捕获与区域保护对捕食与被捕食系统的影响

黄映映，张建勋

（宁波大学理学院，浙江宁波 315211）

摘 要：建立并分析了含人工捕获与区域保护的捕食与被捕食模型，得到了平衡解之间的关系，给出了正平衡解存在并全局渐近稳定的条件.

关键词：捕食者；被捕食者；区域保护；人工捕获

中图分类号：O175 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-0375(2007)03-0007-07

捕食与捕获是自然界普遍存在的现象，随着生物资源的紧缺，保持生物资源平衡发展的研究备受关注，文献[1,2]讨论了平衡点的全局动力形态；文献[3-5]中创建了生物保护区，保证生物在保护区域内不被捕食与捕获；文献[6]讨论了人类捕获的捕食模型；本文在以上文献的基础上提出了在捕食与被捕食模型中加入生物的保护区域和人工捕获的生物数学模型，规定被捕食者可以在区域间相互扩散，而捕食者和捕获者不能进入保护区域，并设生物的被保护数量为确定值.

1 模型建立

文中讨论的含人工捕获与区域保护的捕食与被捕食模型系统如下:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=F(x,y;R)=\begin{cases}xf(x),0<x\le R\\ xf(x)-yp^R(x)-qE(x-R),x>R\end{cases}\\ \frac{dy}{dt}&=G(x,y;R)=\begin{cases}yg(y),0<x\le R\\ y(g(y)+cp^R(x)),x>R\end{cases}\end{aligned}\qquad (\mathrm{I})$$

系统满足以下条件：

（i）$x(t)$，$y(t)$ 分别代表 t 时刻被捕食者和捕食者的种群数量，$f(x)$，$g(y)$ 分别是被捕食者和捕食者数量的增长函数，分别满足 $f(0)=\alpha>0;\ \forall x>0$，有 $f'(x)<0;\ \exists K>0$，使得 $f(K)=0$ 和 $g(0)=-\gamma<0;\ \forall y\ge 0,$ 有$g_y(y)\le 0$；α 称为内禀增长率，K 称为最大环境容纳量.

（ii）R 是被捕食者的受保护数量，满足 $R<K$；$qE(x-R)$ 和 $p^R(x)$ 分别为人工收获和捕

收稿日期：2006-06-26

基金项目：宁波市自然科学基金(2006A610032)

作者简介：黄映映(1983-)，女，浙江永康人，硕士研究生，研究方向：生物数学

食函数，满足 $qE < \alpha$ ，$q > 0$ 为收获系数，$p^R(x)$ 关于 x 连续可微，$p^R(R) = 0$ ，当 $x \ge R$ 时，$p_x^R(x) > 0$；$cp^R(x)$ 为被捕食者与捕食者能量之间的转换函数，$0 < c < 1$.

从以上假设可知系统足够光滑，在 (x, y) 第一象限上满足解的存在唯一性.

2 模型系统的平衡点存在性分析

记 $\Phi(x) = xf(x) - qE(x - R)$ ，由 $\Phi(R) > 0$ ，$\Phi(K) < 0$ 和 $\Phi(x)$ 的连续性知：存在 x_1 ，满足 $\Phi(x_1) = 0$ ，则 $(x_1, 0)$ 为系统（I）的轴平衡点且唯一（证明见附录）；另外 $(0,0)$ 是系统（I）的平凡解.

将 (x, y) 第一象限划分成三部分：$R(I) = \{(x, y) \mid 0 \le x \le R\}$ ，$R(II) = \{(x, y) \mid R < x < x_1\}$ ，$R(III) = \{(x, y) \mid x_1 \le x \le K\}$. 若系统存在正平衡解 (x^*, y^*) ，则 $x^* > R$ ，且满足以下方程组：

$$xf(x) - yp^R(x) - qE(x - R) = 0 \tag{1}$$

$$g(y) + cp^R(x) = 0 \tag{2}$$

由(1)，(2)得 $p^R(x^*) = -\dfrac{cg(y^*)}{c} = \dfrac{x^* f(x^*) - q_1 E(x^* - R)}{y^*} = \dfrac{\Phi(x^*)}{y^*} > 0$. 由 $\Phi(x_1) = 0$ 和 $f(x)$ 的单调性得 $\Phi'(x_1) < 0$ ，则 $\forall x > x_1$ ，有 $\Phi'(x) < 0, \Phi(x) < 0$. 因此由 $\Phi(x^*) > 0$ ，得 $(x^*, y^*) \in R(II)$.

定理 1　系统至少存在一个正平衡解当且仅当 $g(0) + cp^R(x_1) > 0$.

证明：充分性：由条件知 $g(0) + cp^R(R) = g(0) = -\gamma < 0$ ，$g(0) + cp^R(x_1) > 0$ ，由 $p^R(x)$ 的单调性得 $\exists! x_2 \in (R, x_1)$ ，$\ni g(0) + cp^R(x_2) = 0$. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = x_2} = -\dfrac{cp_x^R(x_2)}{g_y(0)} > 0$ ，即 $y > 0$. 当 $x > x_2, y \ge 0$ 时，曲线(2)的斜率 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{cp_x^R(x)}{g_y(y)} > 0$ ，即 y 关于 x 严格单调递增. 故 $x \ge x_2$ 时，曲线(2)在 x 轴上方. 另外，由(1)式得：

$$y = \frac{xf(x) - qE(x - R)}{p^R(x)};$$

$$y' = \frac{(xf_x(x) + f(x) - qE)p^R(x) - (xf(x) - qE(x-R))p_x^R(x)}{\left(p^R(x)\right)^2}.$$

所以 $y(R) \to +\infty$， $y(x_1) = 0$．由 $(x_1, 0)$ 是唯一轴平衡点得，当 $R \le x < x_1$ 时，曲线(1)位于 x 轴上方.

综上所述，曲线(1)和曲线(2)至少有一个交点，即系统的正平衡解 (x^*, y^*) 存在.

必要性：由 $g(y), p^R(x)$ 的单调性得 $g(0) + cp^R(x_1) > g(y^*) + cp^R(x^*) = 0$．证毕.

3 平衡点的稳定性分析

由轴平衡解 $(x_1, 0)$ 的 Jacobian 矩阵得 $\lambda_1 = x_1 f_x(x_1) + f(x_1) - qE < 0$；$\lambda_2 = g(0) + cp^R(x_1)$.

当 $\lambda_2 > 0$ 时，$(x_1, 0)$ 为鞍点，此时至少存在一个正平衡点；当 $\lambda_2 < 0$ 时，$(x_1, 0)$ 为渐近稳定的平衡点.

由平凡解(0，0)的 Jacobian 矩阵得 $\lambda_1 = \alpha,\ \lambda_2 = -\gamma$．(0，0)为鞍点.

定理 2　系统不存在正平衡解且 $\lambda_2 = g(0) + cp^R(x_1) \ne 0$，则 $(x_1, 0)$ 全局渐近稳定（详细证明附后）.

证明：由条件得 $\lambda_2 < 0$，再由 $\lambda_1 < 0$ 得 $(x_1, 0)$ 局部渐近稳定．设 (x_0, y_0) 为初值.

$\forall (x_0, y_0) \in R(I)$，由 $\dfrac{dx}{dt}$ 和 $\dfrac{dy}{dt}$ 的单调性得：存在 $T + \varepsilon > 0$，使得

$$(x(T+\varepsilon), y(T+\varepsilon)) \in R(II).$$

$\forall (x_0, y_0) \in R(III)$，由 $\Phi(x)$ 的单调性得:存在 $T + \varepsilon > 0$，使得

$$(x(T+\varepsilon), y(T+\varepsilon)) \in R(II).$$

$\forall (x, y) \in R(II)$，由 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=R} > 0$，当 $y > 0$ 时，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x_1} < 0$ 和 $\dfrac{dy}{dt} < 0$ 得 $R(II)$ 为 $(x_1, 0)$ 吸引域.

综上所述，当系统不存在正平衡解且 $\lambda_2 \ne 0$ 时，轴平衡解 $(x_1, 0)$ 全局渐近稳定.

由正平衡解的 Jacobian 矩阵得：

$$\lambda_1 + \lambda_2 = x^* f_x(x^*) + f(x^*) - y^* p_x^R(x^*) - qE + y^* g_y(y^*) \tag{3}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = p^R(x^*)cy^* p_x^R(x^*) + (x^* f_x(x^*) + f(x^*) - y^* p_x^R(x^*) - qE)y^* g_y(y^*) \tag{4}$$

引理　$\exists L \in (0, x_1), \forall R \in (L, x_1), \forall x \in (R, x_1)$，有以下不等式成立（证明见附录）:

$$p^R(x)(xf_x(x) + f(x) - qE) - (xf(x) - qE(x-R))\ p_x^R(x) \le 0 \tag{5}$$

定理 3　若系统满足(5)且存在正平衡解，则正平衡解唯一且渐近稳定，其中 $R(II)$ 为吸引域.

证明：若系统满足(5)，则由曲线(1)，(2)关于 x 的单调性知，若存在正平衡解，则平衡解唯一.

由(3)，(4)，(5)得：

$$\lambda_1 + \lambda_2 \le \frac{(x^* f(x^*) - qE(x^* - R))p_x^R(x^*)}{p^R(x^*)} - y^* p_x^R(x^*) + y^* g_y(y^*) = y^* g_y(y^*) \le 0$$

$$\lambda_1\lambda_2 \ge p^R(x^*)cy^* p_x^R(x^*) + \frac{(x^* f(x^*) - qE(x^* - R) - y^* p^R(x^*)))y^* g_y(y^*) p_x^R(x^*)}{p^R(x^*)}$$

$$= p^R(x^*)cy^* p_x^R(x^*) \ge 0$$

所以 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$，正平衡解 (x^*, y^*) 渐近稳定.

下证在条件(5)下，系统在 $R(II)$ 上无极限环和 $R(II)$ 是吸引域：

取　$H(x,y) = \dfrac{1}{p^R(x)y}$

$$\frac{\partial F(x,y)H(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial G(x,y)H(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(\dfrac{xf(x) - qE(x-R)}{yp^R(x)} - 1)}{\partial x} + \frac{\partial(\dfrac{g(y) + cp^R(x)}{p^R(x)})}{\partial y} \le 0$$

由 Bendixson Dulac 判别法得在区域 $R(II)$ 上无极限环：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=R} = \left.\frac{y(g(y) + cp^R(x))}{xf(x) - yp^R(x) - qE(x-R)}\right|_{x=R} < 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = -\frac{g(y) + cp^R(x_1)}{p^R(x_1)} > -\frac{g(0) + cp^R(x_1)}{p^R(x_1)} = 0$$

所以 $R(II)$ 是吸引域.

定理 4　若系统满足(5)且 (x^*, y^*) 存在，则 (x^*, y^*) 唯一且全局渐近稳定（证明见附录）.

4 结 语

在本文讨论的捕食与被捕食系统中，被捕食种群由于受到数量保护而不会趋于灭绝，而捕食种群受人工捕获和不能进入保护区的影响，由定理 2 知有灭绝的危险．文中重点讨论种群永久共存的条件．通过证明可知，当系统满足定理 1 的条件时，捕食种群不会趋于灭绝；当系统同时满足(5)式时，两种群数量能保持相对稳定．本文的研究结果有助于保护物种多样化，促进多种群共同生存．

附录：

1 证明轴平衡解是唯一的

证明：设存在$(x_1,0)$，$(x_2,0)$均为系统的轴平衡解且满足$K > x_1 > x_2 > R$, 则有$\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = 0$，即$x_1(f(x_1) - qE) = x_2(f(x_2) - qE) = 0$．另一方面，由$f(x)$的单调递减和$\Phi(x_1) = 0, \Phi(x_2) = 0$得，$qE - f(x_1) > qE - f(x_2) > 0$，于是得$x_1(qE - f(x_1)) > x_2(qE - f(x_2))$，与假设矛盾．因此存在且唯一的$x_1 > R$，满足$\Phi(x_1) = 0$．即轴平衡点唯一．

2 定理 2　系统不存在正平衡解且$\lambda_2 = g(0) + cp^R(x_1) \neq 0$，则轴平衡解$(x_1,0)$全局渐近稳定．

证明：系统不存在正平衡解且$\lambda_2 = g(0) + cp^R(x_1) \neq 0$，则$\lambda_2 < 0$，再由$\lambda_1 < 0$得$(x_1,0)$局部渐近稳定．设$(x_0, y_0)$为初值．$\forall (x,y) \in R(I)$，有$\dfrac{dx}{dt} = xf(x) > 0$和$\dfrac{dy}{dt} = yg(y) < 0$．所以$\forall (x_0, y_0) \in R(I)$存在时间$T > 0$，$\ni x(T) = R$，$0 < y(T) < y_0$．由$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=R} > 0$得$\exists \varepsilon > 0$，$\ni (x(T+\varepsilon), y(T+\varepsilon)) \in R(II)$．$\forall (x,y) \in R(III)$，由$\Phi'(x) < 0$得$\Phi(x) \le \Phi(x_1) = 0$，$\dfrac{dx}{dt} = \Phi(x) - yp^R(x) < 0$．所以$\forall (x_0, y_0) \in R(III)$，$\exists$时间$T > 0$，$\ni x(T) = x_1, y(T) > 0$．由$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x_1} < 0$得：$\exists \varepsilon > 0$，$\ni (x(T+\varepsilon), y(T+\varepsilon)) \in R(II)$．由$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=R} > 0$和当$y > 0$时$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=x_1} < 0$得：$\forall (x_0, y_0) \in R(II)$，$\forall t > 0$有$R < x(t) \le x_1$；当$R < x \le x_1$时有$\dfrac{dy}{dt} = g(y) + p^R(x) \le g(0) + p^R(x_1) < 0$；所以$t \to \infty$时，$y \to 0$．由轴平衡点的存在唯一性和无正平衡解的条件得$R(II)$为$(x_1,0)$的吸引域，即$\forall (x_0, y_0) \to (x_1, 0)$．

3 引理　$\exists L \in (0, x_1), \forall R \in (L, x_1), \forall x \in (R, x_1)$，有以下不等式成立:

$$p^R(x)(xf_x(x)+f(x)-qE)-(xf(x)-qE(x-R))p_x^R(x)\le 0$$

证明：因为 $xf(x)-yp^R(x)-qE(x-R)=0$，所以 $y=xf(x)-qE(x-R)p^R(x)$，

$$y'(x)=\frac{(xf_x(x)+f(x)-qE)p^R(x)-(xf(x)-qE(x-R))p_x^R(x)}{\left(p^R(x)\right)^2}.$$

又因为 $y'(x_1)=x_1f'(x_1)+f(x_1)-qEp^R(x_1)<0$，所以，由 $y'(x)$ 的连续性得 $\exists L\in(0,x_1)$, $\forall R\in(L,x_1),\forall x\in(R,x_1)$，有 $y'(x)\le 0$，即不等式成立.

4 定理 4 若系统满足（5）且 (x^*,y^*) 存在，则 (x^*,y^*) 唯一且全局渐近稳定.

证明：设 (x_0,y_0) 为初值，当 $(x_0,y_0)\in R(I)$，则 $\exists T>0$，$\ni x(T)=R$，$0<y(T)<y(0)=y_0$. 由 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=R}>0$ 得 $\exists\varepsilon>0$，$\ni(x(T+\varepsilon),y(T+\varepsilon))\in R(II)$. 当 $(x_0,y_0)\in R(III)$，则 $\Phi(x_0)\le\Phi(x_1)=0$，$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=x_0}<0$，所以 $\exists T>0$，$\ni x(T)=x_1,y(T)>0$. 由 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=x_1}<0$ 得 $\exists\varepsilon>0$，$\ni(x(T+\varepsilon),y(T+\varepsilon))\in R(II)$. 由定理 3 得 (x^*,y^*) 全局渐近稳定.

5 模型特殊例子（补充说明本文中的模型是有应用价值的）

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=F(x,y;R)=\begin{cases}x(1-x),0<x\le R\\ x(1-x)-\dfrac{y(x-R)^2}{a+(x-R)^2}-qE(x-R),x>R\end{cases}\\
\frac{dy}{dt}&=G(x,y;R)=\begin{cases}-\gamma y,0<x\le R\\ y\left(-\gamma+\dfrac{\delta(x-R)^2}{a+\left(x-R\right)^2}\right),x>R\end{cases}
\end{aligned}\tag{II}$$

γ,δ,a 都大于零且 $\delta<1$，系统 (II) 满足系统 (I) 的所有条件假设. (0,0) 和 $(\frac{1-qE}{2}+\frac{\sqrt{(qE-1)^2+4qER}}{2},0)$ 为系统 (II) 的两个平衡点，记 $\frac{1-qE}{2}+\frac{\sqrt{(qE-1)^2+4qER}}{2}=x_1<1$，当系统 (II) 满足 $\gamma\delta<\frac{(x_1-R)^2}{a+(x_1-R)^2}$ 时，由定理 1 得系统(II)存在正平衡解，否则 $(x_1,0)$ 全局渐近稳定.

($x^* = R + \sqrt{\dfrac{\gamma a}{\delta-\gamma}}; y^* = \dfrac{\delta(-(x^*)^2 + (1-qE)x^* + qER)}{\gamma}$)为系统正解，$\exists L > \dfrac{(1-qE)}{2}$，使得 $\forall R \in (L, x_1), \forall x \in (R, x_1)$，有(5)式成立，则由定理 4 得正平衡解 (x^*, y^*) 唯一且全局渐近稳定.

综上所述，当系统不存在正平衡解且 $\lambda_2 \neq 0$ 时，轴平衡解 $(x_1, 0)$ 全局渐近稳定.

参考文献

[1] Jean C P, Pierre A. Impact of Spatial Heterogeneity on a Predator-Prey System Dynamics [J]. Comptes Rendus Biologies, 2004, 327: 1058-1063.

[2] Xu R, Chaplain M A J, Davidson F A. Global Stability of a Stage-Structured Predator-Prey Model with Prey Dispersal [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 171: 293-314.

[3] Srinivasu P D N, Gayatri I L. Influence of Prey Reserve Capacity on Predator-Prey Dynamics [J]. Ecological Modelling, 2005, 181: 191-202.

[4] Dubey B P C, Prawal S. A Model for Fishery Resource with Reserve Area [J]. Nonlinear Analysis: Real World Application, 2003, 4: 625-637.

[5] Sih. Prey Refuges and Predator-Prey Stability l [J]. Theoretical Population Biology, 1987, 31: 1-12.

[6] Kate G, Andrew P B, Simon T. Human-Predator-Prey Conflicts: Ecological Correlates, Prey Losses and Patterns of Management [J]. Biological Conservation, 2005, 122: 159-171.

The Influence of Harvesting and Prey-reserved Area on the Predator-prey System

HUANG Yingying, ZHANG Jianxun

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo, China 315211)

Abstract: A mathematical model for a predator and prey population under the harvesting is proposed and analyzed. The relation between equilibriums has been deduced. The existence of positive equilibrium as well as global stability has been proved based on the proposed model.

Key words: Prey; Predator; Reserved area; Human harvesting

(编辑：王一芳)