一阶中立型时滞微分方程的振动性

李玉梅，王幼斌，范叶华

(温州大学数学与信息科学学院，浙江温州 325035)

摘 要：研究了具有正负系数的一阶中立型时滞微分方程 $\left[x(t)-px(t-\tau)\right]'+qx(t-\sigma)-rx(t-\rho)=0$，其中 $p\in(0,1)$，利用适当的特征方程和不等式，建立了解的新振动准则.

关键词：中立型；正负系数；振动性

中图分类号：O175 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-0375(2007)06-0012-05

中立型时滞微分方程理论较一般的时滞微分方程理论要复杂得多．由于中立型时滞微分方程在许多领域中有着广泛的应用[1-2]，因此它的振动理论也倍受重视．近几年来，已有许多研究成果问世[3-5].

本文考虑带正负系数的中立型时滞微分方程

$$\left[x(t)-px(t-\tau)\right]'+qx(t-\sigma)-rx(t-\rho)=0,\ t\ge t_0 \tag{1}$$

其中 p,q,r 为非负常数，τ,σ,ρ 为非负实数.

定义 1 设 $m=\max\{\tau,\sigma,\rho\}$，若 $x(t)\in C([t_0-m,\infty),R)$，使得 $x(t)-px(t-\tau)\in C^1([t_0,\infty),R)$ 且满足方程（1），则称 $x(t)$ 为方程（1）的解.

定义 2 方程（1）的解 $x(t)$ 称为振动的，如果 $x(t)$ 既不最终为正，也不最终为负．否则，称为非振动的.

1 主要结果

引理 1[6] 方程（1）的一切解均为振动的必要充分条件是它的特征方程

$$F(\lambda)=\lambda-p\lambda e^{-\lambda\tau}+qe^{-\lambda\sigma}-re^{-\lambda\rho}=0 \tag{2}$$

无实根.

定理 1 设（i）$0<p<1$，$q>r$，$\sigma>\rho$；

（ii）$1-p-q\sigma+r\rho>0$；

（iii）$(q-r)\left[e\sigma+\dfrac{p\tau}{1-p-q\sigma+r\rho}\right]>(1-p)-r(\sigma-\rho)$.

则方程（1）的一切解振动.

证明：设方程（1）有非振动解，则特征方程（2）有实根，现将方程（2）写为：

收稿日期：2007-05-25

作者简介：李玉梅(1983-)，女，湖北黄石人，硕士研究生，研究方向：微分差分方程的振动性

$$F(\lambda)=\lambda\left(1-pe^{-\lambda\tau}-re^{-\lambda\rho}\int_0^{\sigma-\rho}e^{-\lambda s}ds\right)+(q-r)e^{-\lambda\sigma}=0 \qquad (3)$$

设$\lambda>0$，则$e^{-\lambda s}$是s的减函数，于是有：

$$re^{-\lambda\rho}\int_0^{\sigma-\rho}e^{-\lambda s}ds<re^{-\lambda\rho}\cdot e^{0\cdot s}(\sigma-\rho)=r(\sigma-\rho)e^{-\lambda\rho}<r(\sigma-\rho)$$

则$F(\lambda)>\lambda(1-p-r(\sigma-\rho))$，而$1-p-r\sigma+r\rho>1-p-q\sigma+r\rho>0$，故有$F(\lambda)>0$，又$F(0)=q-r>0$，因此方程（2）不可能有非负实根.

下面证明方程（2）没有负实根.

事实上，当$\lambda<0$时，由（3）得：

$$F(\lambda)=\lambda\left[1-pe^{-\lambda\tau}-re^{-\lambda\rho}\int_0^{\sigma-\rho}e^{-\lambda s}ds+\frac{1}{\lambda}(q-r)e^{-\lambda\sigma}\right]$$

为此，只需证明$1-pe^{-\lambda\tau}-re^{-\lambda\rho}\int_0^{\sigma-\rho}e^{-\lambda s}ds<-\frac{1}{\lambda}(q-r)e^{-\lambda\sigma}$.

现令$-\lambda=\mu>0$，上式化为：

$$1-pe^{\mu\tau}-re^{\mu\rho}\int_0^{\sigma-\rho}e^{\mu s}ds<\frac{1}{\mu}(q-r)e^{\mu\sigma}$$

再令$f_1(\mu)=1-pe^{\mu\tau}-re^{\mu\rho}\int_0^{\sigma-\rho}e^{\mu s}ds$，$f_2(\mu)=\frac{1}{\mu}(q-r)e^{\mu\sigma}$，

为此，只需证明$f_1(\mu)<f_2(\mu)$.

构造函数f，使得$f_2-f>0, f-f_1>0$，即可令$f(\mu)=1-p-p\mu\tau-r(\sigma-\rho)$，则

$$\begin{aligned}f(\mu)-f_1(\mu)&=1-p-p\mu\tau-r(\sigma-\rho)-\left[1-pe^{\mu\tau}-re^{\mu\rho}\int_0^{\sigma-\rho}e^{\mu s}ds\right]\\&=p\left(e^{\mu\tau}-1-\mu\tau\right)+r\left[e^{\mu\rho}\int_0^{\sigma-\rho}e^{\mu s}ds-(\sigma-\rho)\right]\end{aligned}$$

注意到$e^{\mu\rho}\int_0^{\sigma-\rho}e^{\mu s}ds=\int_0^{\sigma-\rho}e^{\mu(\rho+s)}ds>\sigma-\rho$，故有$f(\mu)-f_1(\mu)>0$.

为证$f_2(\mu)-f(\mu)>0$，令$g(\mu)=f_2(\mu)-f(\mu)$，则

$$g(\mu)=\frac{1}{\mu}(q-r)e^{\mu\sigma}-(1-p)+p\mu\tau+r(\sigma-\rho)$$

考虑$\mu=\frac{1}{\alpha\sigma}$，$\alpha>0$时，$g(\mu)$的函数值，于是有：

$$\begin{aligned}g(\mu)\big|_{\mu=\frac{1}{\alpha\sigma}}&=\alpha\sigma(q-r)e^{\frac{1}{\alpha}}-(1-p)+\frac{p\tau}{\alpha\sigma}+r(\sigma-\rho)\\&>\alpha\sigma(q-r)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-(1-p)+\frac{p\tau}{\alpha\sigma}+r(\sigma-\rho)\\&=\alpha\sigma(q-r)+\sigma(q-r)-(1-p)+\frac{p\tau}{\alpha\sigma}+r(\sigma-\rho)\\&>\alpha\sigma(q-r)+\sigma(q-r)-(1-p)+r(\sigma-\rho)\end{aligned}$$

故当$\alpha > \dfrac{1-p-q\sigma+r\rho}{(q-r)\sigma}$，即$\mu < \dfrac{q-r}{1-p-q\sigma+r\rho}$时，有$g(\mu)>0$.

现考虑$\mu \ge \dfrac{q-r}{1-p-q\sigma+r\rho}$时，

$$\begin{aligned}g(\mu)&=\frac{1}{\mu}(q-r)e^{\mu\sigma}-(1-p)+p\mu\tau+r(\sigma-\rho)\\&\ge e\sigma(q-r)-(1-p)+p\tau\cdot\frac{q-r}{1-p-q\sigma+r\rho}+r(\sigma-\rho)\\&=(q-r)\left[e\sigma+\frac{p\tau}{1-p-q\sigma+r\rho}\right]-\left[(1-p)-r(\sigma-\rho)\right]\end{aligned}$$

故$g(\mu)>0$，定理 1 证毕

定理 2　设（i）$0<p<1$，$q>r$，$\sigma>\rho$；

（ii）$1-p-q\sigma+r\rho>0$；

（iii）$(q-r)\left[\sigma+\dfrac{(q-r)\sigma^2+2p\tau}{2(1-p-q\sigma+r\rho)}\right]>(1-p)-r(\sigma-\rho)$.

则方程（1）的一切解振动.

证明：利用不等式$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2!}$，证明过程类似与定理 1 的证明.

定理 3　设（i）$0<p<1$，$q>r$，$\sigma>\rho$；

（ii）$(1-p)-(q-r)\sigma>0$；

（iii）$(1-p)-r(\sigma-\rho)>0$；

（iv）$(q-r)\left[e\sigma+\dfrac{p\tau}{(1-p)-(q-r)\sigma}\right]>(1-p)-r(\sigma-\rho)$.

证明：证明的前半部分与定理 1 的相同.

考虑$\mu=\dfrac{1}{\alpha\sigma}$，$\alpha>0$时，$g(\mu)$的函数值，于是有：

$$\begin{aligned}g(\mu)\big|_{\mu=\frac{1}{\alpha\sigma}}&=\alpha\sigma(q-r)e^{\frac{1}{\alpha}}-(1-p)+\frac{p\tau}{\alpha\sigma}+r(\sigma-\rho)\\&>\alpha\sigma(q-r)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)-(1-p)\\&=\alpha\sigma(q-r)+\sigma(q-r)-(1-p)\\&=\alpha\sigma(q-r)-\left[(1-p)-(q-r)\sigma\right]\end{aligned}$$

故当$\alpha>\dfrac{(1-p)-(q-r)\sigma}{(q-r)\sigma}$，即$\mu<\dfrac{q-r}{(1-p)-(q-r)\sigma}$时，$g(\mu)>0$.

现考虑$\mu\ge\dfrac{q-r}{(1-p)-(q-r)\sigma}$的情况，注意到$e^x\ge ex$，则

$$
\begin{aligned}
g(\mu) &= \frac{1}{\mu}(q-r)e^{\mu\sigma} - (1-p) + p\mu\tau + r(\sigma-\rho) \\
&\geq \frac{1}{\mu}(q-r)\cdot e\mu\sigma - (1-p) + p\tau\cdot\frac{q-r}{(1-p)-(q-r)\sigma} + r(\sigma-\rho) \\
&= (q-r)e\sigma - (1-p) + p\tau\cdot\frac{q-r}{(1-p)-(q-r)\sigma} + r(\sigma-\rho) \\
&= (q-r)\left[e\sigma + \frac{p\tau}{(1-p)-(q-r)\sigma}\right] - \left[(1-p) - r(\sigma-\rho)\right]
\end{aligned}
$$

故由条件（iv）知，$g(\mu)>0$，定理 3 证毕.

定理 4　设（i）$0<p<1$，$q>r$，$\sigma>\rho$；

（ii）$(1-p)-(q-r)\sigma>0$；

（iii）$(1-p)-r(\sigma-\rho)>0$；

（iv）$(q-r)\left[\sigma+\dfrac{p\tau}{(1-p)-(q-r)\sigma}\right]>(1-p)-r(\sigma-\rho)$.

则方程（1）的每个解振动.

证明：利用不等式 $e^x \geq 1+x(x\geq 0)$，证明过程类似与定理 3 的证明.

2 例　子

例 1　考虑中立型微分方程

$$\left[x(t)-\frac{1}{2}x(t-1)\right]' + \frac{1}{10}x(t-3) - \frac{1}{20}x(t-2) = 0 \tag{4}$$

其中 $p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{10}$，$r=\dfrac{1}{20}$，$\tau=1$，$\sigma=3$，$\rho=2$.

满足定理 1 的判定条件.

例 2　考虑中立型微分方程

$$\left[x(t)-\frac{1}{4}x(t-1)\right]' + \frac{1}{8}x(t-4) - \frac{1}{16}x(t-1) = 0 \tag{5}$$

其中 $p=\dfrac{1}{4}$，$q=\dfrac{1}{8}$，$r=\dfrac{1}{16}$，$\tau=1$，$\sigma=4$，$\rho=1$.

满足定理 3 的判定条件.

参考文献

[1] Hale J. Theory of Functions Differential Equations [M]. New York: Springer Verlag, 1977. 1-8.

[2] Kolmanovskii V B, Rosov V R. Stability of Functional Differential Equations [M]. New York: Academical Press, 1986. 30-48.

[3] Ladas G, Sficas Y G. Oscillations of neutral delay differential equations [J]. Can Math Bull, 1986, 29(4): 438-445.

[4] Lin S Z. Oscillation in first order neutral differential equations [J]. Ann of Diff Eqs, 2003, 19(3): 334-336.

[5] 周勇，俞元洪．一阶中立型时滞微分方程的振动性[J]．数学研究与评论, 2001, 21(3): 86-88.

[6] Gyori I, Ladas G. Oscillation Theory of Differential Equation with Applications [M]. Oxford, UK: Charendon Press, 1991. 33.

The Oscillation for the Differential Equations of the First Order Neutral Delay

LI Yumei, WANG Youbin, FAN Yehua

(College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: The oscillation of the differential equation of the first neutral delay $\left[x(t)-px(t-\tau)\right]'+qx(t-\sigma)-rx(t-\rho)=0$ is studied in this paper, where $p\in(0,1)$, the sufficient conditions for oscillation of the equation are obtained by suitable inequality and characteristic equation.

Key words: Neutral; Positive and negative coefficients; Oscillation

（编辑：王一芳）