)^{3/2}a_2^3-2a_1^5a_2^3-2a_2^5a_1^3)}{2(a_1^3(a_1^2+a_2^2)a_2^3)}$$

满足 $P(u,-v)=-P(u,v)$，$Q(u,-v)=Q(u,v)$，即关于 x 轴对称.

根据对称原理，原点 O(0, 0)为中心．证明完毕.

定理 3　对系统（II），当 $F(x,y)=f_1(x,y)+f_4(x,y)=a_1x+a_2y+a_3x^4+a_4x^3y+a_5x^2y^2+a_6xy^3+a_7y^4$，$H(1,3)=4$.

证明：由定理 2 知系统（II），当 $L_2=L_3=L_4=0$ 时，原点 O 是中心，所以 $H(1,4)\ge 3$. 下面证 $H(1,4)\le 3$.

令 $a=0$，

第一步，我们取定 $a_4=-(a_2a_1a_6-a_1^2a_7+a_1^2a_3+a_2^2a_7-a_2^2a_3)/(a_2a_1)$，$a_5=-3a_7-3a_3$，$a_3>(a_2^4a_7+a_1^4a_7-a_2a_1^3a_6-4a_1^2a_2^2a_7+a_2^3a_1a_6)/(2a_1^2a_2^2)$，由此 $L_2=L_3=0, L_4>0$；

第二步，保持 a_5 不变，调整 $a_4<-(a_2a_1a_6-a_1^2a_7+a_1^2a_3+a_2^2a_7-a_2^2a_3)/(a_2a_1)$，则 $L_2=0$，$L_3<0$；

第三步，调整 $a_5<-3a_7-3a_3$，则 $L_2>0$；

第四步，取 $a<0$.

由 Hopf 分支理论知道，对应的系统在原点附近至少有 3 个极限环，即 $H(1,\ 4)=3$．因此 $H(1,\ 4)=3$ 的得证.

接下来考虑 f_n 当 $n=5,6,\cdots,8$ 时情形，主要得到以下的结果：

定理 4　如果 $F=f_1+f_5$，原点 O 为系统（II）的中心，当且仅当以下条件之一成立：

(1) $a_1=a_3=a_5=a_7=0$；

(2) $a_2=a_4=a_6=a_8=0$；

(3) $a_1=0$，$a_2=0$；

(4) $a_1\ne 0,\ a_2\ne 0,\ -a_1a_6+a_2a_5-5a_1a_8+5a_2a_3+a_2a_7-a_1a_4=0,\ -500a_1^2a_2a_3+50a_2^3a_5+100a_1^3a_4+50a_1^3a_6+50a_1^2a_2a_5+200a_1^2a_2a_7+500a_2^3a_3-300a_2^2a_1a_4-150a_2^2a_1a_6=0,$
$3360a_2^5a_3-3360a_2^4a_1a_4+4032a_1^3a_2^2a_4+2688a_1^2a_2^3a_5-1344a_1^4a_2a_5-672a_1^5a_4-6720a_1^2a_2^3a_3+3360a_1^4a_2a_3-1344a_1^3a_2^2a_6=0.$

定理 5　如果 $F=f_1+f_6$，原点 O 为系统（II）的中心，当且仅当以下条件之一成立：

(1) $a_1=a_3=a_5=a_7=a_9=0$；

(2) $a_2=a_3=a_5=a_7=a_9=0$；

(3) $a_1=a_2=0$，$5a_9=-a_5-a_3-a_7$；

(4) $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ 5a_9 + a_5 + 5a_3 + a_7 = 0,\ 15a_2^2 a_3 - 5a_1 a_2 a_8 - 3a_1 a_2 a_6 - 5a_1 a_2 a_4 - 15a_1^2 a_3 - 2a_1^2 a_5 + 2a_2^2 a_5 + a_2^2 a_7 - a_1^2 a_7 = 0,\ -30a_1^2 a_2^2 a_3 + 15a_2^4 a_3 + a_2^4 a_5 + 10a_1^3 a_2 a_4 + 3a_1^3 a_2 a_6 - 10a_1 a_2^3 a_4 - 3a_1 a_2^3 a_6 + 2a_1^2 a_2^2 a_5 + 4a_1^2 a_2^2 a_7 + a_1^4 a_5 + 15a_1^4 a_3 = 0,\ -4a_1^4 a_2^2 a_5 + 10a_1^3 a_2^3 a_4 + 15a_1^4 a_2^2 a_3 - 15a_1^2 a_2^4 a_3 + 5a_2^6 a_3 - 2a_1^3 a_2^3 a_6 - 5a_1^5 a_2 a_4 - 5a_1 a_2^5 a_4 - 5a_1^6 a_3 + 4a_1^2 a_2^4 a_5 = 0.$

定理 6　如果 $F = f_1 + f_7$，原点 O 为系统（II）的中心当且仅当以下条件之一成立：

(1) $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = 0$；

(2) $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = a_{10} = 0$；

(3) $a_1 = 0,\ a_2 = 0$；

(4) $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ 35a_2 a_3 - 3a_1 a_6 + 3a_2 a_7 + 5a_2 a_5 + 5a_2 a_9 - 35a_1 a_{10} - 5a_1 a_8 - 5a_1 a_4 = 0,$
$1120a_2^3 a_5 - 1680a_1 a_2^2 a_8 - 2016a_1 a_2^2 a_6 - 5040a_1 a_2^2 a_4 + 672a_1^3 a_6 + 560a_1^3 a_8 + 1680a_1^3 a_4 + 3360a_1^2 a_2 a_9 + 336a_2^3 a_7 + 1008a_1^2 a_2 a_7 - 11760a_1^2 a_2 a_3 + 11760a_2^3 a_3 = 0, 246960a_1^4 a_2 a_3 - 28224a_1^4 a_2 a_7 + 70560a_1^2 a_2^3 a_5 + 56448a_1^2 a_2^3 a_7 - 35280a_1^4 a_2 a_5 + 246960a_2^5 a_3 + 11760a_2^5 a_5 - 35280a_1^5 a_4 - 7056a_1^5 a_6 + 211680a_1^3 a_2^2 a_4 + 14112a_1^3 a_2^2 a_6 - 47040a_1^3 a_2^2 a_8 - 176400a_1 a_2^4 a_4 - 35280a_1 a_2^4 a_6 - 493920a_1^2 a_2^3 a_3 = 0, 202752a_1^5 a_2^2 a_6 - 337920a_1^3 a_2^4 a_6 + 84480a_1^7 a_4 + 591360a_2^7 a_3 - 591360a_1^6 a_2 a_3 + 1774080a_1^4 a_2^3 a_3 - 591360a_1 a_2^6 a_4 - 1774080a_1^2 a_2^5 a_3 + 168960a_1^6 a_2 a_5 - 760320a_1^5 a_2^2 a_4 + 1267200a_1^3 a_2^4 a_4 + 506880a_1^2 a_2^5 a_5 - 675840a_1^4 a_2^3 a_5 + 135168a_1^4 a_2^3 a_7 = 0.$

定理 7　如果 $F = f_1 + f_8$，原点 O 为系统（II）的中心，当且仅当以下条件之一成立：

(1) $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = a_{11} = 0$；

(2) $a_2 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = a_{11} = 0$；

(3) $a_1 = a_2 = 0,\ 35a_{11} = -5a_9 - 5a_5 - 35a_3 - 3a_7$；

(4) $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ 35a_{11} + 5a_9 + 5a_5 + 35a_3 + 3a_7 = 0,\ 47040a_2^2 a_3 - 5040a_1 a_2 a_8 - 47040a_1^2 a_3 + 5040a_2^2 a_5 + 2016a_2^2 a_7 - 2016a_1^2 a_7 - 5040a_1^2 a_5 + 1680a_2^2 a_9 - 1680a_1^2 a_9 - 11760a_1 a_2 a_4 - 5040a_1 a_2 a_6 - 11760a_1 a_2 a_{10} = 0, 70a_2^4 a_3 + 70a_1^4 a_3 + 35a_1^3 a_2 a_4 + 10a_1^3 a_2 a_6 + 5a_1^3 a_2 a_8 - 35a_2^3 a_1 a_4 - 10a_2^3 a_1 a_6 - 5a_2^3 a_1 a_8 - 140a_1^2 a_2^2 a_3 + 6a_1^2 a_2^2 a_7 + 10a_1^2 a_2^2 a_9 + 5a_1^4 a_5 + a_1^4 a_7 + 5a_2^4 a_5 + a_2^4 a_7 = 0, 2365440a_2^6 a_3 - 2365440a_1^6 a_3 + 84480a_2^6 a_5 - 1774080a_1^5 a_2 a_4 + 3548160a_2^3 a_2^3 a_4 - 84480a_1^6 a_5 - 7096320a_1^2 a_2^4 a_3 - 2 + 7096320a_1^4 a_2^2 a_3 53440a_1^5 a_2 a_6 + 168960a_2^3 a_2^3 a_6 - 337920a_1^3 a_2^3 a_8 - 1774080a_1 a_2^5 a_4 - 760320a_1^4 a_2^2 a_5 + 760320a_1^2 a_2^4 a_5 - 405504a_1^4 a_2^2 a_7 + 405504a_1^2 a_2^4 a_7 - 253440a_1 a_2^5 a_6 = 0,\ 276756480a_1^5 a_2^3 a_6 - 276756480a_1^3 a_2^5 a_6 + 110702592a_1^4 a_2^4 a_7 + 2905943040a_1^4 a_2^4 a_3 - 1937295360a_1^2 a_2^6 a_3 - 484323840a_1 a_2^7 a_4 - 1937295360a_1^6 a_2^2 a_3 + 484323840a_1^8 a_3 + 1452971520a_1^3 a_2^5 a_4 + 484323840a_2^8 a_3 + 484323840a_1^7 a_2 a_4 - 830269440a_1^4 a_2^4 a_5 + 415134720a_1^2 a_2^6 a_5 + 415134720a_1^6 a_2^2 a_5 - 1452971520a_1^5 a_2^3 a_4 = 0.$

证明定理 4-7 的过程中，我们发现它们的证明思路跟定理 2 的证明思路是一样的，由此我们对系统（II）在考虑 f_n，n 从 4 到 8 的时候，可以说它是一个的算法化过程．具体算法如下．

算法：

第一步：由[11]中焦点量算法得到系统（II）的前 n 个焦点量，然后约化得焦点量 L_i, i=1,2,⋯,n；

第二步：充分性证明，解多项式组 L_i，$i=1,2,\cdots,n$ 即得；

第三步：必要性证明，情形(1)同定理 2 情形(1)的证明，由对称原理即得．情形(2)同定理 2 情形(2)的证明，由对称原理即得．情形(3)同定理 2 情形(3)的证明，由引理 2（i）即得．情形(4)同定理 2 情形(4)证明，做变换 $x=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}u+\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}v$，$y=-\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}u+\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}v$，然后再由对称原理即得．

在定理 3 中总能取到适当的一组参数值，使得相应系统的焦点量在该参数值下，满足 $L_iL_{i+1}<0$，$i=1,2,\cdots,n$．同样，由小扰动极限环的构造方法与定理 4-7 设 $H(m,n)$ 为 $F=f_m+f_n$，$n>m\geq 1$ 的最大极限环个数，这里 $f_i(x,y)$ 是次数为 i 的齐次多项式，结合文献[2]、[5]和[12]则得到下表可得系统（II）的小扰动极限环个数，如表 1．

表 1　系统(II)当 $F=f_1+f_n$ 时的极限环个数

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$H(1,n)$	0	2	2	3	3	4	4	5

由我们的算法知，只要计算机能够算到第 n 个焦点量，就可以得到系统（II）当 $F=f_1+f_n$ 时的中心条件及极限环个数．

于是我们有以下猜想：

猜想：系统（II）的小扰动极限环个数为 $H(1,n)=[n/2]+1$，$n\geq 2$．

参考文献

[1] Du N L, Zeng X W. A class of recursive formulas on the calculation of focus values [J]. Chinese Science Bulletin, 1995, 40(11): 881-885.

[2] Collins C B. Conditions for a centre in a simple class of cubic systems [J]. Differential and Integral Equations, 1997, 10(2): 333-356.

[3] Alwash M A M. On the center conditions of certain cubic systems [J]. Proceeding of the AMS, 1998, 126(11): 3335-3336.

[4] 丰建文. 一类四次多项式 Poincaré型方程的中心焦点判定[J]. 中南民族学院学报(自然科学版), 1996, 15: 44-49.

[5] 岳喜顺. 一类 Poincaré方程的中心焦点判定[J]. 数学进展, 2005, 34: 101-105.

[6] Gine J, Santallusia X. Implementation of a new algorithm of computation of the Poincare-Liapunov constants [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2004, 197(1): 465-476.

[7] 丰建文. 一类四次多项式 Poincaré型系统原点为中心的若干条件[J]. 武当学刊(自然科学版), 1996, 16: 7-18.

[8] Tian D S, Zeng X W, Yu C C, et al. The center and the fine focus for a class of quartic polynimial poincare equation [J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences. 2004, 9(6): 867-870.

[9] Volokitin E P. Center condition for a simple class of quintic systems [J]. International Journalof Mathematics and Mathematical Sciences, 2002, 29: 625-632.

[10] Volokitin E P. Centering conditions for planar septic systems [J]. Electronic Journal of Differential Equations. 2002, 2000(34): 1-7.

[11] Lu Z, He B, Luo Y. An algorithm of real root isolation for polynomial systems with applications [M]. Beijing: Sci Press, 2004. 67-71.

[12] GasullL A, Torregrosa J. Exact number of limit cycles for a family of rigid systems [J]. Proceeding of the AMS, 2004, 133: 751-758.

Center Condition and Limit Cycles for A Class of Poincaré Systems

ZHU Hui

(School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: This paper consider the following forms of Poincaré system $\begin{array}{l}\dot{x} = -y + x(a + f_1(x,y) + f_n(x,y)) \\ \dot{y} = x + y(a + f_1(x,y) + f_n(x,y))\end{array}$ where $f_n(x,y)$ is real homogeneous polynomial of degree n. In the cases where n=4,5,$\cdots$,8, we get the center condition and limit cycles number of the system.

Key words: Poincaré system; Focal values; Center; Limit cycles

（编辑：王一芳）