第 28 卷第 4 期　　温州大学学报·自然科学版　　2007 年 8 月
Vol 28, No 4　　Journal of Wenzhou University · Natural Sciences　　Aug, 2007

关于一般幂平均不等式的构成函数的单调性

陈远兰

(温州大学数学与信息科学学院，浙江温州　325035)

摘　要：给出了幂平均不等式及其推广、二维加权幂平均不等式等的构成函数，并讨论了它们的单调性.

关键词：幂平均不等式；二维加权；构成函数；单调性

中图分类号：O178　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2007)04-0008-06

1 引　言

对不等式构成函数特性的研究是一个非常有吸引力的研究方向，胡克教授在这个领域作了深入研究，例如他在文[1]中给出了几何平均不等式、算术平均不等式、Hardmard 不等式和 Minkowski 不等式的构成函数，并讨论了它们的单调性．陈奕俊分别在文[2]和文[3]中对若干推广的 *Hölder* 不等式和 Weierstrass 不等式及其推广的 *Pêcaric* 不等式的构成函数的单调性进行了研究．王良成在文[4]中讨论了 Chebyshev 型不等式生成的差的单调性，在文[5]中对 Jensen 积分不等式给出了相应的具有单调性的构成函数，并在文[6]中对凸函数的 Rado 型不等式进行了推广．常兴邦、许素梅还在文[7]给出了平均值商函数的单调性．寻找到一个不等式的单调性构成函数有时可把对原问题的研究引向深入，如怎样用简易方法解决存在 30 年之久的 Opial−华罗庚精密性问题①．对幂平均不等式的构成函数至今没有人研究过，本文讨论了各种推广形式的幂平均不等式构成函数的单调性问题．

为了引用方便，先给出几个引理．

收稿日期：2006-04-17

作者简介：陈远兰(1982-)，女，浙江乐清人，硕士研究生，研究方向：应用数学

①　Opial−华罗庚型不等式：设 $u\in \mathrm{AC}[0,b]$，$u(0)=0$，则有 $\int_0^b |u|^p |u'|^q dx \le \frac{qb^p}{p+q}\int_0^b |u'|^{p+q} dx, p\ge 0, q\ge 1$，此不等式当 q=1 时为精确的, $u(x)=cx$ 可使等号成立；当 q>1 时为严格不等式.Das 将不等式中 $\frac{q}{p+q}$ 改小为 $\frac{q^{\frac{q}{p+q}}}{p+q}$，仍然不是精确的．1996 年胡克教授作出了该不等式的构成函数[1]：$F(t)=(\int_0^t |u'|^{p+q} dx)^{\frac{4}{p+q}-2}\cdot\{t^2\cdot(\int_0^t |u'|^{p+q} dx)^2-\left[(\int_0^t e(x))\cdot(\int_0^t |u'|^{p+q} dx)-t\cdot(\int_0^t e(x)|u'|^{p+q} dx)\right]^2\}^{1-\frac{1}{p+q}}-(\int_0^t |u'| dx)^2$，利用其单调性对 $q\ne 1$ 的情形，给出了 Opial-华罗庚型积分不等式精确表示式,并把条件 $p\ge 0$, $q\ge 1$ 改弱为 p, $q>0$，$p+q>1$.

引理 1[8] 设 $a_i \geq 0,\ b_i \geq 0,\ i=1,2,\cdots,n\ ,\alpha,\beta$ 为正有理数，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{\alpha+\beta}}{a_i^{\alpha}}\right)^{\beta} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\beta}\right)^{\alpha+\beta}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta}\right)^{-\alpha},$$

等号成立当且仅当 $\dfrac{a_i}{b_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-1}$.

注：若在引理 1 中取 $\alpha=x,\beta=1,a_i=b_i,b_i=a_i$，则有 $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^{x+1}}{b_i^{x}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{x+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-x}$.

引理 2[9] 设 a_i和b_i 为正数列，$r,s\in N,$且$r\geq s$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{r}}{b_i^{s}} \geq n^{1+s-r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-s},$$

引理 3（二维加权幂平均不等式）[10]

设 $a_{\mathrm{i}},\alpha_{\mathrm{i}},\beta_{\mathrm{j}}>0;\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n;\ m,n\in\ N;\ r,s\in\ R;$ 且 $r\neq\ 0;\ \dfrac{s}{r}\in\ [0,1];\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1.$

则 $$\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j a_{ij}^{r}\right)^{\frac{s}{r}}\right]^{\frac{1}{s}} \geq \left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{ij}^{s}\right)^{\frac{r}{s}}\right]^{\frac{1}{r}}$$

其中，当 s=0 时，令 $\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i A_i^{s}\right)^{\frac{1}{s}}=\prod_{i=1}^{m}A_i^{\alpha_i}$.

2 主要结果

对于幂平均不等式的推广（引理 1），两边开 β 次再作差，则有

定理 1 设 $a_i \geq 0,\ b_i \geq 0,\ i=1,2,\cdots,n\ ,\alpha,\beta$ 为正有理数，

令 $$F(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{\alpha+\beta}}{a_i^{\alpha}}-\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}},$$

则有 $F(1)=0$，$F(n+1)\geq F(n)$.

注 1：这里的 $F(n)$ 即为引理 1 中不等式的构成函数.

证明：当 n=1 时，$F(1)$=0 显然成立.

当 $n\geq 2$时，

$$F(n+1)-F(n)=\left[\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_i^{\alpha+\beta}}{a_i^{\alpha}}-\left(\sum_{i=1}^{n+1}b_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i^{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right]-\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{\alpha+\beta}}{a_i^{\alpha}}-\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right]$$

$$=\left(b_{n+1}^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}+1}\cdot\left(a_{n+1}^{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}-\left(\sum_{i=1}^{n+1}b_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i^{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$=b_{n+1}^{\alpha+\beta}\cdot a_{n+1}^{-\alpha}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}-\left(\sum_{i=1}^{n+1}b_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i^{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

令 $$b_{n+1}^{\beta}=x_1,\ a_{n+1}^{\beta}=y_1,\ \sum_{i=1}^{n}b_i^{\beta}=x_2,\ \sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}=y_2,\ \alpha/\beta=t.$$

则 $$F(n+1)-F(n)=x_1^{\ t+1}y_1^{\ -t}+x_2^{\ t+1}y_2^{\ -t}-\left(x_1+x_2\right)^{t+1}\cdot\left(y_1+y_2\right)^{-t}$$

根据引理 1 的注，即取 $n=2, x=t, a_1=x_1, a_2=x_2, b_1=y_1, b_2=y_2$，便得 $F(n+1)-F(n)\ge 0$.

综上所述，$F(n+1)\ge F(n)$.

注 2：通过定理 1 中构成函数的单调性，我们可以很容易获得加权的幂平均不等式，即取

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{s}{t}-1,\ a_i^{\beta}=\lambda_i,\ b_i^{\beta}=\lambda_i a_i^t,\ \text{有}\quad -\frac{\alpha}{\beta}=1-\frac{s}{t},\quad \frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{s}{t},$$

$$\frac{b_i^{\alpha+\beta}}{a_i^{\alpha}}=\frac{\left(b_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}+1}}{\left(a_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}}=\frac{\left(\lambda_i a_i^t\right)^{\frac{s}{t}}}{\left(\lambda_i\right)^{\frac{s}{t}-1}}=\lambda_i a^t\text{，则}\quad F(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a^t-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^t\right)^{\frac{s}{t}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{\frac{s}{t}-1}$$

根据定理 1 结论，$F(n)\ge F(n-1)\ge\cdots\ge 0$，从而 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a^t\ge\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^t\right)^{\frac{s}{t}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{\frac{s}{t}-1}$，也即

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\le\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\beta}}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\right)^{\frac{1}{\beta}}\text{成立.}$$

上面我们讨论了幂平均不等式众多推广中的其中一种推广（引理 1），接下来我将考虑引理 2 中不等式的构成函数的单调性．对引理 2 中的不等式两边作差，则有

定理 2　设 $a_i\ge 0,\ \lambda_i\ge 0,\ i=1,2,\cdots,n,\ \alpha<\beta,$

令 $$F(n)=\sum_{i=1}^{n}a_i^r b_i^{-s}-n^{1+s-r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-s},\text{则}\quad F(1)=0,\ F(n+1)\ge F(n).$$

注：这里的 $F(n)$即为引理 2 中不等式的构成函数。

证明：当 $n=1$ 时，$F(1)=0$ 显然成立.

当 $n\ge 2$ 时，

$$F(n+1)-F(n)=\left[\sum_{i=1}^{n+1}a_i^r b_i^{-s}-(n+1)^{1+s-r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^r\cdot\left(\sum_{i=1}^{n+1}b_i\right)^{-s}\right]$$
$$-\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^r b_i^{-s}-n^{1+s-r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-s}\right]$$

$$=\frac{a_{n+1}^r}{b_{n+1}^s}+n^{1+s-r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{-s}-(n+1)^{1+s-r}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^r\cdot\left(\sum_{i=1}^{n+1}b_i\right)^{-s}$$

令 $a_{n+1}=x_1,\ b_{n+1}=y_1,\ \sum_{i=1}^{n}a_i=x_2,\ \sum_{i=1}^{n}b_i=y_2.$

则 $F(n+1)-F(n)=x_1^r y_1^{-s}+n^{1+s-r}\cdot x_2{}^r y_2{}^{-s}-(n+1)^{1+s-r}\cdot\left(x_1+x_2\right)^r\cdot\left(y_1+y_2\right)^{-s}$

要证 $F(n+1)\ge F(n)$，则必须证

$$x_1^r y_1^{-s}+n^{1+s-r}x_2^r y_2^{-s}\ge(n+1)^{1+s-r}\cdot\left(x_1+x_2\right)^r\cdot\left(y_1+y_2\right)^{-s}$$

而 $x_1^r y_1^{-s}+n^{1+s-r}\cdot x_2{}^r y_2{}^{-s}=x_1^r y_1^{-s}+n\left(\tfrac{1}{n}x_2\right)^r\cdot\left(\tfrac{1}{n}y_2\right)^{-s}$

$$=x_1^r y_1^{-s}+\left(\tfrac{1}{n}x_2\right)^r\cdot\left(\tfrac{1}{n}y_2\right)^{-s}+\left(\tfrac{1}{n}x_2\right)^r\cdot\left(\tfrac{1}{n}y_2\right)^{-s}+\cdots+\left(\tfrac{1}{n}x_2\right)^r\cdot\left(\tfrac{1}{n}y_2\right)^{-s}$$

根据引理 2，

$$x_1^r\cdot y_1^{-s}+\left(\tfrac{1}{n}x_2\right)^r\cdot\left(\tfrac{1}{n}y_2\right)^{-s}+\left(\tfrac{1}{n}x_2\right)^r\cdot\left(\tfrac{1}{n}y_2\right)^{-s}+\cdots+\left(\tfrac{1}{n}x_2\right)^r\cdot\left(\tfrac{1}{n}y_2\right)^{-s}$$
$$\ge(n+1)^{1+s-r}\cdot\left(x_1+\tfrac{1}{n}x_2+\tfrac{1}{n}x_2+\cdots+\tfrac{1}{n}x_2\right)^r\cdot\left(y_1+\tfrac{1}{n}y_2+\tfrac{1}{n}y_2+\cdots+\tfrac{1}{n}y_2\right)^{-s}$$
$$=(n+1)^{1+s-r}\cdot\left(x_1+x_2\right)^r\cdot\left(y_1+y_2\right)^{-s}$$

从而 $F(n+1)-F(n)\ge 0$，即 $F(n+1)\ge F(n)$，$n=1,2,\cdots$ 证毕.

前面我们已经讨论了一维情形的各种推广形式的幂平均不等式的构成函数的单调性，下面将考虑二维的情形．对二维加权幂平均不等式（引理 3）的两边作 s 次幂再作差，则有

定理 3　设 $a_{\mathrm{i}},\alpha_{\mathrm{i}},\beta_{\mathrm{j}}>0;\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n;\ m,n\in N;\ r,s\in R;$

且 $r\ne 0,\ \frac{s}{r}\in[0,1],\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1.$

令 $F(m)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j a_{ij}^r\right)^{s/r}-\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{ij}^s\right)^{r/s}\right]^{s/r}$，则有 $F(1)=0$，$F(m+1)\ge F(m)$.

注 1：这里的 $F(m)$即为二维加权幂平均不等式的构成函数.

注 2：上面的 $F(m)$是关于 m 单调递增的，同时我们发现该不等式还具有类似的关于 n 单调的构成函数，论证过程类似这里不再详述.

证明：当 $m=1$ 时，$F(1)=0$ 显然成立.

当 $m\ge 2$ 时，

$$F(m+1)-F(m)=\left[\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j a_{ij}^r\right)^{s/r}-\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i a_{ij}^s\right)^{r/s}\right]^{s/r}\right]-\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j a_{ij}^r\right)^{s/r}-\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{ij}^s\right)^{r/s}\right]^{s/r}\right]$$

$$=\alpha_{m+1}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j a_{m+1\,j}^r\right)^{s/r}+\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{ij}^s\right)^{r/s}\right]^{s/r}-\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i a_{ij}^s\right)^{r/s}\right]^{s/r}$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha^{r/s}{}_{m+1}\beta_j a_{m+1\,j}^r\right]^{s/r}+\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{ij}^s\right)^{r/s}\right]^{s/r}-\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i a_{ij}^s\right)^{r/s}\right]^{s/r}$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\alpha_{m+1}a_{m+1\,j}^s\right)^{r/s}\right]^{s/r}+\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{ij}^s\right)^{r/s}\right]^{s/r}-\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{ij}^s+\alpha_{m+1}a_{m+1\,j}^s\right)^{r/s}\right]^{s/r}$$

令 $\alpha_{m+1}a_{m+1\,j}^s=A_j$，$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{ij}^s=B_j$，

则 $F(m+1)-F(m)=\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j A_j^{r/s}\right]^{s/r}+\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j B_j^{r/s}\right]^{s/r}-\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(A_j+B_j\right)^{r/s}\right]^{s/r}$

由加权 Minkowski 不等式即得

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j A_j^{r/s}\right]^{s/r}+\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j B_j^{r/s}\right]^{s/r}=\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j^{s/r}A_j\right)^{r/s}\right]^{s/r}+\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j^{s/r}B_j\right)^{r/s}\right]^{s/r}$$

$$\ge\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j^{s/r}A_j+\beta_j^{s/r}B_j\right)^{r/s}\right]^{s/r}=\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(A_j+B_j\right)^{r/s}\right]^{s/r}$$

从而 $F(m+1)-F(m)\ge 0$，即 $F(m+1)\ge F(m)$. 定理证毕.

注 3：由于上面的证明并没有使用引理 3 的结论，因此，实际上述定理 3 亦给出了引理 3 中不等式的一个新的简洁的证明.

参考文献

[1] 胡克. 解析不等式的若干应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2003. 126-128.

[2] 陈奕俊. 关于 *Hölder* 不等式的几点注记[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2002, (4): 54-60.

[3] 陈奕俊. 关于若干不等式的几点注记[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2005, (1): 41-45.

[4] 王良成. 由 Chebyshev 型不等式生成的差的单调性[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2002, 39(3): 398-403.

[5] 王良成. 由积分 Jensen 不等式生成的差的单调性[J]. 数学的实践和认识, 2003, 33(6): 87-90.

[6] 王良成. 凸函数的 Rado 型不等式的推广[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2003, 40(3): 403-406.

[7] 常兴邦. 许素梅. 关于平均值商的差的单调性和不等式[J]. 安阳师范学院学报, 2005, (5): 24-25.

[8] 李鹏程. 由幂平均不等式引发的猜想[J]. 广东广播电视大学学报, 2003, 12(48): 82-84.

[9] 邓勇平. Radon 不等式的推广、类似及应用[J]. 龙岩师专学报, 2003, 21(6): 10-11.

[10] 熊静. Carlson 不等式的再推广[J]. 毕节师范高等专科学校学报, 1999, (2): 15-16.

On the Monotony of Functions Generated by the Power-mean Inequality

CHEN Yuanlan

(College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: This paper discusses the generating functions of monotony for the Power-Mean Inequality, Binary dimension power mean inequality and Binary integral power mean inequality.

Key words: Power-mean inequality; Binary integral power mean inequality; Generating function of an inequality; Monotony

（编辑：王一芳）