第 43 卷　第 2 期
Vol.43　No.2
山 东 大 学 学 报 (理 学 版)
Journal of Shandong University(Natural Science)
2008 年 2 月
Feb. 2008

文章编号:1671-9352(2008)02-0012-04

满足一定度条件的图中 4-圈的个数

李峰,李硕,梁峰
(山东大学数学与系统科学学院,山东 济南 250100)

摘要:证明了如果一个图包含 $4k$ 个点,并且任意两个不相邻的点的度之和大于或等于 $4k-2$,则该图一定含有 $k-1$个点不相交的 4-圈。

关键词:图;4-圈;度条件
中图分类号:O22　　　**文献标志码**:A

The number of quadrilaterals in a graph satisfying the given degree condition

LI Feng, LI Shuo, LIANG Feng
(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: It was proved that if G is a graph of order $4k$, and the minimum sum of degree of any two nonadjacent vertices in G is no less than $4k-2$, then G contains $k-1$ disjoint quadrilaterals.

Key words: graph; quadrilateral; degree condition

首先说明本文中部分符号的含义:$V(G)$,$|G|$,$E(G)$和 $e(G)$分别表示图 G 的顶点集,顶点数,边集和边数;$e(X,Y)$表示 X 和 Y 之间的边数;$\delta(G)$表示图 G 的最小度;$d(x)$表示 x 在 G 中的度,而 $d(x,C)$表示 x 与子图 C 之间的边数;$\sigma_2(G)$表示图 G 中任意不相邻的两点度和的最小值;$l(P)$表示路 P 的长度;4-圈是指顶点数为 4 的圈,4-路是指长度为 3 的路。文中其他未见说明的符号请参见[1]。

图的汉密尔顿圈问题是图论研究中最著名的问题之一,而图中包含指定长度的圈的问题则是对汉密尔顿圈问题的延伸。关于图中圈的问题的研究主要是度条件的研究。1963 年,Corradi 和 Hajnal 在[2]中给出了一个图中包含 k 个点不相交的圈的结论。

定理 1[2]　设$|G|=n\geqslant 3k$,并且 $\delta(G)\geqslant 2k$。则 G 包含 k 个点不相交的圈。

而 Justesen 在[3]中通过改进定理 1 的度条件,得到了以下更好的结果。

定理 2[3]　设$|G|=n\geqslant 3k$,并且 $\sigma_2(G)\geqslant 4k$。则 G 包含 k 个点不相交的圈。

1983 年,El-Zahar 在[4]中提出了著名的 El-Zahar 猜想:

猜想[4]　设$|G|=n_1+n_2+\cdots+n_k$,且 $\delta(G)\geqslant\left\lceil\frac{n_1}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{n_2}{2}\right\rceil+\cdots+\left\lceil\frac{n_k}{2}\right\rceil$,则 G 含 k 个独立的圈,其长度分别为:n_1,n_2,$\cdots$,n_k。

现在有很多对该猜想特例的研究,如考虑所有的 n_i 取 4 的情况。Robert Johansson 在[5]的定理 2.7 中给出 G 包含 $k-1$ 个点不相交的 4-圈的度条件。

定理 3[5]　设$|G|=4k$,且 $\delta(G)\geqslant 2k$,则 G 包含 $k-1$ 个点不相交的 4-圈和一条独立的 4-路。

Danhong Zhang 和 Hong Wang 则在[6]中的引理 2.12 中将定理 3 的度条件改为 $\delta(G)\geqslant 2k-1$。

定理 4[6]　设$|G|=4k$,且 $\delta(G)\geqslant 2k-1$,则 G 包含 $k-1$ 个点不相交的 4-圈。

收稿日期:2007-12-14
基金项目:山东省中青年科学家科研奖励基金资助项目(2007BS01021)
作者简介:李峰(1984-　),男,硕士研究生,主要研究 2-因子问题. Email: lifeng250100@mail.sdu.edu.cn

本文要对定理4的度条件给以改进，得到以下命题。

定理 A[6] 设$|G|=4k$，其中 k 是一个正整数。如果 $\sigma_2(G)\geqslant 4k-2$，则 G 包含 $k-1$ 个点不相交的4-圈。

1 预备知识

引理 1.1[7] 设 C 是一个4-圈并且 x,y 是 G 中独立于 C 的两个不同的点。如果 $d(x,C)+d(y,C)\geqslant 5$，那么 $G[V(C)\cup\{x,y\}]$ 包含一个4-圈 C' 和一条与其点不相交的边 e，并且 e 恰好只与 x,y 中的一个点相邻。

引理 1.2[7] 设 C 是一个4-圈，P_1 和 P_2 是 G 中的两条路。$l(P_1)=l(P_2)=1$。如果 C，P_1 和 P_2 是点不相交的，并且 $e(C,P_1\cup P_2)\geqslant 9$，那么 $G[V(C\cup P_1\cup P_2)]$ 包含一个4-圈 C' 和一条路 P，满足 $l(P)=3$ 并且 C' 与 P 点不相交。

引理 1.3[7] 设 C 是一个4-圈，P_1 和 P_2 是两条路，$l(P_1)=l(P_2)=3$。如果 C，P_1，和 P_2 是点不相交的并且 $e(C,P_1\cup P_2)\geqslant 17$，那么 $G[V(C\cup P_1\cup P_2)]$ 包含两个点不相交的4-圈。

引理 1.4[7] 设 P_1 和 P_2 是 G 中两条点不相交的路，$l(P_1)=l(P_2)=3$。如果 $e(P_1,P_2)\geqslant 6$，那么 $G[V(P_1\cup P_2)]$ 包含一个4-圈。

引理 1.5 设 P_1 和 P_2 是两条点不相交的路，$l(P_1)=3$，$l(P_2)=1$。如果 $e(P_1,P_2)\geqslant 4$，那么 $G[V(P_1\cup P_2)]$ 包含一个4-圈。

证明 设 $V(P_1)=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$，$V(P_2)=\{x,y\}$。若 $e(P_1,P_2)>4$，不妨设 $e(x,P_1)>2$，则 $G[V(P_1\cup\{x\})]\supseteq C_4$。所以只证明当 $e(P_1,P_2)=4$ 时，$G[V(P_1\cup P_2)]\supseteq C_4$ 即可。

假设引理不成立，则 $e(x,P_1)=2$，$e(y,P_1)=2$。如果 $\{xp_1,xp_2\}\subseteq E(G)$，则 $yp_1,yp_2,yp_3\notin E(G)$，与 $e(y,P_1)=2$ 矛盾。如果 $\{xp_1,xp_4\}\subseteq E(G)$，则 $yp_2,yp_3\notin E(G)$，所以 $\{yp_1,yp_4\}\subseteq E(G)$，但此时 $\{x,p_1,y,p_4,x\}$ 是一个4-圈，矛盾。如果 $\{xp_2,xp_3\}\subseteq E(G)$，则 $e(y,P_1)=0$，与 $e(y,P_1)=2$ 矛盾。所以引理成立。

引理 1.6 设 P_1 和 P_2 是两条点不相交的4-路，如果 $G[V(P_1\cup P_2)]$ 不包含4-圈，则可把 $G[V(P_1\cup P_2)]$ 的顶点划分成4个交为空的组，每组包含两个点，并且这两个点在图中是不相邻的。

证明 由 $G[V(P_1\cup P_2)]$ 不包含4-圈，得 $x_1x_4,y_1y_4\notin E(G)$。若 $e(\{x_2,x_3\},\{y_1,y_4\})\geqslant 1$，则不失一般性，设 $x_2y_1\in E(G)$。此时，$x_3y_2,x_2y_3\notin E(G)$，取 $\{x_1x_4,y_1y_4,x_2y_3,x_3y_2\}$ 作为分组即可。所以 $e(\{x_2,x_3\},\{y_1,y_4\})=0$，同理 $e(\{y_2,y_3\},\{x_1,x_4\})=0$。但此时又可取 $\{x_2y_1,x_3y_4,y_2x_1,y_3x_4\}$ 作为分组，所以引理成立。

引理 1.7 设 $P_1=x_1x_2x_3x_4$，$P_2=y_1y_2y_3y_4$ 是两条独立的4-路。如果以下两个条件：

(1) $e(P_1)\geqslant 4, e(P_2)\geqslant 4, e(P_1,P_2)\geqslant 4$；

(2) $e(P_1)\geqslant 3, e(P_2)\geqslant 4, e(P_1,P_2)\geqslant 5$；

任意一个成立，则 $G[V(P_1\cup P_2)]$ 包含一个4-圈。

证明 不论 P_1，P_2 满足哪个条件，只要证明所有等号成立时，$G[V(P_1\cup P_2)]$ 包含4-圈即可。

当条件(1)成立时，假设结论不成立。不失一般性，设 $\{x_1x_3,y_1y_3\}\subseteq E(G)$。则有 $e(x_1x_2x_3,y_1y_2y_3)\leqslant 1$，$e(x_4,y_1y_2y_3)\leqslant 1$，$e(y_4,x_1x_2x_3)\leqslant 1$。又由 $e(P_1,P_2)=4$，所以 $x_4y_4\in E(G)$，且三个不等式中等号成立。显然，$y_4x_1,y_4x_2\notin E(G)$，所以 $y_4x_3\in E(G)$，同理 $x_4y_3\in E(G)$，但这时 $\{x_3,x_4,y_3,y_4,x_3\}$ 是一个4-圈，矛盾。

当条件(2)成立时，假设结论不成立。设 $y_1y_3\in E(G)$，显然存在 $x_i\in V(P_1)$ 满足 $d(x_i,P_2)=2$。由对称性，可假设 $i=2$ 或 $i=1$。如果 $i=2$，则 $\{x_2y_3,x_2y_4\}\subseteq E(G)$ 并且 $d(x_1,P_2)=d(x_3,P_2)=0$。又因为 $d(x_4,P_2)\leqslant 2$ 可得 $e(P_1,P_2)\leqslant 4$，矛盾。如果 $i=1$，通过相似的讨论也可以得到类似的矛盾。所以引理成立。

2 定理 A 证明

用反证法假设定理不成立，即 G 在满足度条件的情况下不包含 $k-1$ 个点不交的 4-圈，那么取 G 是一个极大反例，则 G 包含 $k-2$ 个点不相交的 4-圈：Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_{k-2} 以及一条 4-路 P。设 $H=\bigcup_{i=1}^{k-2}Q_i$，$F=G-H-P$。

首先，可适当的选取 Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_{k-2} 使得 F 包含一条边。如果 F 中没有边，则对任意 $\{x,y\}\subseteq V(F)$，$d(x,F)+d(y,F)=0$。既然 $G[V(P\cup F)]$ 不包含 4-圈，有 $d(x,P)\leqslant 2$，$d(y,P)\leqslant 2$。所以 $d(x,P\cup F)+d(y,P\cup F)\leqslant 4$。并由此得到下式：

$$d(x,H)+d(y,H)\geqslant 4k-2-4=4(k-2)+2。$$

由该式可知，在 H 中存在一个 Q_i 满足：$d(x,Q_i)+d(y,Q_i)\geqslant 5$。由引理 1.1，得 $G[V(Q_i)\cup\{x,y\}]$ 包含一个 4-圈 Q 和一条与其点不相交的边 e。

设 $V(F)=\{x,y,u,v\}$ 且 xy 是 F 中的一条边。可适当选取 P 和 F，使得 F 包含两条点不相交的边，如果 F 不包含两条点不相交的边，那么又因为 $G[V(P\cup F)]$ 不包含 4-圈，有 $d(u,F)+d(v,F)\leqslant 2$，$d(u,P)\leqslant 2$ 以及 $d(v,P)\leqslant 2$。所以 $d(u,P\cup F)+d(v,P\cup F)\leqslant 4+2=6$。并且由此得到下式：

$$d(u,H)+d(v,H)\geqslant 4k-2-6=4(k-2)。$$

如果在 H 中存在一个 Q_j 满足 $d(u,Q_j)+d(v,Q_j)\geqslant 5$，由引理 1.1，断言一定成立。所以可以假设所有的等式成立，即 $d(u,F)+d(v,F)=2$，$d(u,P)=2$ 以及 $d(v,P)=2$。设 $P=x_1x_2x_3x_4$。如果 u 和 v 都只与 P 中的内点相邻，即

$$\{ux_2,ux_3,vx_2,vx_3\}\subseteq E(G),$$

则 (u,x_2,v,x_3,u) 是一个 4-圈，与假设矛盾。所以 u 和 v 中至少有一点与 P 的端点相邻。不失一般性，设 $ux_1\in E(G)$。既然 $\{vx_1,vx_3\}\not\subset E(G)$，有 $vx_2\in E(G)$ 或 $vx_4\in E(G)$，不论哪种情况成立，$G[\{u,v\}\cup V(P)]$ 都包含一条 4-路和一条独立的边，设 xy 和 uv 是 $E(F)$ 中两条独立的边。断言 F 包含一条 4-路。如果断言不成立，则 $\sum_{w\in V(F)}d(w,F)=4$，又由引理 1.5，得到 $\sum_{w\in V(F)}d(w,P)\leqslant 6$，所以有下式：$\sum_{w\in V(F)}d(w,P\cup F)\leqslant 4+6=10$。故

$$\sum_{w\in V(F)}d(w,H)\geqslant 2(4k-2)-10=8(k-2)+2。$$

所以在 H 中存在一个 Q_j 满足 $\sum_{w\in V(F)}d(w,Q_j)\geqslant 9$，则由引理 1.2，$G[V\{Q_j\cup F\}]$ 包含一个 4-圈以及与该 4-圈点不交的 4-路。

下证 G 包含 $k-1$ 个点不相交的 4-圈。现在 $G-H$ 包含两条点不交的 4-路，用 P_1 和 P_2 表示。设 $P_1=x_1x_2x_3x_4$，$P_2=y_1y_2y_3y_4$。既然 P_1 和 P_2 组成的导出子图不包含 4-圈，有 $e(P_1)\leqslant 4$，$e(P_2)\leqslant 4$。并且由引理 1.4，$e(P_1,P_2)\leqslant 5$。所以

$$\sum_{x\in V(P_1\cup P_2)}d(x,P_1\cup P_2)\leqslant 8+8+5\times 2=26。$$

又由引理 1.6，可把 P_1 和 P_2 中的 8 个点分成独立的四组，每组两个点，并且互不相邻，得到下式：

$$\sum_{x\in V(P_1\cup P_2)}d(x,H)\geqslant 4(4k-2)-26=16(k-2)-2。$$

又由引理 1.3，对 H 中任意一个 Q_i 满足：

$$\sum_{x\in V(P_1\cup P_2)}d(x,Q_i)\leqslant 16,$$

所以有

$$16(k-2)-2\leqslant\sum_{x\in V(P_1\cup P_2)}d(x,H)\leqslant 16(k-2)。$$

此时三个不等式 $e(P_1)\leqslant 4$，$e(P_2)\leqslant 4$，$e(P_1,P_2)\leqslant 5$ 中至多有一个不等号严格成立，但该严格不等式中左边的取值比右边只可能少 1。显然 P_1，P_2 一定满足引理 1.7 给出的两个条件之一，则 $G[V(P_1\cup P_2)]$ 包含一个 4-圈。矛盾，所以定理成立。

3 问题

如果文献[6]的引理2.12中给出的度条件 $\delta \geqslant 2k-1$ 是最好的，则把本文中定理A的条件改为 $\sigma_2 \geqslant 4k-4$，肯定不成立。那么如果改为 $\sigma_2 \geqslant 4k-3$，结论又当如何呢？有兴趣的读者不妨在[6]和本文证明的基础上尝试一下。

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. Amsterdam: North-Holland, 1976.
[2] Corradi K, Hajnal A. On the maximal number of independent circuits in graph[J]. Acta Math Acad Sci Hungar, 1963, 14:423-439.
[3] JUSTESEN P. On independent circuits in finite graphs and a conjecture of Erdőos and Posa[J]. Annals of Discrete Math, 1989, 41:299-306.
[4] EL-ZAHAR M H. On circuits in graphs[J]. Discrete Math, 1984, 50:227-230.
[5] JOHANSSON R. On the bipartite case of El-Zahars conjecture[J]. Discrete Mathematics, 2000, 219:123-134.
[6] ZHANG D, WANG H. Disjoint directed quadrilaterals in a directed graph[J]. J Graph Theory, 2005, 50:91-104.
[7] RANDERATH B, SCHIERMEYER I, WANG H. On quadrilaterals in a graph[J]. Discrete Math, 1999, 203:229-237.

(编辑:李晓红)