文章编号:1671-8585(2007)04-0252-05

用优化通量校正传输技术压制数值模拟的频散

王　珺[1],杨长春[2],冯英杰[2]

(1. 中国石油大学信息与控制工程学院,山东东营 257061;2. 中国科学院地质与地球物理研究所,北京 100029)

摘要:用常规有限差分法求解波动方程,进行弹性波正演模拟,当单位波长内采样点数较少(粗网格)时会遇到严重的频散现象。通量校正传输(FCT)算法可有效地压制在粗网格情况下产生的数值频散。FCT 校正假设所有的极值点都是由数值频散引起的,然后对所有网格点进行扩散通量校正处理,再对非局部极值点进行补偿的逆扩散通量校正。FCT 方法用于高阶差分既具有较高的计算精度,又因适应采样间隔较大的情况而节省了计算量,从而具有较高的计算速度。在传统的 FCT 技术基础上提出的优化 FCT 技术只在需要压制数值频散处对波场进行平滑处理,可节省约 40%的计算量。给出了应用优化 FCT 技术进行波动方程正演模拟的数值算例,当参数选取合适时不仅有效地压制了数值频散,完好地保存了真实波场,又因节省了计算量而提高了计算效率。

关键词: 通量校正传输(FCT);数值频散;计算精度;计算效率

中图分类号:P631.443　　　**文献标识码:**A

有限差分法是进行波动方程数值模拟的一种有效方法,它具有计算速度快,占用内存小等优点,已在波动方程数值模拟领域得到广泛的应用[1~6]。但用有限差分法求波动方程数值解时,会遇到不期望的波动现象,这种现象称为网格频散或数值频散[7,8],尤其是在有较大梯度的波场附近,或用于计算的网格太粗时,频散现象更加严重[9]。压制频散最简单的方法就是减小网格步长,但会导致计算量骤增。蔡其新等曾经研究了优化差分参数的一种公式,用来确定空间步长[7]。其他的还有高阶差分格式[8~10],通量校正传输(FCT)法等。Fornberg 对比高阶有限差分法和伪谱法后指出,当有限差分算子的阶数逼近无穷时,高阶有限差分法等价于伪谱法,逼近阶数越高,模拟的数值频散越小[11]。FCT 算法是 Boris 在研究流体运移问题时提出的[12],Fei Tong 等将其引入到弹性波正演模拟中用于消除数值频散[13],其基本原理是,假设所有的极值点都是由数值频散引起的,然后对所有网格点进行扩散校正处理,再对非局部极值点进行补偿的逆扩散校正。本文在传统的 FCT 方法基础上提出了优化的 FCT 法,通量校正只用在局部极值点上,节省了大约 40%的计算量。同时,FCT 方法可以适应大的时间和空间步长,从而抵消了 FCT 校正带来的计算量的增加。

1　通量校正传输理论

FCT 技术的应用包括有限差分和校正 2 个主要阶段。其中校正阶段用于消除波场传播中的数值频散,包含扩散和逆扩散 2 个步骤。实际上,扩散校正是一个线性的平滑过程。用扩散校正方法来提高数值解精度的方法出现得很早,早在 1960 年,Lax 和 Wendroff 就应用扩散校正方法来解决 Lax-Wendroff 有限差分数值解的网格频散。但是这种方法由于对波场平滑得过于严重而导致计算精度严重降低,而且因为数值频散并不是发生在所有的计算网格上,所以还有部分频散没有完全消除。为了克服这种校正方法的缺点,FCT 技术的指导思想是只在发生频散的位置运用校正技术。但是在实际应用中,并没有先验信息来指示频散出现的位置,所以 FCT 方法首先是对所有的位置进行扩散校正,然后对经扩散校正平滑过的波场中,那些被认为没必要平滑的部分进行逆扩散校正。由于进行逆扩散是有选择的,因此是一个非线性的过程。

1.1　FCT 技术在一维问题中的应用

一维波动方程定义为

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{\rho c^2}\dfrac{\partial P}{\partial t} \\ u = \dfrac{\partial P}{\partial x} \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2007-02-25;**改回日期:**2007-05-22。

第一作者简介:王珺(1973—),女,博士,2005 年毕业于中国科学院地质与地球物理研究所,现在中国石油大学信息与控制工程学院任教,主要从事地震信号处理、成像以及测井解释方法研究工作。

基金项目:中国石油天然气集团公司创新基金资助(07E1019);中国科学院知识创新工程重大项目资助(KZCX1-SW-18-04)。

FCT 技术在一维的一阶波动方程传播中的应用分 3 个主要步骤：①波传播，用有限差分方法解波动方程；②扩散校正，即计算第 n 步的扩散通量 f，然后利用该通量来平滑数值解；③逆扩散校正，即计算第 $n+1$ 步的逆扩散通量 $\widetilde{f}$，用于补偿不需要平滑的部分。上述 3 个步骤可以简单地表示为包含算子 T，D 和 A 的式(2)，其中 T 和 D 是线性算子，逆扩散校正算子 A 是非线性算子。

$$\begin{cases} q^{T} = q^{n} + Tu^{n+1/2} \\ q^{TD} = q^{T} + Dq^{n} \\ q^{n+1} = q^{TD} + A\{q^{T}, q^{TD}\} \end{cases} \tag{2}$$

因为扩散作用不仅平滑掉了高频的数值频散，同时也将一部分波场平滑掉了，因此需要进行逆扩散处理，以恢复正确的波场值。如果逆扩散过程是线性的，那么它不仅恢复了真正的波场值，而且恢复了被压制掉的数值频散。因此，需要对逆平滑过程进行修正，使其只恢复真实的振幅，而不恢复频散。所以要在频散拖尾处，置逆平滑算子为 0，在真正的波场处，逆平滑算子非零，这就是进行有选择的逆扩散处理。

图 1 是一维波场传播的波场快照，波向右以速度 c 传播，假设波场中低频成分对应着真正的波场值，只有那些接近 Nyquist 频率的高频成分是由数值频散引起的。FCT 逆平滑校正的目的是恢复真正的振幅，而不是恢复被压制的频散。

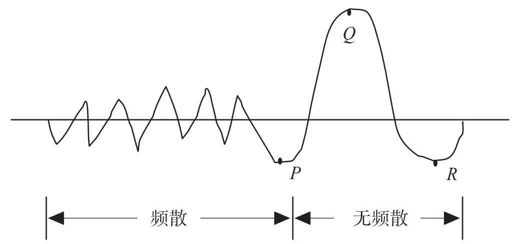

图 1　一维波场快照

在 FCT 方法中，假设局部极值是由数值频散引起的，那么逆平滑处理只运用于那些不存在局部极值的位置，也就是说，如果整网格点 j 和 $j+1$ 处都没有局部极值，那么在半网格点 $j+1/2$ 处计算得到的逆扩散通量就应该对 j 和 $j+1$ 这 2 个点进行逆扩散校正。图 2 给出了 4 种波场振幅变化趋势，只有图 2a 应在 $j+1/2$ 处运用逆扩散校正。

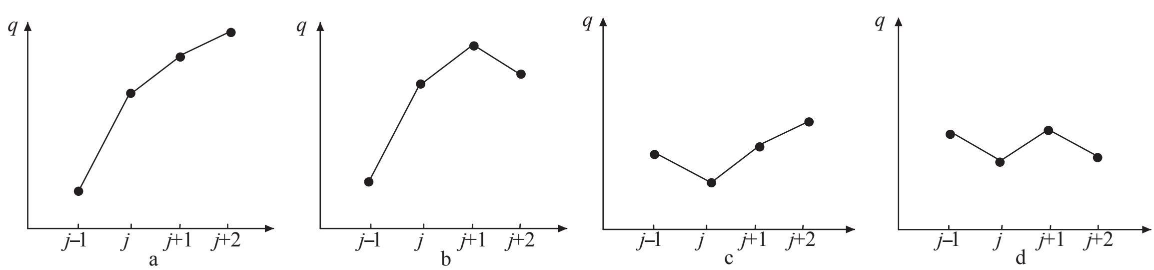

图 2　逆平滑校正是否应用于半网格点处的 4 种情形分析

注：只有图 2a 在 $j+1/2$ 处不受数值频散的影响，因此可以运用逆平滑校正

逆扩散校正的非线性步骤的本质是，寻找局部极值点，在这些地方置算子 A 为零。特别地，逆扩散运算定义为

$$q_j^{n+1} = q_j^{TD}(f_{j+1/2}^{c} - f_{j-1/2}^{c}) \tag{3}$$

其中

$$f_{j+1/2}^{c} = S\max\{0, [SX_{j-1/2}, \mathrm{abs}(\widetilde{f}_{j+1/2}), SX_{j+3/2}]\}$$

$$S = \mathrm{sign}\{\widetilde{f}_{j+1/2}\}$$

$$X_{j+1/2} = q_{j+1}^{TD} - q_j^{TD}$$

将所有的局部极值点都看作是由网格频散引起的，虽然很简单，但显然是不正确的。例如图 1 中的 P，Q 和 R 点均为真实波场的极值点，根据该算法的假设，在这 3 处没有进行逆扩散校正，因此，虽然在这些点上有扩散校正引起的振幅损失，却没有得到补偿。但是随着时间的推进，这些点处将会变为非极值点，因此它们的振幅损失将在以后的时间步长中得到补偿。经过一系列的递推过程，真正的波场振幅远远不如频散部分降低的多，因此 FCT 处理的结果还是正确的。

在 FCT 方法的第一步中，可能使用的是具有强平滑效果的差分格式（如伪 Lax-Wendroff 格式），因为该差分格式本身具有平滑作用，会导致振幅损失和分辨率的降低，所以在这种情况下，FCT 就不再需要进行扩散校正，只需要用逆扩散校正来补偿振幅和分辨率的损失即可。

下面对 FCT 中的扩散公式和伪 Lax-Wendroff 格式进行比较。假设 FCT 中使用的是 leapfrog 格式，则

FCT 中的平滑公式

$$q_j^{n+1} = q_j^{n} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x}(u_{j+1/2}^{n} - u_{j-1/2}^{n}) + \eta_1(q_{j+1}^{n} - 2q_j^{n} + q_{j-1}^{n}) \tag{4}$$

伪 Lax-Wendroff 传播公式

$$q_j^{n+1}=q_j^n+\frac{\Delta t}{\rho\Delta x}(u_{j+1/2}^n-u_{j-1/2}^n)+\frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2(q_{j+1}^n-2q_j^n+q_{j-1}^n)\tag{5}$$

可以看出，扩散系数在伪 Lax-Wendroff 格式中为 $\frac{1}{2}\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2$，在 FCT 中为 η_1，是一个可供选择的变量，它们之间非常相似。通过比较可以看出，如果使用伪 Lax-Wendroff 格式，则无需扩散校正，只需做逆扩散校正即可，也就是将式(4)中的 η_1 置为 0。

1.2　优化的 FCT 方法

上述内容来自 Boris 和 Book 的 FCT 技术思想：首先进行标准的有限差分，然后再进行扩散校正，最后查找非局部极值点进行逆扩散校正。

如前所述，FCT 方法可以选择性地进行逆扩散校正，即在平滑之前就寻找局部极值点，如果选择性地进行扩散校正，就可以省去逆扩散校正步骤，这就是优化的 FCT 的思路。

优化的 FCT 过程可以表示如下

$$q^T=q^n+Tu^{n+1/2}\tag{6}$$

$$q^{n+1}=q^T+Dq^n\tag{7}$$

式中：T 是有限差分的线性算子；D 是运用于局部极值处的非线性扩散算子。

优化的 FCT 方法的流程如下：

1）用标准有限差分法解波动方程

2）计算第 n 步的平滑通量

$$f_{j+1/2}=\eta(q_{j+1}^n-q_j^n)\tag{8}$$

式中：η 是平滑系数，类似于前面的 η_1，但是比 η_1 要略大一些，一般根据经验设定。

为了测试当其他参数相同时，η 的取值对结果的影响，给出一个密度为常数，速度为 2 km/s 的常速介质模型，震源采用点爆炸震源，子波为 30 Hz 的 Ricker 子波。图 3 是其他参数相同，分别采用不同的 η 值时的波场快照。可以看出，随着 η 值的增大，

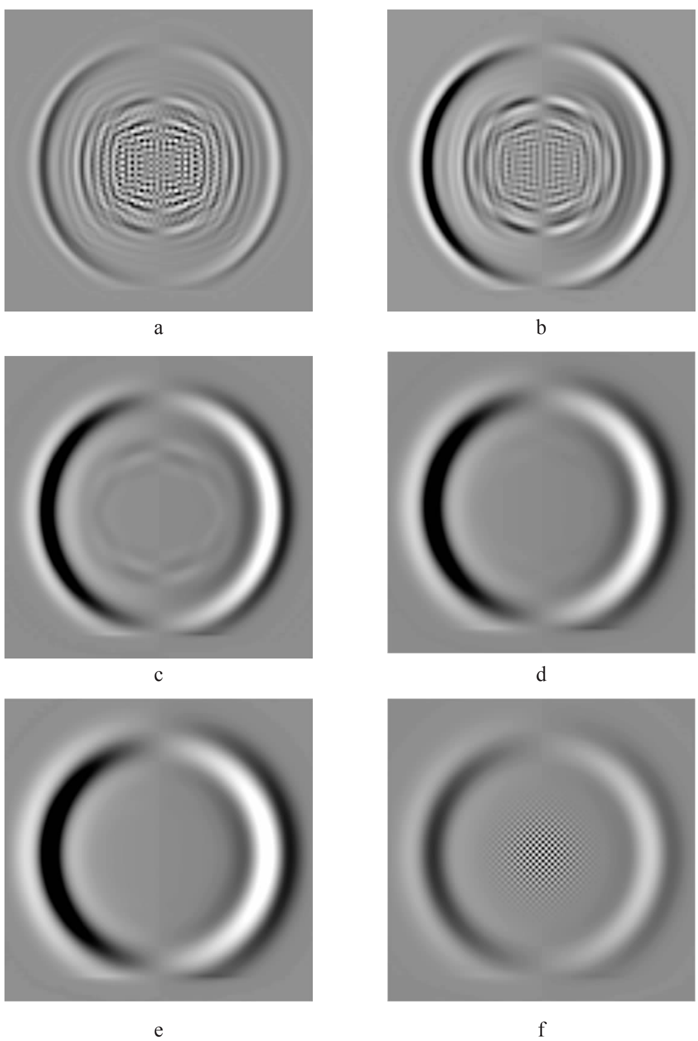

图 3　同一时刻不同 η 值时的波场快照对比

a $\eta=0$；b $\eta=0.01$；c $\eta=0.05$；d $\eta=0.1$；e $\eta=0.12$；f $\eta=0.13$

数值频散现象逐渐减轻，对波场的平滑程度也越严重，当 $\eta>0.12$ 时，真实波场已被平滑得模糊不清，分辨率明显下降。图 4 是分别采用不同 η 值时同一时刻的振幅值大小对比。随着 η 值的增大，得到的数值解越接近输入的 Ricker 子波，也就是说，用优化的 FCT 方法能更好地校正数值频散和相位畸变问题。但当 $\eta>0.12$ 时，由于平滑过度，得到的解又与原始输入的 Ricker 子波存在着很大的失真。因此，η 的取值过大或过小，都会造成不良后果。η 越大，平滑越强烈；只有当 η 取值合适时，用优化的 FCT 方法才能既有效地压制数值频散，修正相位畸变，又可较好地保持真实的波场。

3）计算校正的扩散通量

$$f^{c}_{j+1/2}=f_{j+1/2}\left\{1-\frac{1}{2}\left[\operatorname{sign}(f_{j+1/2},f_{j+1/2})+\operatorname{sign}(f_{j+1/2},f_{j+3/2})\right]\right\} \tag{9}$$

4）利用局部的扩散通量 f^{c} 修正波场 q，以得到正确的解，这一过程实际上就是在只存在频散的地方进行平滑。

$$q^{n+1}_{j}=q^{n+1}_{j}+(f^{c}_{j+1/2}-f^{c}_{j-1/2}) \tag{10}$$

由于优化的 FCT 方法仅在局部极值点做扩散运算，因此与原来的 FCT 方法相比，它节省了约 40％的计算量。

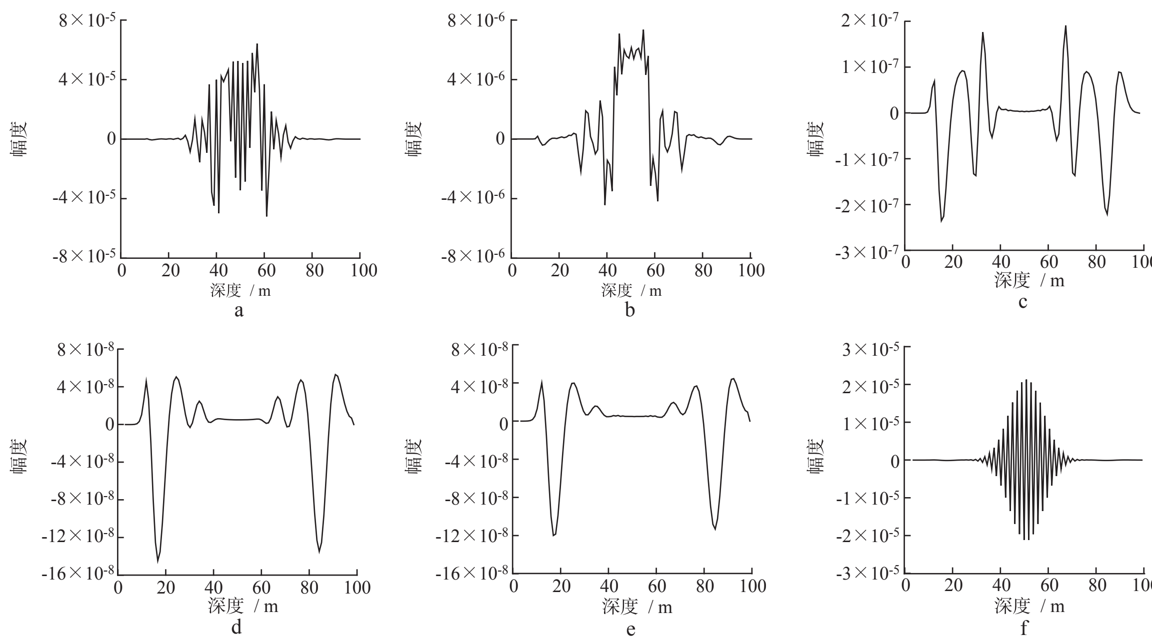

图 4 同一时刻不同 η 值时的振幅值大小对比

a $\eta=0$；b $\eta=0.01$；c $\eta=0.05$；d $\eta=0.1$；e $\eta=0.12$；f $\eta=0.13$

2 优化的 FCT 技术在消除频散问题中的应用

图 5 为应用优化 FCT 技术的数值模拟效果对比图。均匀各向同性模型，取 $v_{P}=2\ 000$ m/s，$v_{S}=v_{P}/\sqrt{3}$，$\rho=2.5$，空间网格间距为 $\Delta x=\Delta z=15$ m，时间步长 $\Delta t=2$ ms，震源采用点爆炸震源，位于均匀各向同性介质模型的中心，子波为主频 30 Hz 的对称 Ricker 子波。时域二阶和空间域四阶有限差分 $O(\Delta t^{2}+h^{4})$ 的参数 η 为 0.065，时域二阶和空间域二阶有限差分 $O(\Delta t^{2}+h^{2})$ 的参数 η 为 0.08。

分别模拟 $O(\Delta t^{2}+h^{2})$ 和 $O(\Delta t^{2}+h^{4})$ 的有限差分解的弹性波场 x 分量及经过优化的 FCT 校正后的波场 x 分量。同一时刻波场快照如图 5 所示。图 5a 是用常规有限差分法进行时间域二阶差分和空间域二阶差分得到的波场。图 5c 是用常规有限差分法进行时间域二阶差分和空间域四阶差分得到的波场。对比图 5a 和图 5c 可以看出，随着差分阶数的增大，频散程度变轻。图 5b 和图 5d 分别对应着图 5a 和图 5c 同一时刻经过 FCT 校正后的波场，显然优化的 FCT 方法有效地压制了数值频散。虽然在模型剖分网格数相同的情况下，差分的阶数越高，计算量越大，计算速度越慢[14]，而且 FCT 校正步骤的增加也会导致计算量增大约 1.8 倍，但是因为 FCT 校正在网格较粗（单位波长采样点较少）时，仍可得到与常规有限差分方法在细网格情况下相当的计算精度，并且优化的 FCT 技术，扩散校正只用在局部极值点上，从而节省了约 40％的计算

量，所以优化的 FCT 技术提高了有限差分正演模拟的计算效率。

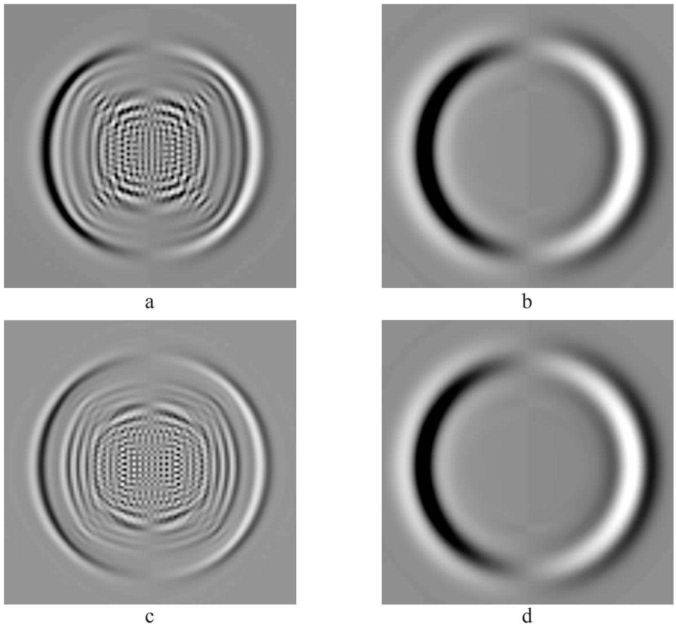

图 5　不同空间域差分精度弹性波波场快照

a 用常规有限差分法进行时间域二阶差分和空间域二阶差分得到的波场；b 对应着图 5a 同一时刻经过 FCT 校正后的波场；c 用常规有限差分法进行时间域二阶差分和空间域四阶差分得到的波场；d 对应着图 5c 同一时刻经过 FCT 校正后的波场

3　结束语

在总结分析前人工作的基础上，对有关技术作了整合和扩展，应用优化的 FCT 算法以消除波动方程有限差分正演模拟数值频散，给出了数值算例。通过对比可见，采用优化的 FCT 技术明显地压制了频散现象。虽然 FCT 方法的校正步骤增加了一定的计算量，但对于二阶差分和四阶差分，使用 FCT 校正后对每个主波长的采样点只需 5.5 和 3.7 个，并且优化的 FCT 技术，扩散校正只用在局部极值点上，从而节省了约 40％的计算量，所以优化的 FCT 技术提高了有限差分正演模拟的计算效率。因为优化的 FCT 技术可在大网格步长情况下得到较好的计算精度，将其用于高阶差分，很明显地压制了频散现象，数值解具有较高的计算精度。

参　考　文　献

1　Alford R，Kelly K，Boore D. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation［J］. Geophysics，1974，39(6)：834～842

2　裴正林，牟永光. 地震波传播数值模拟［J］. 地球物理学进展，2004，19(4)：933～941

3　张永刚. 地震波场数值模拟方法［J］. 石油物探，2003，42(2)：143～148

4　裴正林. 三维各向同性介质弹性波方程交错网格高阶有限差分模拟［J］. 石油物探，2005，44(4)：308～315

5　孔庆丰. 井间地震波场数值模拟技术研究与应用［J］. 勘探地球物理进展，2006，29(5)：333～336

6　宋常瑜，裴正林. 井间地震粘弹性波场特征的数值模拟研究［J］. 石油物探，2006，45(5)：508～513

7　蔡其新，何佩军. 有限差分数值模拟的最小频散算法及其应用［J］. 石油地球物理勘探，2003，38(3)：247～251

8　吴国忱，王华忠. 波场模拟中的数值频散分析与校正策略［J］. 地球物理学进展，2005，20(1)：58～65

9　Dablain M A. The application of high-order differencing to the scalar wave equation［J］. Geophysics，1986，51(1)：54～66

10　Alterman Z，Karal F C. Propagation of seismic wave in layered media by finite difference methods［J］. BSSA，1968，58(1)：367～398

11　Fornberg B. The pseudo-spectral method：comparisons wit-h finite differences for the elastic wave equation［J］. Geophysics，1987，52(4)：483～501

12　Boris J P，Book D L. Flux-corrected transport Ⅰ，SHAS-TA，A fluid transport algorithm that works［J］. J Comput Phys，1973，11：38～69

13　Fei Tong，Larner K. Elimination of numerical dispersion in finite-difference modeling and migration by flux-corrected transport［J］. Geophysics，1995，60(6)：1 830～1 842

14　Levander A R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms［J］. Geophysics，1988，53(11)：1 425～1 436