

## MLFMA 结合最佳一致逼近快速求解目标宽带 RCS

田超 谢拥军 王元源 蒋永辉

(西安电子科技大学天线与微波技术国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 该文将多层快速多极子与最佳一致逼近结合计算了目标宽带的电磁散射特性。通过求解给定频带内的切比雪夫节点和节点处的目标表面电流, 实现了频带内任意频点表面电流的快速预测, 从而快速分析了目标宽带电磁散射特性。将计算结果与 MLFMA 逐点计算的结果进行了比较, 结果表明在不影响精度的前提下, 该方法大大地提高了计算效率。

**关键词:** 宽带雷达散射截面; 多层快速多极子算法; 最佳一致逼近

中图分类号: TN011

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)11-2772-04

## Fast Solutions of Wide-Band RCS Pattern of Objects Using MLFMA with the Best Uniform Approximation

Tian Chao Xie Yong-jun Wang Yuan-yuan Jiang Yong-hui

(National Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** MultiLevel Fast Multipole Algorithm (MLFMA) in conjugation with the best uniform approximation is applied to the scattering analysis of an arbitrary shaped perfect electric conductor over a wide frequency band in this paper. The nodes of Chebyshev within a given frequency range are found firstly, and the surface electric currents at these nodes are computed with MLFMA. The surface current on perfect electric conductor is expanded in a polynomial function via the best uniform approximation, then the electric current distribution can be obtained at any frequency within the given frequency range, which is used to compute the scattered fields and the wide-band Radar Cross Section (RCS). The numerical results presented in this paper are compared with the results obtained with MLFMA at each frequency. The results show that the computational efficiency is improved drastically without sacrificing much accuracy.

**Key words:** Wide-band radar cross section; MultiLevel Fast Multipole Algorithm(MLFMA); Best uniform approximation

### 1 引言

高效地获得目标的超宽带电磁散射特性对于高分辨雷达、成像技术以及目标识别的研究具有重要意义。极少数目标的电磁散射可由经典的电磁理论解析求解, 对于复杂目标的电磁散射问题就需要采用数值方法进行求解。

传统的矩量法(MOM)可以精确预测任意形状导体雷达散射截面(RCS)<sup>[1]</sup>, 但受所需内存的限制, 长期以来不能用于电大复杂散射体求解。90年代以来, 随着计算机硬件和计算方法的发展, 计算电磁学取得了长足的进步。多层快速多极子方法(MLFMA)<sup>[2-10]</sup>使矩量法(MOM)应用于高频电磁散射成为可能, 其具有占用内存少和计算速度快的优

点。但每次计算只能得到一个频率点的RCS。而超宽带雷达的工作频率范围非常宽, 要求获得目标的宽带RCS。因此, 就必须应用MLFMA在给定频带内逐点计算, 当目标的RCS随着频率变化剧烈时, 必须以很小的频率间隔计算才能得到精确的频率响应, 这必将导致计算量十分巨大。因此, 如何快速获取复杂目标的宽带电磁散射特性具有重要意义。

最佳一致逼近是由俄国数学家切比雪夫提出, 具有良好的收敛性, 近年来广泛应用于天线阵列的设计和电磁场领域<sup>[11-14]</sup>。本文将其与MLFMA结合应用于目标电磁散射特性分析中, 通过坐标变换, 在给定的频带中计算出切比雪夫节点, 并应用MLFMA计算出这些节点处的表面电流, 然后通过最佳一致逼近快速计算出目标在该频带内任意频点的表面电流, 从而快速分析目标宽带电磁散射特性。计算结果表明在不影响精度的前提下, 该方法大大地提高了计算效率。

2008-12-05 收到, 2009-04-27 改回

国家自然科学基金(60771040)和教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-04-0950)资助课题

## 2 多层快速多极子方法(MLFMA)

快速多极子方法(FMM)的数学基础是矢量加法定理。利用加法定理对积分方程中的格林函数进行处理。通过在角谱空间中展开,利用平面波进行算子对角化,最终将密阵与向量的相乘计算转化为几个稀疏矩阵与向量的相乘计算。考虑理想导体的电场积分方程:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i = \hat{\mathbf{n}} \times \left[ \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_S \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') dS' \right] \quad (1)$$

其中并矢格林函数为

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2)$$

则由矩量法可知, 阻抗矩阵元素为

$$Z_{mn} = \int_S dS \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left[ \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_S \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \right] \quad (3)$$

应用加法定理, 可以得到并矢格林函数在角谱空间中的表达式:

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{jk}{4\pi} \int d^2\hat{\mathbf{k}} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) e^{-jk[(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{k}} + (r_j - r'_j) \cdot \hat{\mathbf{k}}]} \cdot T_L(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}) \quad (4)$$

$$T_L(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}) = \sum_{l=0}^L (-j)^l (2l+1) h_l^{(2)}(kr_{ij}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}) \quad (5)$$

其中  $h_l^{(2)}(kr_{ij})$  为第 2 类球汉克尔函数,  $P_l(\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})$  为勒让德函数。

由矢量关系可得

$$(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) = (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{jk}{4\pi} \int d^2\hat{\mathbf{k}} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot e^{-jk[(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{k}} + (r_j - r'_j) \cdot \hat{\mathbf{k}}]} T_L(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}) \quad (7)$$

将其代入阻抗矩阵元素表达式(3)并交换积分次序可得

$$Z_{mn} = \left( \frac{j\omega\mu}{4\pi} \right) \left( \frac{-jk}{4\pi} \right) \int d^2\hat{\mathbf{k}} \mathbf{V}_{sm}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot T_L(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}) \mathbf{V}_{fn}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (8)$$

$$\mathbf{V}_{sm}(\hat{\mathbf{k}}) = \int_S e^{-jk(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{k}}} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) dS \quad (9)$$

$$\mathbf{V}_{fn}(\hat{\mathbf{k}}) = \int_S e^{-jk(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_j) \cdot \hat{\mathbf{k}}} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' \quad (10)$$

则可将矩阵向量相乘重新写为

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n = \sum_{i \in B_i} \sum_{n \in G_i} Z_{mn} I_n + \left( \frac{j\omega\mu}{4\pi} \right) \left( \frac{-jk}{4\pi} \right) \int d^2\hat{\mathbf{k}} \mathbf{V}_{sm}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \sum_{i \notin B_i} T_L(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij}) \sum_{n \in G_i} \mathbf{V}_{fn}(\hat{\mathbf{k}}) I_n \quad (11)$$

式(11)中的远区场贡献最终分解为 3 项的乘积, 分别代表在 FMM 计算中的聚合、转移和配置过程。

多层快速多极子方法是快速多极子方法的多层扩展, 其采用多层分组方法, 远区电流之间的相互

作用采用逐层聚合、逐层转移、逐层配置、嵌套递推的方法进行计算。如果未知数的数目为  $N$ , 该方法的计算复杂度为  $O(N \log N)^{[15]}$ , 同快速多极子 ( $O(N^{1.5})$ ) 相比, 对于计算电大尺寸问题更为有效。

## 3 最佳一致逼近

为了获得目标的宽带 RCS, 必须应用多层快速多极子方法(MLFMA)在给定频带内逐点计算。为此将其与最佳一致逼近结合, 具体过程如下:

对于给定频带  $f \in [f_m, f_n]$ , 对应的波数  $k \in [k_m, k_n]$ , 先作坐标变换, 令

$$\tilde{k} = \frac{2k - (k_m + k_n)}{k_n - k_m} \quad (12)$$

则表面电流  $\mathbf{I}(k)$  可以表示如下:

$$\mathbf{I}(k) = \mathbf{I} \left( \frac{\tilde{k}(k_n - k_m) + (k_m + k_n)}{2} \right) \quad (13)$$

其中  $\tilde{k} \in [-1, 1]$ 。

设  $T_l(\tilde{k})$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) 为  $l$  阶切比雪夫多项式, 其定义如下:

$$T_0(\tilde{k}) = 1, \quad T_1(\tilde{k}) = \tilde{k} \quad (14)$$

$$T_{l+1} = 2\tilde{k}T_l(\tilde{k}) - T_{l-1}(\tilde{k}), \quad 2 \leq l \leq n \quad (15)$$

则  $\mathbf{I}(k)$  在  $[k_m, k_n]$  内的切比雪夫逼近为

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(k) &= \mathbf{I} \left( \frac{\tilde{k}(k_n - k_m) + (k_m + k_n)}{2} \right) \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} c_i T_i(\tilde{k}) - \frac{c_0}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

若  $\tilde{k}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为  $T_n(\tilde{k})$  ( $\tilde{k} \in [-1, 1]$ ) 的  $n$  个零点, 则

$$\tilde{k}_i = \cos \left( \frac{i - 0.5}{n} \pi \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

$$c_i = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{I}(k_i) T_i(\tilde{k}_i) \quad (18)$$

其中  $k_i$  为  $[k_m, k_n]$  中的切比雪夫节点, 且

$$k_i = \frac{\tilde{k}_i(k_n - k_m) + (k_m + k_n)}{2} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

对于目标电流  $\mathbf{I}(k)$  的最佳一致逼近, 可先求出  $T_n(\tilde{k})$  ( $\tilde{k} \in [-1, 1]$ ) 的  $n$  个零点  $\tilde{k}_i$ , 然后根据式(19), 求出  $\mathbf{I}(k)$  在  $[k_m, k_n]$  中的  $n$  个切比雪夫节点  $k_i$ , 再用多层快速多极子方法(MLFMA)求出电流  $\mathbf{I}(k_i)$ , 通过式(18)求出  $c_i$ , 最后由式(16)算出整个频带内的近似电流, 从而快速分析了目标的电磁散射特性。

## 4 数值结果

为了验证该方法的有效性, 给出了两个例子, 照射散射体的平面波均是沿  $-z$  方向传播,  $x$  方向极化, 计算的 RCS 为后向散射。首先考虑一个简易的

飞机模型如图1。该模型的主体圆柱半径为1.5 cm，长度为10 cm。圆柱上面的圆台的长度为3.6 cm，上低半径为0.2 cm。两翼之间的最大距离为10 cm。该模型被剖分成1194个三角面元，产生1761个未知数。计算频段为1 GHz~5 GHz。使用多层快速多极子逐点计算，步长为0.05 GHz，耗时为4043 s，使用最佳一致逼近( $n=9$ )结合多层快速多极子计算，耗时为554 s。计算结果比较如图2所示。

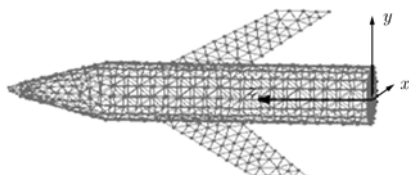


图1 简易飞机模型的剖分图

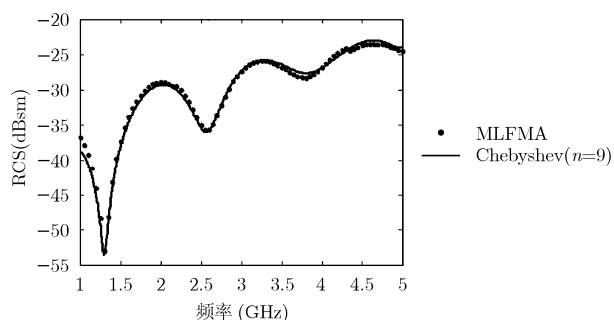


图2 飞机模型的单站 RCS 的频率响应

考虑一个更加复杂的模型，如图3所示，一个导弹模型的剖分图，该导弹总长为0.617 m，主体圆柱的半径为0.27 m，两翼间的距离为0.268 m。该模型被剖分成3092个三角面元，产生4638个未知数。计算频段为1 GHz~2 GHz。使用多层快速多极子逐点计算，步长为0.025 GHz，耗时为31908 s，使用最佳一致逼近( $n=10$ )结合多层快速多极子计算，耗时为8825 s。计算结果比较如图4所示。

## 5 结论

本文给出了一种快速分析目标宽带的电磁散射特性的方法—MLFMA 结合最佳一致逼近。通过坐标变换，求出给定频带内的切比雪夫节点和节点处的目标表面电流，实现了频带内任意频点表面电流的快速预测，从而快速求解了目标宽带 RCS。与传

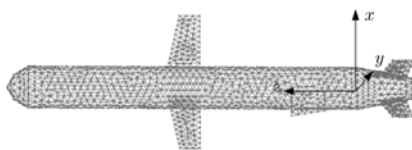


图3 导弹模型的剖分图

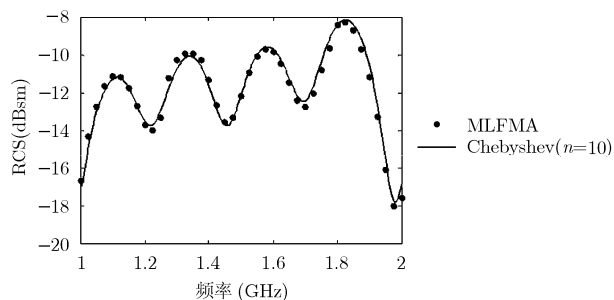


图4 导弹模型的单站 RCS 的频率响应

统的 MLFMA 进行了比较，结果表明该方法在不增加内存的情况下，大大地提高了计算效率。

## 参考文献

- [1] Harrington R F. 王尔杰等译. 计算电磁场的矩量法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1981: 1-109.
- [2] Song J M and Chew W C. Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering [J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 1995, 10(1): 14-19.
- [3] Lu Cai-Cheng and Chew W C. Fast far-field approximation for calculating the RCS of large objects [J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 1995, 8(5): 238-241.
- [4] Song J M, Lu C C, and Chew W C, et al.. Fast illinois solver code (FISC)[J]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 1998, 40(3): 27-34.
- [5] 胡俊, 聂在平, 王军, 等. 三维电大目标散射求解的多层快速多极子方法[J]. *电波科学学报*, 2004, 19(5): 509-514.  
Hu J, Nie Zai-ping, and Wang J, et al. Multilevel fast multipole algorithm for solving scattering from 3-D electrically large object [J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2004, 19(5): 509-514.
- [6] Wallén H, Järvenpää S, Ylä-Oijala P, and Sarvas J. Broadband Müller-MLFMA for electromagnetic scattering by dielectric objects[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2007, 55(5): 1423-1430.
- [7] Li Wei-Dong, Hong Wei, and Zhou Hou-Xing. An IE-ODDM-MLFMA scheme with DILU preconditioner for analysis of electromagnetic scattering from large complex objects[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2008, 56(5): 1368-1380.
- [8] Hamminen I and Sarvas J. Efficient evaluation of the Rokhlin translator in multilevel fast multipole algorithm[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2008, 56(8): 2356-2362.
- [9] Hu J, Nie Z, Lei L, and Tian L J. Fast solution of scattering from conducting structures by local MLFMA based on improved electric field integral equation[J]. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2008, 50(4):

- 940-945.
- [10] Ergul O and Gurel L. Efficient parallelization of the multilevel fast multipole algorithm for the solution of large-scale scattering problems[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2008, 56(8): 2335-2345.
- [11] Hernandez M A. Chebyshev's approximation algorithms and applications[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2001, 41(3-4): 433-455.
- [12] Abreu G T F and Kohno R. A modified Dolph-Chebyshev approach for the synthesis of low side lobe beam patterns with adjustable beam width [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2003, 51 (10): 3014-3017.
- [13] Raedt H D, Michielsen K, and Kole J S, *et al.* Solving the Maxwell equations by the Chebyshev method: A one-step finite-difference time-domain algorithm [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2003, 51(11): 3155-3160.
- [14] Chen M S, Wu X L, and Huang Z X, *et al.* Chebyshev approximation for fast frequency-sweep analysis of electromagnetic scattering problem [J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2006, 15(4): 736-738.
- [15] Chew W C, Jin J M, and Michielssen E, *et al.* Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics [M]. New York, Artech House Publishers, 2001: 39-65.
- 田 超: 男, 1984 年生, 硕士生, 研究方向为电磁场数值计算及其应用工作.
- 谢拥军: 男, 1968 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算微波与计算电磁学、微波通信、电磁兼容及电波传播特性等.
- 王元源: 男, 1983 年生, 博士生, 研究方向为电磁场数值计算、微波电路的分析与计算等.
- 蒋永辉: 男, 1979 年生, 硕士生, 研究方向为电磁场理论与数值计算.