求解下模集函数最大值问题的局部搜索算法

王武民，张防防，柘晓莉，何尚录
（兰州交通大学数理与软件工程学院，甘肃兰州 730070）

摘 要：给出了求解具有简单约束的下模集函数最大值问题的一种局部搜索算法，并讨论了所给算法的性能保证．该算法的基本思想是：算法每次迭代总是在当前近似解集的邻域内，求出使目标函数取得最大的集合，将其作为新的近似解集．分析表明，所给算法是一种多项式时间近似算法．

关键词：组合优化；下模集函数；近似算法；性能保证
中图分类号：O224 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-0375(2008)03-0012-06

设 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，$\Omega=\{X\mid X\subseteq I\}$ 是由 I 的所有子集组成的集合，若 $f:\Omega\to R$ 满足

$$f(X)+f(Y)\ge f(X\cap Y)+f(X\cup Y),\ \forall X,Y\in\Omega$$

则称 f 为定义在 Ω 上的下模集函数．关于下模集函数的详细资料可参考文献[1].

本文考虑如下具有简单约束的下模集函数最大值问题

$$\begin{aligned}&\max f(X)\\&s.t.|X|=P,X\in\Omega\end{aligned}\tag{1}$$

其中， $p<n$ 为给定的正整数．

首先需要说明的是，上述问题在组合优化问题中具有非常重要的作用．譬如，著名的最大 p-设施定位问题对应于求 $X\subseteq I$，使其满足 $|X|=p$ 且使下模集函数 $f(X)$ 达到最大．

求下模集函数的最大值问题属于 NP-难问题，没有非常有效的求解方法．人们主要研究求解此类问题的比较有效的近似算法，对多项式时间算法的研究很少．在求解各种组合优化问题的近似算法中，贪婪算法和局部搜索法是其中比较简单且有效的算法．最近，Ilev 和 Linker[2-3]给出了求解具有简单约束的非负非减上模集函数最小值问题的一种贪婪算法，并讨论了所给算法的性能保证．本文将给出求解具有简单约束的非负非减下模集函数的最大值问题的一种局部搜索法，并分析所给算法的性能保证．

本文采用如下记号：对 $X\subseteq I, x\in X$ 及 $y\in I\setminus X$，用 $X+\{y\}$ 表示 $X\cup\{y\}$，用 $X-\{x\}$ 表示 $X\setminus\{x\}$．

1 若干引理及其证明

设 $f:\Omega\to R$ 是非负非减下模集函数（即对满足 $X\subseteq Y$ 的任何 $X,Y\subseteq I$ 有 $f(X)\le f(Y)$），

收稿日期：2007-07-05
作者简介：王武民（1981-），男，甘肃靖远人，硕士研究生，研究方向：最优化计算方法

对任何 $X \subseteq I$ 及 $x \in X$，定义

$$d_x(X) = f(X) - f(X - \{x\}) \tag{2}$$

则有 $d_x(X) \geq 0$，称其为 f 在 X 处关于 x 的向前差分．关于 $d_x(X)$ 有

引理 1　设 $f:\Omega \to R$ 是非减的下模集函数，若 $X,Y \subseteq I$，满足 $X \subseteq Y$ 且 $x \in X$，则有 $d_x(X) \geq d_x(Y)$．

证明：由 f 的下模性知

$$f(Y - \{x\}) + f(X) \geq f((Y - \{x\}) \cup X) + f((Y - \{x\}) \cap X)$$

从而有

$$\begin{aligned} d_x(X) &= f(X) - f(X - \{x\}) = f(X) - f((Y - \{x\}) \cap) \\ &\geq f(X) + f((Y - \{x\}) \cup X) - f(Y - \{x\}) - f(X) \\ &= f(Y) - f(Y - \{x\}) = d_x(Y) \end{aligned}$$

引理 1 证毕．

定义

$$\theta = \max_{d_x(\{x\})>0, x \in I} \frac{d_x(\{x\}) - d_x(I)}{d_x(\{x\})} \tag{3}$$

容易看出，θ 满足 $0 \leq \theta \leq 1$，称 θ 为 f 的向前差分的最大增长率[2]．在本文中，θ 刻画了 f 的函数值变化快慢的参数．

引理 2　设 f 是非减下模集函数，则对任何 $x \in I$，有 $(1-\theta)d_x(\{x\}) \leq d_x(I)$．

证明：由定义有 $\theta \geq \dfrac{d_x(\{x\}) - d_x(I)}{d_x(\{x\})}$，从而当 $d_x(\{x\}) > 0$ 时，有 $(1-\theta)d_x(\{x\}) \leq d_x(I)$．而当 $d_x(x) = 0$ 时，显然有 $(1-\theta)d_x(\{x\}) \leq d_x(I)$．

引理 2 证毕．

设 $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \subseteq I$，$B = \{b_1, b_2, ..., b_n\} \subseteq I$，记

$$A_0 = \varnothing,\quad A_j = \{a_1, a_2, ..., a_j\}\ (j = 1, 2, ..., m),\quad A = A_m$$

$$B_0 = \varnothing,\quad B_j = \{b_1, b_2, ..., b_j\}\ (j = 1, 2, ..., n),\quad B = B_n$$

则有

引理 3　$f(A \cup B) = f(B) + \sum_{a_j \in A \setminus B} d_{a_j}(B \cup A_j) = f(A) + \sum_{b_j \in B \setminus A} d_{b_j}(A \cup B_j)$．

证明：　先证明第一个等式，由于

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(B \cup A_m) = f((B \cup A_{m-1}) \cup \{a_{m-1}\}) \\ &= \begin{cases} f(B \cup A_{m-1}), & a_m \in B, \\ f(B \cup A_{m-1}) + d_m(B \cup A_m), & a_m \in A \setminus B, \end{cases} \end{aligned}$$

类似地有

$$f(B\cup A_{m-1})=\begin{cases} f(B\cup A_{m-2}), & a_{m-1}\in B, \\ f(B\cup A_{m-2})+d_{m-1}(B\cup A_{m-1}), & a_{m-1}\in A\setminus B, \end{cases}$$

依次类推可得

$$f(A\cup B)=f(B\cup A_0)+\sum_{a_j\in A\setminus B}d_{a_j}(B\cup A_j)=f(B)+\sum_{a_j\in A\setminus B}d_{a_j}(B\cup A_j)$$

用同样的方法可以证明第二个等式.

引理 3 证毕.

引理 4 设 $|A|=|B|=p$，$|A\setminus B|=|B\setminus A|=k$ 且

$A\setminus B=\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\}$， $B\setminus A=\{b_{j_1},b_{j_2},\cdots,b_{j_k}\}$，则有

$$(1+k-\theta)f(B)-(1-\theta)f(A)\geq\sum_{t=1}^{k}[f(A+\{b_{j_t}\}-\{a_{j_t}\})-f(A)]$$

证明：由引理 3 有

$$\begin{aligned}&(1-\theta)f(B)-(1-\theta)f(A)\\&=(1-\theta)\sum_{b_j\in B\setminus A}d_{b_j}(A\cup B_j)-(1-\theta)\sum_{a_j\in A\setminus B}d_{a_j}(B\cup A_j)\end{aligned} \tag{4}$$

由引理 1，引理 2 知，对任何 $a_j\in A\setminus B$ 有

$$(1-\theta)d_{a_j}(B\cup A_j)\leq(1-\theta)d_{a_j}(A_j)\leq(1-\theta)d_{a_j}(a_j)\leq d_{a_j}(I)\leq d_{b_j}(A+\{b_j\})$$

从而有

$$(1-\theta)\sum_{a_j\in A\setminus B}d_{a_j}(B\cup A_j)\leq\sum_{a_j\in A\setminus B}d_{a_j}(A+\{b_j\})$$

对任何 $b_j\in B\setminus A$，有

$$d_{b_j}(A\cup B_j)\geq d_{b_j}(I)\geq(1-\theta)d_{b_j}(\{b_j\})\geq(1-\theta)d_{b_j}(A+\{b_j\})$$

由（4）式有

$$(1-\theta)f(B)-(1-\theta)f(A)\geq(1-\theta)^2\sum_{b_j\in B\setminus A}d_{b_j}(A+b_j)-\sum_{a_j\in A\setminus B}d_{a_j}(A+\{b_j\}) \tag{5}$$

令

$$K=\theta^2\sum_{b_j\in B\setminus A}d_{b_j}(A+\{b_j\})-2\theta\sum_{b_j\in B\setminus A}d_{b_j}(A+\{b_j\})$$

而 K 的最小值是 $-\sum_{b_j\in B\setminus A}d_{b_j}(A+\{b_j\})$，所以有

$$\begin{aligned}&(1-\theta)^2\sum_{b_j\in B\setminus A}d_{b_j}(A+\{b_j\})-\sum_{a_j\in A\setminus B}d_{a_j}(A+\{b_j\})\\&\geq\sum_{b_j\in B\setminus A}d_{b_j}(A+\{b_j\})-\sum_{a_{j\in A\setminus B}}d_{a_j}(A+\{b_j\})-\sum_{b_j\in B\setminus A}d_{b_j}(A+\{b_j\})\end{aligned} \tag{6}$$

而

$$\sum_{b_j\in B\setminus A} d_{b_j}(A+\{b_j\})=\sum_{t=1}^{k}[f(A+\{b_{j_t}\})-f(A)]$$

$$\le k[f(A\cup B)-f(A)]\le k[f(A)+f(B)-f(A\cap B)-f(A)]\le kf(B)$$

由（5），（6）式有

$$(1-\theta)f(B)-(1-\theta)f(A)\ge\sum_{t=1}^{k}[f(A+\{b_{j_t}\}-\{a_{j_t}\})-f(A)]-kf(B)$$

即 $$(1+k-\theta)f(B)-(1-\theta)f(A)\ge\sum_{t=1}^{k}[f(A+\{b_{j_t}\}-\{a_{j_t}\})-f(A)]$$

引理 4 证毕.

2 求解非减下模集函数最大值的近似算法及其性能保证

设 f 是非负非减的下模集函数，下面给出在此条件下求解问题（1）的近似算法：

（i）给定 ε 使其满足 $0<\varepsilon<1$，取 $X_0\subseteq I$ 使其满足 $|X_0|=p$；令 i=0

（ii）求 $\mu\in I\setminus X_i$ 及 $\nu\in X_i$ 使其满足

$$f(X_i+\{\mu\}-\{\nu\})=\max_{x\in I\setminus X_i,\,y\in X_i} f(X_i+\{x\}-\{y\})$$

（iii）取 $X_{i+1}=X_i+\{\mu\}-\{\nu\}$，若

$$f(X_{i+1})-f(X_i)\ge-\frac{(1-\theta)\varepsilon}{n}f(X_i) \tag{7}$$

则停止；否则令 $i=i+1$，转（ii）.

设 $X\subseteq I$ 满足 $|X|=p$，记 $N(X)=\{Y\subseteq I\,||Y|=2，|Y-X|=2\}$，称 $N(X)$ 为 X 的邻域.

从上述算法的具体步骤可以看出，算法每次迭代，总是在当前近似解集的邻域内，求出使目标函数取得最大的集合，作为新的近似解集，因此称此算法为局部搜索法或邻域搜索法.

下面讨论上述算法的性能保证.

定理 1　设 X^* 是问题（1）的最优解，$\widetilde{X}$ 是上述算法求得的问题（1）的近似解，则有

$$f(\widetilde{X})\le\frac{(1+k-\theta)}{(1-\theta)(1-\varepsilon)}f(X^*).$$

证明：设 $X^*=\left\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_p^*\right\}$，$\widetilde{X}=\left\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_p\right\}$

不妨设 $|X^*\setminus\widetilde{X}|=|\widetilde{X}\setminus X^*|=k$ 且

$$X^*\setminus\widetilde{X}=\left\{x_{i_1}^*,x_{i_2}^*,\cdots,x_{i_k}^*\right\},\quad \widetilde{X}\setminus X^*=\left\{\tilde{x}_{j_1},\tilde{x}_{j_2},\cdots,\tilde{x}_{j_k}\right\}$$

在引理 4 中分别取 $B=X^*$，$A=\widetilde{X}$ 有

$$(1+k-\theta)f(X^*)-(1-\theta)f(\widetilde{X})\ge\sum_{t=1}^{k}[f(\widetilde{X}+\{x_{j_t}^*\}-\{\tilde{x}_{j_t}\})-f(\widetilde{X})],$$

由（6）知：对任何t，$(0 \le t \le k)$都有

$$f(\widetilde{X}+\{x_{j_t}^{*}\}-\{\tilde{x}_{j_t}\})-f(\widetilde{X}) \ge -\frac{(1-\theta)\varepsilon}{n} f(\widetilde{X})$$

从而有

$$(1+k-\theta) f(X^{*})-(1-\theta) f(\widetilde{X}) \ge -\frac{k(1-\theta)\varepsilon}{n} f(\widetilde{X}) \ge -(1-\theta)\varepsilon f(\widetilde{X})$$

由上式得

$$f(\widetilde{X}) \le \frac{(1+k-\theta)}{(1-\theta)(1-\varepsilon)} f(X^{*})$$

定理 1 证毕.

定理 2　算法至多经$O(n)$迭代即可求得满足定理 1 条件的近似解.

证明　用$X_0, X_1, X_2, \cdots, X_l=\widetilde{X}$表示由所给算法求得的问题（1）的近似解序列，则由（7）知，对$i=0,1,2,\cdots,l-1$有

$$f(X_{i+1})-f(X_i) \le -\frac{(1-\theta)\varepsilon}{n} f(X_i)$$

即

$$f(X_{i+1}) \le [1-\frac{(1-\theta)\varepsilon}{n}] f(X_i) \quad , \quad i=0,1,\cdots,l-1$$

于是有

$$f(\widetilde{X})=f(X_l) \le [1-\frac{(1-\theta)\varepsilon}{n}]^{l} f(X_0) \le f(X_0) \le f(X^{*})$$

两边取对数得

$$l \le \frac{\lg \dfrac{f(X_0)}{f(X^{*})}}{\lg[1-\dfrac{(1-\theta)\varepsilon}{n}]}$$

定理 2 证毕.

由于所给算法每次迭代最多只需$O(n)$次函数值的计算，故由上述算法知，算法至多需$O(n)$次函数的计算即可求得问题的满足定理 1 条件的近似解. 本文所给的算法是一种多项式时间近似算法.

参考文献

[1] Cunningham W H. On submodular function minimization [J]. Combinatorica, 1985, 5: 185-192.

[2] ILev V P. An approximation guarantee of the greedy descent algorithm for minimizing supermodular set function [J]. Discrete Applied Mathematics, 2001, 114: 131-146.

[3] ILev V P, Linker N. Performance guarantee of a greedy algorithm for miniminzing a supermodular set function on comatroid [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 171: 648-660.

Local Search Algorithm for Solving Maximizing Submodular Set Function

WANG Wumin, ZHANG Fangfang, ZHE Xiaoli, HE Shanglu
(School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, China 730070)

Abstract: This paper presents a local search algorithm which maximizes a nondecreasing submodular set function and discusses its performance guarantee as well. The basic idea lies in which each iterative algorithm is always in the neighborhood sets of the current approximate solution, solving a set which maximize the objective function is a new approximate set. Analysis shows that the algorithm is a polynomial time algorithm.
Key words: Optimal combination; Submodular set function; Approximation algorithm; Performance guarantee

（编辑：王一芳）