求解组合拍卖问题的一种贪婪算法

贾欣鑫，罗　亮，郭丽峰，何尚录

（兰州交通大学数理与软件工程学院，甘肃兰州　730070）

摘　要：为有效解决组合拍卖问题，从下模集函数最大值问题的基本结论出发，将部分穷举法与贪婪算法相结合，给出了一种求解组合拍卖问题的新算法——改进的贪婪算法，并从理论上证明了所给算法具有更好的性能保证.

关键词：组合拍卖；下模集函数；贪婪算法

中图分类号：O224　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2009)03-0032-05

DOI：10.3875/j.issn.1674-3563.2009.03.007　　本文的 PDF 文件可以从 xuebao.wzu.edu.cn 获得

商品的拍卖问题实质上是一个组合优化问题，可以描述为：将 n 件商品（各物品不同）公平地拍卖给 m 个商人，每件商品 i 只能卖给一个商人，商人 j 对商品 i 出的最高价格是 w_{ij}，每个商人的购买力均为 W，如何分配拍卖的商品才能使所出售的商品获利最大？

以上的复杂组合拍卖问题可转化为如下模型（I）：

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_{ij} w_{ij}$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{n} w_{ij} y_{ij} \le W\ , \quad j=1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = 1\ , \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}$$

在上述模型中，$\sum_{i=1}^{n} w_{ij} y_{ij} \le W$ 表示每个商人购买物品不能超过他们的购买能力 W，y_{ij} 表示商品 i 能否出售给商人 j，如果出售给商人 j，则 y_{ij} 取 1，否则取 0. $\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = 1$ 表示商品 i 只能被出售一次.

组合拍卖问题是 NP-难题[1]，人们总是研究求解类似问题的近似算法[2-4]. 文献[2]提出了一种贪婪算法来求解组合拍卖问题. 本文将部分穷举法与贪婪算法相结合，给出了一种求解复杂组合拍卖问题的新算法——改进的贪婪算法，并分析了该算法的性能保证.

收稿日期：2008-09-19

基金项目：甘肃省自然科学基金（3ZS-042-B25-049）

作者简介：贾欣鑫（1983- ），男，山东青岛人，硕士研究生，研究方向：组合优化

1 若干定义、引理及其证明

定义 1 设 $E=\{1,2,\cdots,n\}$，$\Omega=2^E=\{A\,|\,A\subseteq E\}$，$f$：$\Omega\to R$ 为定义在 Ω 上的递增的下模集函数，即满足：

1）$f(\varphi)=0$；

2）$f(A)\le f(B)$，$\forall A\subseteq B\subseteq E$；

3）$f(A)+f(B)\ge f(A\bigcup B)+f(A\bigcap B)$，$\forall A,B\subseteq E$.

由下模集函数的定义可得：

a）$f(A\bigcup\{e\})-f(A)\ge f(B\bigcup\{e\})-f(B)$，$\forall A\subseteq B\subseteq E$，$e\in E\setminus B$；

b）$f(A\bigcup C)-f(A)\ge f(B\bigcup C)-f(B)$，$\forall A\subseteq B\subseteq E$，$C\subseteq E\setminus B$.

记 $\rho_A(B)=f(A\bigcup B)-f(B)$，则有：

$$\rho_e(A)\ge\rho_e(B)\quad(A\subseteq B).$$

定义 2 设 $E=\{1,2,\cdots,n\}$，$F=\{A\,|\,A\subseteq E\}$，若满足：

1）$\varphi\in F$；

2）若 $A\subseteq B\subseteq F$，且 $A\in F$，

则称 (E,F) 是一个独立系统.

定义 3 在独立系统 (E,F) 中，若满足：$|B|>|A|$，且 $\exists\, e\in B\setminus A$，使得 $A\bigcup\{e\}\in F$，则称 (E,F) 是一个拟阵.

定义 4 (E,F) 是一个拟阵，若满足 $F=\{A\,|\,A\subseteq E;\ |A|\le K\}$，其中 $K\in R^+$，则称 (E,F) 是一均匀拟阵.

引理 1 f 是 $\Omega=2^E$ 上的递增的下模集函数 $\Leftrightarrow$ $f(T)\le f(S)+\sum\limits_{j\in T\setminus S}f_j(S)$，$S,T\subseteq E$.

证明：设 f 是 $\Omega=2^E$ 上的递增下集模函数，$\forall S,T\subseteq E$. 令 $T\setminus S=\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 则有：

$$S\bigcup T=S\bigcup\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_k\}.$$

因为 f 是递增下模集函数，故有：

$$\begin{aligned}
f(T)&\le f(S\bigcup T)\\
&=f(S)+[f(S\bigcup\{e_1\})-f(S)]+[f(S\bigcup\{e_1,\ e_2\})-f(S\bigcup\{e_1\})]+\cdots\\
&\qquad+[f(S\bigcup\{e_1,\ e_2,\ \cdots e_k\})-f(S\bigcup\{e_1,\ e_2,\ \cdots e_{k-1}\})]\\
&=f(S)+f_{e_1}(S)+f_{e_2}(S\bigcup\{e_1\})+\cdots+f_{e_k}(S\bigcup T\setminus\{e_k\})\\
&\le f(S)+f_{e_1}(S)+f_{e_2}(S)+\cdots+f_{e_k}(S)\\
&=f(S)+\sum_{e\in T\setminus S}f_e(S)
\end{aligned}$$

2 改进的贪婪算法及其性能保证

下面给出求解递增的下模集函数最大值的贪婪算法：

第一步：令$i=1$, $S_0=\phi$；

第二步：求$e_i \in E \setminus S_{i-1}$使得$\alpha f_{e_i}(S_{i-1}) \ge \max\limits_{e\in E\setminus S_{i-1}} f_e(S_{i-1})$（$\alpha \ge 1$）;

第三步：令$S_i = S_{i-1} \bigcup \{e_i\}$，$i=i+1$；

第四步：如果 $i \le k$，则返回第二步.

定理1　若Z_g是用贪婪算法得到的函数解，$Zopt$是目标函数的最优解，则有：

$$\frac{Zopt}{Z_g} \le \frac{(\alpha k)^k}{(\alpha k)^k-(\alpha k-1)^k} \le \frac{e^{1/\alpha}}{e^{1/\alpha}-1}.$$

证明：设S_i表示经过i步迭代得到的集合，$S^G=S_k$是贪婪算法得到的解，T是问题的最优解，则$|T| \le k$.

在引理1中，令$S=\phi$，$f_i'=\max(f(S_{i-1}\bigcup\{e_i\})-f(S_{i-1}))$可得：

$$Zopt=f(T)\le\sum_{j\in T}f(j)\le kf_1'\le k(\alpha f_1),$$

$$Zopt \le f(S_j)+\sum_{i\in T\setminus S_j} f_i(S_j). \tag{1}$$

若

$$f(S_j)=\sum_{i=1}^{j} f_i, \tag{2}$$

且

$$\alpha f_{j+1} \ge f_{j+1}' \ge f_i(S_j), \tag{3}$$

其中$i \in E \setminus S_j$，将（2),（3）带入（1）则可得到：

$$Zopt \le \sum_{i=1}^{j} f_i + k\cdot(\alpha f_j + 1),$$

即

$$f_{j+1} \ge \frac{1}{\alpha k}Zopt-\frac{1}{\alpha k}\sum_{i=1}^{j} f_i.$$

将上式两边同时加$\sum_{i=1}^{j} f_i$可得：$\sum_{i=1}^{j+1} f_i \ge \frac{1}{\alpha k}Zopt+\frac{(\alpha k-1)}{\alpha k}\sum_{i=1}^{j} f_i$.

对$\forall j$进行归纳假设证明：$\sum_{i=1}^{j+1} f_i \ge \frac{(\alpha k)^j-(\alpha k-1)^j}{(\alpha k)^j}\cdot Zopt$.

当$j=1$时，$f_1 \ge \frac{1}{\alpha k}\cdot Zopt$成立.

假设$j-1$时成立，则有：

$$\sum_{i=1}^{j} f_i \ge \frac{(\alpha k)^{j-1}-(\alpha k-1)^{j-1}}{(\alpha k)^{j-1}}\cdot Zopt,$$

两边同时加 $f_1 \ge \frac{1}{\alpha k} \cdot Zopt$ 得到：

$$\sum_{i=1}^{j+1} f_i \ge \frac{1}{\alpha k} Zopt + \frac{\alpha k - 1}{\alpha k} \cdot \frac{(\alpha k)^{j-1} - (\alpha k - 1)^{j-1}}{(\alpha k)^{j-1}} \cdot Zopt ,$$

即

$$\sum_{i=1}^{j+1} f_i \ge \frac{(\alpha k)^{j} - (\alpha k - 1)^{j}}{(\alpha k)^{j}} \cdot Zopt .$$

当 $j = k$ 时有

$$Z_g = \sum_{i=1}^{k} f_i \ge \frac{(\alpha k)^{k} - (\alpha k - 1)^{k}}{(\alpha k)^{k}} \cdot Zopt ,$$

于是

$$\frac{Zopt}{Z_g} \le \frac{(\alpha k)^{k} - (\alpha k - 1)^{k}}{(\alpha k)^{k}} \le \frac{e^{1/\alpha}}{e^{1/\alpha} - 1} .$$

由上述证明可知，此算法的性能保证为：$\frac{e^{1/\alpha}}{e^{1/\alpha} - 1}$.

3 应　用

对本文一开始给出的拍卖问题模型（I）建立相应的集合，令 e 表示将要拍卖的一件商品．因为每件商品只能拍卖一次，所以每个商人得到物品 i 的数量是 0 或 1．记 E 为所有的 e 组成的集合（即所有的商品），商品的数量为 n，所以 E 中元素最多有 n 个，即 $|E| \le n$．对已拍卖的商品定义为集合 A，所有卖出的商品集 A 以及商品集 E 可以组成如下的均匀拟阵：

$$F = \{A \mid A \subseteq E; |A| \le n\} \quad .$$

定义如下函数：f：$E \to R_+$，$f(\phi) = 0$.

$$f(e) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} \qquad \forall e \in E ,$$

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} \cdot \min\{n_j^A, y_{ij}\} .$$

这里的 $f(e)$ 表示单个物品 e 出售所获得的利润．对任意的 $A \subseteq E$，记 n_j^A 为 A 中商人 j 所得到的物品的数量，显然有 $n_j^A \le |A|$.

很显然，$\min\{n_j^{A\cup\{e\}}, y_{ij}\} \ge \min\{n_j^A, y_{ij}\}$，所以有：

$$f(A \cup \{e\}) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} \cdot \min\{n_j^{A\cup\{e\}}, y_{ij}\} \ge \sum_{i=1}^{n} w_{ij} \cdot \min\{n_j^A, y_{ij}\} = f(A) ,$$

于是可知 f 是递增的模函数．

定义一个函数：

$$\begin{cases} v_i(S)=1 & if\ n_j^S \ge y_{ij} \\ v_i(S)=0 & if\ n_j^S < y_{ij} \end{cases}$$ 其中 $S \subseteq E$，

由以上变量可知对任意的 $A \subseteq B \subseteq E$， $e \in E$ 有 $v_i(B) \ge v_i(A)$，故有：

$$f(A \cup \{e\}) - f(A) = \sum_{i \in e} \frac{p_i}{t_i} \cdot (n_i^{\{e\}} - v_i(A))$$
$$\ge \sum_{i \in e} \frac{p_i}{t_i} \cdot (n_i^{\{e\}} - v_i(B)) = f(B \cup \{e\}) - f(B),$$

故 f 是下模集函数.

综上所述可知，函数 f 是在均匀拟阵约束条件下的递增下模集函数. 所以本文一开始给出的组合拍卖问题可以用上述贪婪算法进行求解，并且得到性能保证为：$\frac{e^{1/\alpha}}{e^{1/\alpha}-1}$.

参考文献

[1] Adler M, Gibbsons P B, Martia Y. Scheduling Space-sharing for Internet Advertising [J]. Journal of Scheduling, 2002, 5: 103-119.

[2] 罗亮, 贾欣鑫, 何尚录. 求解组合拍卖问题最大值的贪婪算法[J]. 黑龙江科技学院学报, 2008, 18(5): 382-384.

[3] Ilev V P. An Approximation Guarantee of the Greedy Descent Algorithm for Minimizing a Super-modular Set Function [J]. Discrete Applied Mathematics, 2001, 114: 131-146.

[4] Ilev V P, Linker N. Performance Guarantees of a Greedy Algorithm for Minimizing a Super-modular Set Function on Comatroid [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 171: 648-660.

Greedy Algorithm for Solving Combinatorial Auction Issue

JIA Xinxin, LUO Liang, GUO Lifeng, HE Shanglu

(School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, China 730070)

Abstract: By applying the conclusions for sub-modular set function's maximum value, a new approximation algorithm for combinatorial auction issue was presented. The algorithm is an improved greedy one which has achieved a better performance guarantee by combining the part of enumeration method with the greedy algorithm. At the same time, the reliability and effect of this algorithm were theoretically proved.

Key words: Combinatorial Auction; Sub-modular Set Function; Greedy Algorithm

（编辑：王一芳）