文章编号:1000-5641(2008)03-0037-08

2-连通图的单圈子图

李时银， 白　云， 董　倩，任　韩
(华东师范大学 数学系,上海　200062)

摘要：证明了如下结果:(1) 一个2-连通图 G 的 Θ-图是 $2(\rho-1)$ 连通的；(2) 如果一个2-连通图 G 有两个单圈支撑子图,且这两个单圈支撑子图分别含 m 和 n 个悬挂点($m<n$),则图 G 至少有 $2(\rho-1)$ 个含 k 个悬挂点的单圈支撑子图,这里 $m\leqslant k\leqslant n$, $\rho=|E(G)|-|V(G)|+1$.

关键词：2-连通图；　单圈支撑子图；　Θ-图；　邻 Θ-图
中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A

Unicyclic subgraphs in 2-connected graphs

LI Shi-yin， BAI Yun， DONG Qian， REN Han
(*Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China*)

Abstract： This paper proved the following results: (1) The Θ-graph of a 2-connected graph is $2(\rho-1)$ connected; (2) if a 2-connected graph G has two unicyclic spanning subgraphs and the number of one-valent vertices of these two subgraphs are respectively m and n $(m<n)$, then for any integer k; $m\leqslant k\leqslant n$, there exist at least $2(\rho-1)$ unicyclic subgraphs of graph G which have k one-valent vertices. Here, ρ is the dimension of the cycle space of G.

Key words： cut edge； 2-connected graph； unicyclic spanning subgraph； Θ-graph； adjacent Θ-graph

0　引　　言

一个图 G 的圈秩(即:圈空间维数),定义为 $\rho=|E(G)|-|V(G)|+1$. 设 T 为图 G 的支撑树,定义 G 的树图 $T(G)$ 如下:$V(T(G))$ 是把 G 的所有生成树作为 $T(G)$ 中点的集合. $\forall T,T'\in V(T(G))$, $TT'\in(T(G))$ 当且仅当 $|E(T)\oplus E(T')|=2$. 而 G 的邻接树图 $T^\star(G)$ 定义为 $T(G)$ 的支撑子图,且 $T^\star(G)$ 中有边 $TT'\in(T^\star(G))$,如果 $T'=T-uv+uw$, 则 $T^\star(G)$ 中有边 $TT'\in V(T^\star(G)$, 其中 $uv\in uw\notin T$.

收稿日期:2007-05
基金项目:国家自然科学基金项目(10671073);上海市科委基础研究项目(07XD14011);上海市重点学科建设项目(B407)
第一作者:李时银,女,硕士.
通讯作者:任韩,男,教授. E-mail: hren@euler.math.ecnu.edu.cn.

关于树图及邻接树图的相关性质的研究，吸引了众多的研究者，并且得到了许多结果[1-3]. 因为这两类图可以应用到通讯网络的拓扑结构当中. 特别地，人们对树图中有 k 个悬挂点的支撑树的内插性质的研究产生了极大的兴趣，文献[4]给出了它的详细证明，并得出了其最佳下界.

由于树是平面上的单面地图(即：一个面的嵌入图)，本文考虑由 2-连通图 G 的支撑树 T 再加上一条 边 e，即图 G 的单圈支撑子图(这里的单圈支撑子图就是射影平面上的单面子图)来研究图 G 的单圈支撑子图的性质，可以预见这对于今后研究射影平面上的单面地图拓扑性质的应用意义.

类似树图，可以定义图 G 的 Θ-图 $\Theta(G)$ 及邻 Θ-图 $A(G)$. 图 G 的单圈支撑子图 S 定义为图 G 的支撑树 T 再加上一条边 $e(e\in G)$，即 $S=T+e$. 图 G 的 Θ-图定义为：点集 $V(\Theta(G))$ 是把 G 的所有单圈支撑子图作为 $\Theta(G)$ 中的点的集合，图 G 的两个单圈子图 S 与 S' 有边 $SS'\in E(\Theta(G))$ 当且仅当 $|E(S)\oplus E(S')|=2$. 类似地，定义图 G 的邻 Θ-图 $A(G)$ 如下：$A(G)$ 为 $\Theta(G)$ 的支撑子图，且 $A(G)$ 中有边 $SS'\in E(A(G))$，如果 $S'=S-uv+uw$(其中边 $uv\in S$，边 $uw\notin S$).

本文从 2-连通图出发，运用一个支撑树的两个基本圈之间存在圈链这一性质，研究了其邻 Θ-$A(G)$ 的结构并得到如下结果：

定理 A 设 S,S' 为 2-连通图 G 中两个单圈支撑子图，则在 $\Theta(G)$ 中至少有 $2(\rho-1)$ 条内部不交路连 S 和 S'. 这里，ρ 是 G 的圈秩.

定理 B 如果一个 2-连通图 G 有两个单圈支撑子图，且这两个单圈支撑子图分别含 m 和 n 个悬挂点($m<n$)，则图 G 至少有 $2(\rho-1)$ 个含 k 个悬挂点的单圈支撑子图. 这里圈秩 $\rho=|E(G)|-|V(G)|+1$，其中 $m\leqslant k\leqslant n$.

1 定理 A 的证明

引理 1 设 S,S' 分别为 2-连通图 G 的两个单圈支撑子图，圈 C_x,C_y 分别为 S,S' 中的基本圈($C_x\neq C_y$)且边 $e'_1\in C_x$，边 $e'_1\in C_y$. 则有以下结论成立：$S'=S+e'_1-e_1$(即 $SS'\in E(\Theta(G))$)$\Leftrightarrow$存在 G 中的一个支撑树 T_0，使得 $S=T_0+e_1$，$S'=T_0+e'_1$($e_1,e'_1\notin T_0$).

证明 $\Rightarrow$因为 $e_1\in C_x$，则必有 G 中的一支撑树 T_1，使得 $S=T_1+e_1$. 同理，由 $e'_1\in C_y$ 知，必有 G 中的一支撑树 T_2，使得 $S'=T_2+e'_1$. 因为 $S'=S+e'_1-e_1$，将 S,S' 分别代入该式，得 $T_1=T_2$. 令 $T_1=T_2=T_0$，从而得 $S=T_0+e_1$，$S'=T_0+e'_1$($e_1,e'_1\notin T_0$).

$\Leftarrow$ 若存在 G 中的一个支撑树 T_0，使得 $S=T_0+e_1$，$S'=T_0+e'_1$($e_1,e'_1\notin T_0$)，则通过简单的运算易得 $S'=S+e'_1-e_1$，即 $SS'\in(\Theta(G))$.

断言 1(基本圈链存在性) 设 S,S' 分别为 2-连通图 G 的两个单圈支撑子图，圈 C_x，C_y 分别为 S,S中的基本圈($C_x\neq C_y$，$e_1\in C_x$，$e'_1\in C_y$)且 $S'=S+e'_1-e_1$(即 $SS'\in E(\Theta(G))$). 若 $C_x\cap C_y=\varnothing$，则有 G 中的支撑树 T_0 及其基本圈链：$\{C_x=C_0,C_1,C_2,\cdots,C_k,C_{k+1}=C_y\}$. 该圈链满足：$C_i\cap C_{i+1}\neq\varnothing(0\leqslant i\leqslant k)$，$C_i\cap C_j=\varnothing(|i-j|\geqslant 2,0\leqslant i,j\leqslant k+1)$，且 C_i 上只有一条边 f_i 不在 S 中($1\leqslant i\leqslant k$).

证明 如图 1 所示. 因为 $S'=S+e'_1-e_1$，所以在 $S+e'_1$ 中有 T_0 的两个基本圈 C_x,C_y(T_0 的存在性由引理 1 可知). 易知，$S=T_0+e_1$，$S'=T_0+e'_1$. 若 $C_x\cap C_y=\varnothing$，则必有一条 T_0 中的路 $P=(v_0^{(0)},v_1^{(0)},\cdots,v_3^{(0)},\cdots,v_{m+1}^{(0)})$连接圈 C_x 与 C_y，这里点 $v_0^{(0)}\in C_x$，$v_{m+1}^{(0)}\in C_y$，$v_i^{(0)}$

$\notin C_x \cup C_y(1 \leqslant i \leqslant m)$. 取子路 $P_m=(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \cdots, v_3^{(0)}, \cdots, v_m^{(0)})$. 因为 $S+e'_1$ 去掉边 $v_0^{(0)}v_1^{(0)}$ 和边 $v_m^{(0)}v_{m+1}^{(0)}$ 有三个分支，记包含路 P_m 的分支为 T，其点集为 V_T；包含圈 C_x 的分支的所有点集为 V_{c_x}；包含圈 C_y 的分支的所有点集为 V_{c_y}. 那么，有 $V(S+e'_1)=V_{c_x}\cup V_{c_y}\cup V_T$，且 V_{c_x}, V_{c_y}, V_T 这三个集合两两无公共点. 在分支 T 中，去掉边 $v_r^{(0)}v_{r+1}^{(0)}(1\leqslant r\leqslant m-1)$，可得到 T 的 m 个子树，把这些子树依次记为 T_r（其中 T_r 是以 $v_r^{(0)}$ 为根的子树）. 从根 $v_r^{(0)}$ 起对 T_r 中的节点依次标记，记为：$v_r^{(0)}, v_r^{(1)}, v_r^{(2)}, \cdots, v_r^{(k_r)}(k_r=|V(T_r)|-1, 1\leqslant r\leqslant m)$.

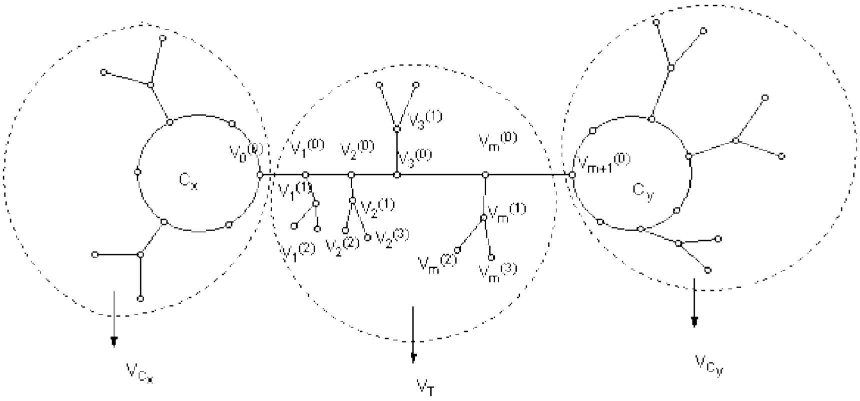

图 1　将 $S+e'$ 中的点分为三类：$V(S+e'_1)=V_{c_x}\cup V_{c_y}\cup V_T$

Fig. 1　A partition of $V(S+e'_1)$

因为 G 为 2-连通图，则必存在一边 $f_1=u_1w_1\in G-(S\cup S')$，其中 $u_1\in V_{C_x}$，点 $w_1\in V_T\cup V_{C_y}$. 若点 $w_1\in V_{C_y}$，则得证. 否则，假设点 $w_1\in V_T$，必有一子树 $T_{r_1}(1\leqslant r_1\leqslant m)$，使得 $w_1\in V(T_{r_1})$，且 T_{r_1} 的根 $v_{r_1}^{(0)}$ 是路 P_m 上距离 C_y 最近的节点. 那么在 $S+f_1$ 中有不同于圈 C_x 的基本圈 C_1. 易见 $C_x\cap C_1\neq\varnothing, C_1\cap C_y=\varnothing$（否则可归入前面的情形）.

同理，可以找到 G 中的边 $f_i=u_iw_i\in G-(S\cup S')$，及 $S+f_i$ 中的不同于圈 C_x 的基本圈 $C_i(2\leqslant i\leqslant m+1)$，使得 $C_i\cap C_{i+1}\neq\varnothing, C_i\cap C_j=\varnothing(|i\text{-}j|\leqslant 2, 0\leqslant i,j\leqslant m+1)$. 由于路 P_m 上的点有限，所以这样的边 f_i 也有限. 不妨假设为 k 条（即 $1\leqslant i\leqslant k$），从而得到 G 中的圈链：$C_x=C_0, C_1, C_2, \cdots, C_k, C_{k+1}=C_y$，且该圈链满足：$C_i\cap C_{i+1}\neq\varnothing(0\leqslant i\leqslant k), C_i\cap C_j=\varnothing(|i\text{-}j|\geqslant 2, 0\leqslant i,j\leqslant k+1)$，且 C_i 上只有一条边 f_i 不在 S 中 $(1\leqslant i\leqslant k)$.

设 S 为 2-连通图 G 的某个单圈支撑子图. 对任意的边 $e\in G-S$，$S+e$ 有 G 的双圈支撑子图，记 $S+e$ 的两个圈为 C_1, C_2，则边 e 至少属于 C_1, C_2 中的一个，不妨设 $e\in C_2$，另外设边 $f\in C_2$. 对 C_2 中的边，自边 e 起按照逆时针排序，记为 $C_2=(e=x_1, \cdots, x_q=f, \cdots, x_{q+p}, x_1)$. 现在令 $S_i=S+e-x_i(1\leqslant i\leqslant q+p)$，那么 S_i 均为 G 的单圈支撑子图. 记 $S_f=S+e-f$，故在图 G 的邻 Θ-图 $A(G)$ 中有两条内部不交路连接 S, S_f. 这两条路分别为：$P_1=(S, S_1, S_2, \cdots, S_q=S_f)$ 和路 $P_2=(S, S_{q+p}, S_{q+p-1}, \cdots, S_{q+1}, S_q)$，并定义路 P_1 的变换方式为：S 在 G 中把圈 C_2 从不含边 e 沿圈 C_2 按逆时针变到不含边 f；P_2 的变换方式为：S 在 G 中把圈 C_2 从不含边 e 沿圈 C_2 按顺时针变到不含边 f. 很显然，路 P_1，P_2 的内点均不相交.

引理 2　设 S, S' 是 2-连通图 G 的两个单圈支撑子图，且 $S'=S+e'_1-e_1$（即 $SS'\in E(\Theta(G))$），那么 S 和 S' 在邻 Θ-图 $A(G)$ 中的同一圈上.

证明　因为 $S+e'_1$ 有两个基本圈 C_x, C_y，根据 C_x, C_y 的位置，下面分三种情况讨论：

(1) 若 $E(C_x)\cap E(C_y)\neq\varnothing$,则 e_1,e'_1 必在 $S+e'_1$ 的同一 2-边连通子图 G' 上($G'=C_x\cup C_y$). 记 G' 中含边 e_1,e'_1 的圈为 C'. 由于 $|E(C')|\geqslant 3$,记 C' 中的边依次为:$\{e'_1=x_1,x_2,\cdots,x_q,e_1=x_{q+1},\cdots,x_{q+p},x_1\}$(其中 $p>1$ 或 $q>1$),那么 $S_i=S+e'_1\text{-}x_i(1\leqslant i\leqslant q+p)$ 是 G 的单圈支撑子图. 故在 $A(G)$ 中有圈 $(S=S_1,S_2,\cdots,S_{q+1}=S',\cdots,S_{q+p},S_1)$ 含 S 与 S',从而得证. 为了以后方便,记路 $P^\star$ 为 $(S=S_1,S_2,\cdots,S_q,S_{q+1}=S')$.

(2) 若 C_x,C_y 只有一个公共点,则 e_1,e'_1 必在 $S+e'_1$ 的同一个 2-边连通子图 $G'(G'=C_x\cup C_y)$ 上. 由于 $|E(G')|\geqslant 3$,记 G' 中的边依次为:$\{e'_1=x_1,x_2,\cdots,x_q,e_1=x_{q+1},\cdots,x_{q+p},x_1\}$(其中 $p>3$ 或 $q>3$),那么 $S_i=S+e'_1-x_i(1\leqslant i\leqslant q+p)$ 是 G 的单圈支撑子图. 故在 $A(G)$ 中有圈 $(S_1=S,S_2,\cdots,S_{q+1}=S',\cdots,S_{q+p},S_1)$ 含 S 与 S',从而得证.

(3) 若 $C_x\cap C_y=\varnothing$,则由断言 1,在 G 中有一基本圈链 $\{C_x=C_0,C_1,C_2,\cdots,C_k,C_{k+1}=C_y\}$. 该圈链满足:$C_i\cap C_{i+1}\neq\varnothing(0\leqslant i\leqslant k)$,$C_i\cap C_j=\varnothing(|i-j|\geqslant 2,0\leqslant i,j\leqslant k+1)$,且 C_i 上只有一条边 f_i 不在 S 中 $(1\leqslant i\leqslant k)$. 因为 $C_i\cap C_{i+1}\neq\varnothing(0\leqslant i\leqslant k)$,则 $C_i\cap C_{i+1}$ 为一个点 v_i 或者为一条路 L_i. 若 $C_i\cap C_{i+1}$ 为一条路,为了方便后面的叙述,将该路收缩并记为点 v_i. 现记图 G 的 2-边连通子图 $G_i=C_iC_{i+1}(0\leqslant i\leqslant k)$,并记与 v_i 关联的四条边分别为 a_i,b_i,g_i,h_i. 其中边 a_i 与边 $b_i\in(C_i\cap G_i)$,而边 g_i 与边 $h_i\in(C_{i+1}\cap G_i)(0\leqslant i\leqslant k)$. 如图 2 所示.

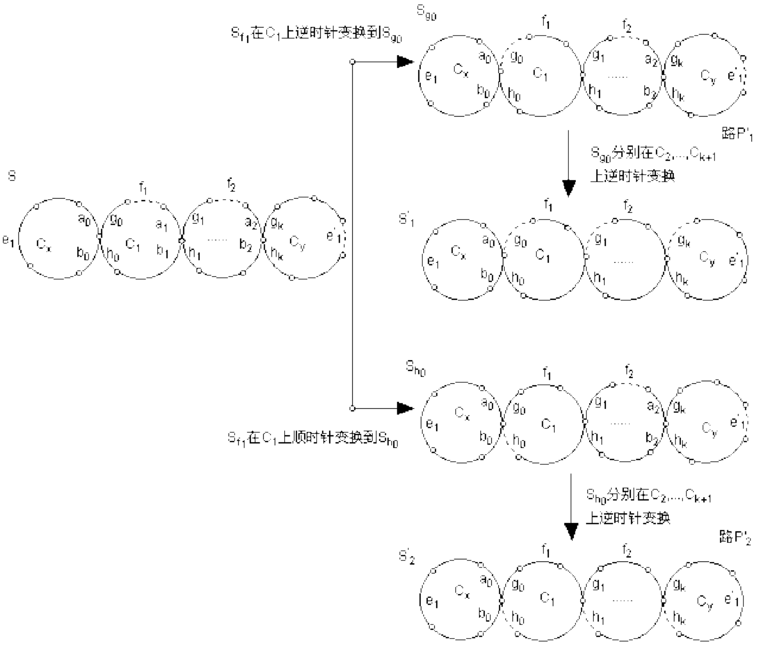

图 2　前一条路为 S 经路 P'_1 变换到 S'_1;后一条路为 S 经路 P'_2 变换到 S'_2

Fig. 2　Two transformations from S to S'_1 and S'_2, respectively

参见图 2,现在做如下变换:在圈 C_1 中,按照逆时针的顺序,从边 f_1 开始记圈 C_1 中的边依次为 $C_1=(f_1=x_1,\cdots,x_q=g_0,x_{q+1}=h_0,\cdots,x_{q+p},x_1)$. 那么 $S_i=S+f_1-x_i(1\leqslant i\leqslant q+p)$ 均为 G 的单圈支撑子图. 显然,$p_1=(S,S_1,\cdots,S_q=S_{g_0})$ 与 $p_2=(S,S_{q+p},S_{q+p-1},\cdots,S_{q+1}=S_{h_0})$ 为 $A(G)$ 中的两条内部不交路.

设 $e_1=f_0,e'_1=f_{k+1}$. 考虑图 G 的单圈支撑子图 S_{g_0}. 把 S_{g_0} 分别在圈 C_i 上从不含边 f_i 逆

时针变换到不含边 $g_{i-1}(2\leqslant i\leqslant k+1)$，从而得到 G 的单圈支撑 $S'_1=S+\sum_{i=0}^{k}(f_{i+1}-g_i)$，并记这一从 S 变换到 S'_1 的路为 P'_1（如图 2 前一条路所示）. 由变换的过程知道，路 $P'_1\in A(G)$.

考虑图 G 的单圈支撑子图 S_{h_0}. 把 S_{h_0} 分别在圈 C_i 上从不含边 f_i 顺时针变换到不含边 $h_{i-1}(2\leqslant i\leqslant k+1)$，从而得到 G 的单圈支撑 $S'_2=S+\sum_{i=0}^{k}(f_{i+1}-h_i)$，并记这一从 S 变换到 S'_2 的路为 P'_2（如图 2 后一条路所示）. 由变换的过程知道，路 $P'_2\in A(G)$，且 $A(G)$ 中的路 P'_1，P'_2 的内部点均不相交.

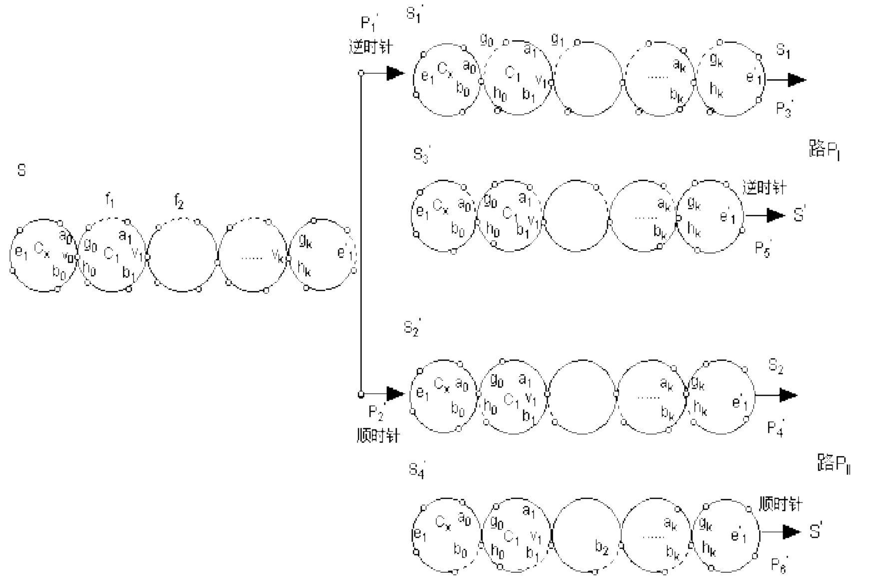

图 3　前一条路为 S 经路 $P_I=(p'_1,p'_3,p'_5)$ 变换到 S'；后一条路为 S 经路 $P_{II}=(p'_2,p'_4,p'_6)$ 变换到 S'

Fig. 3　Two paths $P_I=(p'_1,p'_3,p'_5)$ and $P_{II}=(p'_2,p'_4,p'_6)$ joining S with S' and S'', respectively

如图 3，$S'_1+\sum_{i=0}^{t}(g_i-a_i)(t=0,1,\cdots,k)$ 也是 G 的单圈支撑子图. 对 S'_1 依次作以下变换：$\{S'_1,S'_1+(g_0-a_0),S'_1+\sum_{i=0}^{1}(g_i-a_i),\cdots,S'_1+\sum_{i=0}^{k}(g_i-a_i)=S'+\sum_{i=0}^{k}(f_i-a_i)=S'_3\}$，并把这一从 S'_1 到 S'_3 的路记为 P'_3. 对 S'_3，把圈 C_0 从不含边 a_0 逆时针变换到不含边 e_1；再分别把圈 C_i 从不含边 a_i 逆时针变换到不含边 $f_i(1\leqslant i\leqslant k)$，从而得到单圈支撑子图 S'，并记这一 S'_3 到 S' 的路为 P'_5（如图 3 中的路 P'_3，P'_5）. 显然，路 P'_3，$P'_5\in A(G)$.

同理，$S'_2+\sum_{i=0}^{t}(h_i-b_i)(t=0,1,\cdots,k)$ 也是 G 的单圈支撑子图. 对 S'_2 依次作以下变换：$\{S'_2,S'_2+(h_0-b_0),S'_2+\sum_{i=0}^{1}(h_i-b_i),\cdots,S'_2+\sum_{i=0}^{k}(h_i-b_i)=S'+\sum_{i=0}^{k}(f_i-b_i)=S'_4\}$，并把这一从 S'_2 到 S'_4 的路记为 P'_4. 对 S'_4，把圈 C_0 从不含边 b_0 按顺时针变换到不含边 e_1，再分别把圈 C_i 从不含边 b_i 按顺时针变换到不含边 $f_i(1\leqslant i\leqslant k)$，从而得到单圈支撑子图 S'，并记 S'_4 到 S' 的路为 P'_6（如图 3 中的路 P'_4，P'_6）. 显然，路 P'_4，$P'_6\in A(G)$.

由此，可得到 $A(G)$ 中含 S，S' 的两条路：$P_I=P'_1\cup P'_3\cup P'_5$ 和 $P_{II}=P'_2\cup P'_4\cup P'_6$. 由变换的过程，知 P_I，P_{II} 内部点均不交，从而得证.

引理 3 设2-连通图G的圈空间维数$\rho\geqslant 3$(边$e\in E(G)$),$A(G)$为图G的邻Θ-图.点集$V_1\subseteq V(A(G))$且$V_1=\{S: S$是G的单圈支撑子图且边$e\in S\}$.则$H=A(G)[V_1]$是2-连通图,其中$A(G)[V_1]$为邻Θ-图$A(G)$中点集V_1的导出子图.

证明 要证H是2-连通图,则需要证明对任意$S,S'\in V_1(S\neq S')$,都有H中的一个圈含S,S'.用数学归纳法,对$|S-S'|$的大小进行证明.

若$|S-S'|=1$且$S=S'+e_1-e'_1$,那么在G中,$S+e'_1$有两个基本圈C_x与C_y.假设$e_1\in C_x,e'_1\in C_y$.根据C_x与C_y不同的位置关系来分情形进行讨论:

(1) 若$C_x\cap C_y\neq\varnothing$,则$e_1,e'_1$必在$S+e'_1$的同一个2-边连通子图$G'$上.其中$G'$如下定义:若$(C_x\cap C_y)$为一个点,则取$G'=C_x\cup C_y$;若$E(C_x)\cap E(C_y)\neq\varnothing$,则取$G'$为$C_x\cup C_y$中包含边$e_1,e'_1$的一个子圈.这里记$G'$的边依次为$E(G')=\{e'_1=x_1,x_2,\cdots,x_q,e_1=x_{q+1},\cdots,x_{q+p},x_1\}$,则$S_i=S+e'_1-x_i(1\leqslant i\leqslant q+p)$是$G$的单圈支撑子图.若$e\notin G'$,则$e\in S_i$.从而,在$A(G)$中有圈$(S=S_1,S_2,\cdots,S_{q+1}=S',\cdots,S_{q+p},S)$含$S,S'$且边$e\in S_i(1\leqslant i\leqslant q+p)$.

故假设$e\in G'$,不妨设$e=x_{q+t}(2\leqslant t\leqslant p)$.由于$\rho\geqslant 3$,故一定有一边$e^\star\in G$且$e^\star\notin S\cup S'$.令$e^\star=uv$.如果点$v\notin V(G')$,那么必有一边$f=vw$满足$f\in S\cap S'$且$f\notin G'$.所以$S^\star=S+e^\star-f$也是$G$的一个单圈支撑子图.令$S_i^\star=S^\star+e'_1-x_i(1\leqslant i\leqslant q+p)$,那么在$H=A(G)[V_1]$中,有路$P_1=(S,S^\star=S_1^\star,S_2^\star,\ldots,S_{q+1}^\star=S'+e^\star-f,S')$(其中所有的内点都包含边$e^\star$),以及引理2(1)的路$P^\star$(其中所有的点都不含$e^\star$).从而得到所需要的圈$P_1P^\star$.

故令$e^\star=uv$且点$u,v\in$点集$V(G')$.假设在G'中,点u与边x_{r-1},x_r关联,点v与边x_s和x_{s+1}关联$(r<s)$.分三种情况讨论.

(1.1) 若边$e^\star$与边集$E_1=(e'_1=x_1,x_2,\cdots,x_{q+1}=e_1)$邻接:

令$S^\star=S+e^\star-x_r,S''=S+e^\star-x_s,S_i^\star=S^\star+e'_1-x_i,S''_i=S''+e'_1-x_i(1\leqslant i\leqslant r-1$或$s+1\leqslant i\leqslant q+1)$.那么在$H$中有路$P_1=(S,S^\star=S_1^\star,\ldots,S_{r-1}^\star,S+e'_1-x_r,S_{s+1}^\star,\ldots,S_q^\star,S_{q+1}^\star,S')$,和路$P_2=(S,S''=S''_1,\cdots,S''_{r-1},S+e'_1-x_s,S''_{s+1},\cdots,S''_q,S''_{q+1},S')$,其中路$P_1$的点均含$x_s$,而路$P_2$的点均不含$x_s$,故$P_1P_2$为$H$中含$S,S'$的圈.

(1.2) 若边$e^\star$与边集$E_2=(e_1=x_{q+1},x_{q+2},\cdots,x_{q+p},x_1=e'_1)$邻接:

则边x_r,x_s中至少有一条边不为e.不妨设$x_r\neq e$(类似可以证$x_s\neq e$的情形).令$S^\star=S+e^\star-x_r,S_i^\star=S^\star+e'_1-x_i(1\leqslant i\leqslant q+1)$,可得路$P_3=(S,S^\star=S_1^\star,\ldots,S_{q+1}^\star,S')$,结合引理2(1)的路$P^\star$,进而得到$H$中的圈$P^\star P_3$含$S,S'$.

(1.3) 若$e^\star=uv$且点u与边集E_1关联,点v与边集E_2关联:

令$S^\star=S+e^\star-x_r,S_i^\star=S^\star+e'_1-x_i(1\leqslant i\leqslant r-1),S''=S^\star+e'_1-x_{r-1}$,且$S''_i=S''+x_r-x_i(r+1\leqslant i\leqslant q+1)$.那么在$H$中有路$P_4=(S,S^\star=S_1^\star,\ldots,S_{r-1}^\star,S''_{r+1},S''_{r+2},\cdots,S''_{q+1},S')$(其中所有内点都包含边$e^\star$).结合引理2(1)的路$P^\star$,得到$H$中的圈$P^\star P_4$.

(2) 若$C_x\cap C_y=\varnothing$.

则由断言1,在G中有一基本圈链连接圈C_x与C_y,该圈链依次为$\{C_x=C_0,C_1,C_2,\cdots,C_k,C_{k+1}=C_y\}$,其中满足$C_i\cap C_{i+1}\neq\varnothing(0\leqslant i\leqslant k),C_i\cap C_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant k,|i-j|\geqslant 2)$且$C_i$上只有一条边$f_i$不在$S$中$(1\leqslant i\leqslant k)$.运用情形(1)($C_x\cap C_y\neq\varnothing$的情形)中完全类似的过程与方法可以证明:对任意$S,S_1\in V_1$,都有$H$中的两条内部不相交的路连接$S$与$S_1$(由于文章篇幅所限,略去其证明过程).

第II步

继续归纳法，假设 $|S-S'|<r$ 时，均有 S,S' 在 H 中的同一圈上. 现令 $S,S'\in V_1$（点集 $V_1\subseteq V(A(G))$ 且 $V_1=\{S:S$ 是 G 的单圈支撑子图且边 $e\in S\}$），且 $|S-S'|=r$. 很显然，需要证明对任意的 $S''\in V_1$，$S''\neq S$ 或 S'，都有一条 $H-S''(H=A(G)[V_1])$ 中的路连 S,S'. 现在假设 $|S-S'|\geqslant 2$，且 $\{e'_1,e'_2\}\subseteq(S'-S)$，令 C_i 为 $S+e'_i$ 中新产生的不同于 S' 中的圈的基本圈（$1\leqslant i\leqslant 2$），那么必存在边 $e_i\in C_i\cap(S-S')$. 令 $S_i=S+e'_i-e_i$，可知 $S_i\in V_1$. 假设 $S''\neq S_1$（如果 $S''=S_1$，则假设 $S''\neq S_2$）. 由于 $|S-S_1|=1$，由前面所证可知，在 H 中有圈包含 S,S_1. 又因为 $|S'-S_1|<r$，由归纳假设知，在 H 中也有一圈包含 S',S_1. 因此容易证，对任何点 $S''\in V_1-\{S,S',S_1\}$ 都有 H 中的一条路包含 S,S'.

由归纳法原理，知引理3对所有的 $|S-S'|=n(n\leqslant|E(S\cup S')|$，$S,S'$ 是图 G 的单圈支撑子图）均成立.

引理4　令 S,S' 为2-连通图 G 中的单圈支撑子图，边 $e\in G$，且 $e\notin S\cup S'$. 那么在 $A(G)$ 中有一圈 C 包含 S,S' 且 $V(C)-\{S\cup S'\}\subseteq V_1$，其中点集 V_1 与引理3定义相同.

证明　在 G 中，$S+e$ 和 $S'+e$ 中一定有新生成的圈 C',C''，且均包含边 e. 因为圈 C',C'' 的长度至少为3，故在 $S+e$ 中的圈 C' 中有不同的两边 e_1,e_2；$S'+e$ 中的圈 C'' 中有不相同的两边 e'_1,e'_2. 那么图 G 的单圈支撑子图 $S_i=S+e-e_i$，$S'_i=S'+e-e'_i(1\leqslant i\leqslant 2)$，均在 V_1 中且边 e 与边 e_i,e'_i 邻接. 显然，$SS_1,SS_2,S'S'_1$ 和 $S'S'_2$ 均为 $A(G)$ 中的边，由于 $e\notin S\cup S'$，故 G 的圈空间维数至少为3. 由引理3，知道，$H=A(G)[V_1]$ 是2-连通的. 因此，在 H 中有两条内部不交的路连接 S_1,S_2 到 S'_1,S'_2，由此可得所求的圈.

定理A的证明　对圈的圈空间维数 ρ 进行归纳假设来证明.

当 $\rho=1$ 时，$\Theta(G)$ 就一个单点，故得证. 当 $\rho=2$ 时，$\Theta(G)$ 是至少三个点的完全图，故该定理得证. 现在假设该定理对任何圈空间维数小于 ρ 的图均成立，而且令 $|S-S'|=r\geqslant 1(\rho\geqslant 3)$. 如果 $\rho>r+1$，那么必存在一条边 $e\in G-\{S\cup S'\}$，图 $G-e$ 是连通的且有圈空间维数 $\rho-1\geqslant 1$. 由归纳假设，在 $\Theta(G-e)$ 中有 $2(\rho-2)$ 条不交路连接 S,S'，且这些子图中均不包含边 e；由于 $A(G)$ 是 $\Theta(G)$ 的一个子图及引理3，可知，在 $A(G)$ 中有圈 C 连接 S 与 S'，且 $V(C)$ 上的其他点（单圈子图）均包含边 e.（即 $\Theta(G)$ 中有 $2(\rho-1)$ 条内部不交路连接 S,S'）.

（1）由于 $\rho\geqslant 1$ 时只有 $\rho=r+1\geqslant 3$ 未证，因此，由 $r=2$ 开始证.

令 $S'=S+e'_1+e'_2-e_1-e_2$. 不失一般性，假设 $S_i=S+e'_i-e_i=S'+e_{3-i}-e'_{3-i}(1\leqslant i\leqslant 2)$ 均为 G 的单圈支撑子图，在 $\Theta(G)$ 中有路 $P_1=(S,S_1,S')$ 和路 $P_2(S,S_2,S')$. 现要再找两条不同的路连接 S,S'. 因为能够在 $S+e'_i$ 中找到某个2-边连通子图 G_i 同时含有边 $e_i(1\leqslant i\leqslant 2)$，则易见 $\{e_1,e_2\}\notin G1_1\cap G_2$. 假设 $e_2\notin G_1$. 由于 $|G_1|\geqslant 3$，存在一边 $e\in G_1$，且 $e\in S\cap S'$. 令 $S_3=S+e'_1-e$ 且令 G_3 为在 $S_3+e'_2$ 中新生成的2-边连通子图. 如果 $e\notin C_2$，则 $G_3=G_2$ 且 $e_2\in G_3$. 若 $e\in C_2$，那么 $G_3=C_1\triangle C_2$（其中 $\triangle$ 为对称差），且 $e_2\in G_3$，令 $S_4=S_3+e'_2-e_2$，也是 G 的单圈支撑子图. 现在就得到了第三条路 $P_3=(S,S_3,S_4,S')$. 如果 $e_1\in C_2$，令 $S_5=S+e'_2-e_1$，则可得到路 $P_4=(S,S_5,S')$. 而且，若 $e_1\notin C_2$，另外找一边 $e'\in C_2\cap(S\cap S')$. 由前面的方法可得，$S_6=S+e'_2-e'$，$S_7=S_6+e'_1-e_1=S'+e_2-e'$，由此得 $P'_4=(S,S_6,S_7,S')$. 所有的路均内部不交，故得证.

（2）假设 $\rho=r+1>3$.

类似地，对任何 $A\subseteq V(\theta(G))$，$|A|=2\rho-3$，且 $S,S'\notin A$，均有在 $S(G)-A$ 中的路连接

S,S'. 令 $S-S'=\{e'_1,e'_2,\cdots,e'_r\}$ 且 $S+e'_i$ 必含有某个圈 $C_i(1\leqslant i\leqslant r)$. 同样,也存在一条边 $e_i\in C_i$,使得 $e_i\in S-S'$,因此 $S_i=S+e'_i-e_i$ 是 G 的一个单圈支撑子图. 类似地,令 $e'_{i+1}\in S'-S_i$,也必然有一条边 $e''_{i+1}\in S_i-S'$,因此 $S'_i=S_i+e'_{i+1}-e''_{i+1}$ 也为 G 的单圈支撑子图,$(1\leqslant i\leqslant r)$,且 $e'_{r+1}=e'_1$. 从而,有 $2r$ 条不同顶点的 $S_1,S_2,\cdots,S_r,S'_1,\cdots,S'_r$ 且 $|S-S_i|=1$, $|S-S'_i|=2$. 因为 $|S-S'|=r>2$,S' 与这 $2r$ 个单圈支撑子图均不同,故对任意 $A\subseteq V(\Theta(G))-\{S,S'\}$ 且 $|A|=2\rho-3$,或者 $S_i\notin A$ 或者 $S'_i\notin A$,必然存在这样的 $i(1\leqslant i\leqslant r)$. 因此,存在一些 $S_i,S_i\notin A$,由于 $|S'-S_i|=r-1=r'<\rho-1$,由前面得知,在 $\Theta(G)$ 中有 $2(\rho-1)$ 条不交路连接 S',S_i,由于 $|A|=2\rho-3$,所以其中的一条路在 $\Theta(G)-A$ 中且由于 $SS_i\in\Theta(G)$,得证.

若 A 含有所有的 $S_i(1\leqslant i\leqslant r)$,则必有 $S_i\notin A$. 由于 $|S-S'_i|=2<\rho-1$,同样在 $\Theta(G)$ 中有 $2(\rho-1)$ 条路连 S,S'_i,至少有一条在 $\Theta(G)-A$ 中. 又因为 $|S'_i-S'|=(r-2)=r''<\rho-1$,所以同样有在 $\Theta(G)-A$ 中的连接 S'_i 和 S'. 由此可得,在 $\Theta(G)-A$ 中始终存在一条连接 S,S' 的路. 由归纳法原理知,在 $\Theta(G)$ 中至少有 $2(\rho-1)$ 条内部不交路连接 S,S',这就完成对定理 A 的证明.

2 定理 B 的证明

断言 2 令 $f(S)$ 为 S 的悬挂点的个数,易见,若 S 和 S' 为 G 中的单圈支撑子图且 $SS'\in A(G)$,则 $|f(S)-f(S')|\leqslant 1$.

引理 5 令 S,S' 为 2-连通图 G 中的单圈支撑子图,且 $m=f(S)<f(S')=n$,令 P 为 $A(G)$ 中任意连接 S,S' 的路,那么必然存在 $S^\star\in V(P)$,使得 $f(S^\star)=k(m<k<n)$.

证明 设 P 为 $A(G)$ 中连接 S,S' 的路,若对任意的 $S_i\in V(P)$,均有 $f(S_i)\neq k$,那么假设存在两点 S_0,S'_0,有 $f(S_0)\leqslant k-1$,$f(S'_0)\geqslant k+1$,而且 $|f(S_0)-f(S'_0)|\geqslant 2$. 这样 S_0,S'_0 在 $A(G)$ 中不可能有路相连接,故矛盾. 所以必然有 $S^\star\in V(P)$,使得 $f(S^\star)=k(m<k<n)$.

定理 B 的证明 易见,若 $|S-S'|=1$,则 $|f(S)-f(S')|\leqslant 2$. 因此,若 P 为 $\Theta(G)$ 中连接 S,S' 的任一条路,对任意的 $k(m<k<n)$,必有 $S^\star\in V(P)$,使得 $f(S^\star)=k,m<k<n$;或者有 G 的两个单圈支撑子图 S_1,S_2,使得 $f(S_1)=k-1$,$f(S_2)=k+1$ 且 $|S_1-S_2|=1$. 由归纳法得,在 $A(G)$ 中有 $2\rho-1$ 条内部不交路连 S_1,S_2. 由引理 5 知,图 G 有 $2(\rho-1)$ 个含 k 个悬挂点的单圈支撑子图.

当 $\rho=2$ 时,由引理 2 可知道结论成立.

假设对任意 ρ',$(1\leqslant\rho'<\rho)$ 都存在这样的路. 由于 $\rho>2$,必有一边 $e\in-(S_1\cup S_2)$. 因此,图 $G'=G-e$ 有圈秩 $\rho-1$ 和 S_1,S_2 两个单圈支撑子图. 由归纳假设知,$A(G')$ 中有 $2((\rho-1)-1)$ 条内部不交路连接 S_1,S_2,且中间的点均不含边 e,由引理 3 知 S_1,S_2 在 $A(G)$ 某个包含边 e 的圈上,因为 $A(G')$ 是 $A(G)$ 子图,在 $A(G)$ 中共有 $2(\rho-1)$ 条连接 S_1,S_2 的路. 从而完成对定理 B 的证明.

[参 考 文 献]

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. New York: Macmilan Ltd Press, 1976.

[2] ESTIVILL C V, NOY M, URRUTIA J. On the chromatic number of tree graphs [J]. Discrete Mathematics, 2000, 223: 363-366.

(下转第 102 页)