第43卷 第10期 山东大学学报(理学版) 2008年10月
Vol.43 No.10 Journal of Shandong University(Natural Science) Oct. 2008

文章编号:1671-9352(2008)10-0031-05

蕴涵格的正规MP滤子与素滤子

胡明娣[1,3],楼志刚[2,3]

(1. 陕西师范大学数学研究所,陕西 西安 710062;
2. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院,陕西 西安 710048;
3. 安康学院数学系,陕西 安康 725000)

摘要:在蕴涵格上定义了MP-滤子、生成滤子、正规MP-滤子与素滤子的概念,研究了它们的特征性质,讨论了正规MP-滤子和MP-滤子之间的关系,得到正规MP-滤子是MP-滤子的结论,证明了蕴涵格的素滤子定理。它们是R_0-代数或MV-代数上相应滤子的性质的共同特征。

关键词:蕴涵格;正规MP-滤子;素滤子

中图分类号:O141.1;O153 **文献标志码**:A

Normal MP-filters and prime filters of an implication lattice

HU Ming-di[1,3], LOU Zhi-gang[2,3]

(1. Institute of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, Shaanxi, China;
2. School of Mechanical Instrumental Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, Shaanxi, China;
3. Department of Mathematics, Ankang College, Ankang 725000, Shaanxi, China)

Abstract: The concepts of MP-filters, generated filters, normal MP-filters and prime filters in implication lattice were introduced. Their basic properties were investigated, and the structure of generated filters was obtained. The results show that the normal MP-filters are MP-filters. All the results are the common characters of the corresponding filter theories of R_0-algebras or MV-algebras.

Key words: implication lattice; normal MP-filter; prime filter

0 引言

为了适应不同模糊推理的需要,逻辑学家和数学家们引入了不同的逻辑系统,与逻辑系统相配套的逻辑代数理论也获得了蓬勃的发展[1-6]。早在1999年王国俊教授为尝试给模糊推理建立相应的逻辑基础,在文献[7]中引进了蕴涵格,它是MTL代数的特殊形式,同时又是由C.C.Chang于1958年提出的与Lukasiewicz逻辑系统相配套的著名的多值逻辑代数的基础,也是王国俊教授于1997年提出的与一种形式演绎系统L^*相匹配的R_0-代数[4]的基础。因此,蕴涵格居于承上启下的地位,对它的深入研究具有重要意义。本文定义了蕴涵格并在其上给出了滤子、生成滤子、正规MP-滤子与素滤子的概念,研究了它们的特征性质,得到正规MP-滤子必是MP-滤子,最后证明了蕴涵格的素滤子定理。所得结果是R_0-代数或MV-代数上相应滤子的性质的共同特征。

收稿日期:2008-06-06
基金项目:国家自然科学基金(10771129);2006年安康学院科研基金(2006AKXY012)
作者简介:胡明娣(1970-),女,博士研究生,副教授,主要研究方向为人工智能、不确定推理.Email:humingdiwww@163.com
楼志刚(1973-),男,博士研究生,主要研究方向为机械故障智能检测.Email:louzg@163.com

1　蕴涵格及其性质

定义 1.1[1]　一个剩余格$(L,\wedge,\vee,\otimes,\to)$称为 MTL 代数，如果式(1.1)条件对$\forall a,b\in L$成立。

$$(a\to b)\vee(b\to a)=1。\tag{1.1}$$

定义 1.2[7]　设 M 是有界分配格(即有最大元 1 与最小元 0 的分配格)。如果

(ⅰ) M 上有逆序对合对应$\neg:M\to M$。

(ⅱ) M 上有二元运算$\to:M\times M\to M$，对任意 $a,b,c\in M$，若满足：(1) $1\to a=a$；(2) 若 $a\leqslant b\to c$，则 $b\leqslant a\to c$；(3) $\neg a\to\neg b=b\to a$；(4) $a\to x$ 关于 x 保非空有限交与有限并，则称 M 为蕴涵格。

命题 1.1　设 M 是蕴涵格，$a,b\in M$，则

(5) $a\to(b\to a)=1$；

(6) $a\to b=1$ 当且仅当 $a\leqslant b$；

(7) $\neg a\vee b\leqslant a\to b$；

(8) $a\vee b\to c\leqslant(a\to c)\wedge(b\to c)$，$a\wedge b\to c=(a\to c)\vee(b\to c)$；

(9) $(a\to b)\vee(b\to a)=1$；

(10) $a\to b\leqslant a\vee c\to b\vee c$，$a\to b\leqslant a\wedge c\to b\wedge c$；

(11) $a\vee b\leqslant(a\to b)\to b)\wedge(b\to a)\to a)$。

证明　(9) 式的证明如下：

由(4)知，$a\to b=a\to(a\wedge b)$，$b\to a=b\to(a\wedge b)$，所以由(8)得

$$(a\to b)\vee(b\to a)=(a\to a\wedge b)\vee(b\to a\wedge b)=a\wedge b\to a\wedge b=1$$

所以(9)成立。

(11)的证明如下：

由(5)得 $a\to((b\to a)\to a)=1$，再由(6)得 $a\leqslant(b\to a)\to a$，又由 $a\to b\leqslant a\to b$ 及定义 1.2(2)知 $a\leqslant(a\to b)\to b$，即 $a\leqslant(a\to b)\to b)\wedge(b\to a)\to a)$，同理 $b\leqslant(a\to b)\to b)\wedge(b\to a)\to a)$，即 $a\vee b\leqslant(a\to b)\to b)\wedge(b\to a)\to a)$。所以(11)得证。

命题 1.2　设 M 是蕴涵格，在 M 上引入一个新的运算$\otimes$如下：

$$a\otimes b=\neg(a\to\neg b),(a,b\in M)\tag{1.2}$$

(12) $(M,\otimes,1)$是以 1 为单位的交换半群；

(13) 若 $b\leqslant c$ 则 $a\otimes b\leqslant a\otimes c$，$a\otimes b\leqslant a\wedge b$；

(14) $(\otimes,\to)$是 M 上的伴随对，即，$a\otimes b\leqslant c$ 当且仅当 $a\leqslant b\to c$；

(15) $\neg a\otimes a=0$，$a\otimes b\to c=a\to(b\to c)$；

(16) $a\otimes(b\vee c)=(a\otimes b)\vee(a\otimes c)$；

(17) $a\otimes(a\to b)\leqslant b$；

(18) $a\vee(b\otimes c)\geqslant(a\vee b)\otimes(a\vee c)$。

证明　仅以(18)为例证明：由(13)和(16)得

$$(a\vee b)\otimes(a\vee c)=((a\vee b)\otimes a)\vee(a\vee b)\otimes c)=(a\vee a)\otimes(b\vee a)\otimes(a\vee c)\otimes(b\vee c)\leqslant a\vee a\vee a\vee(b\otimes c)=a\vee(b\otimes c)。$$

注 1.1　(ⅰ)由(9)、(12)和(14)可知蕴涵格是 MTL-代数，但反之不成立，比如 Gödel 代数(G 代数)是 MTL-代数，但它不是蕴涵格，因为(3)不成立。

(ⅱ) R_0-代数是蕴涵格，但反之不成立，见下面的例 1.1。

例 1.1　设 $M=\left\{0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right\}$，$M$ 按自然序构成有界分配格。规定 M 上的运算如下：① $\neg a=1-a$，② $a,b\in M$，$a\leqslant b$，$a\to b=1$；$1\to a=a$；$a\to 0=\neg a$；$\frac{4}{5}\to\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$，$\frac{4}{5}\to\frac{2}{5}=\frac{3}{5}\to\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$，$\frac{4}{5}\to\frac{3}{5}=$

$\frac{2}{5}\to\frac{1}{5}=\frac{4}{5},\frac{3}{5}\to\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$。

经检验可知, M 是蕴涵格,但 M 不满足条件: $(a\to b)\vee((a\to b)\to(\neg a\vee b))=1$,比如:令 $a=\frac{2}{5},b=\frac{1}{5}$,则 $(a\to b)\vee((a\to b)\to(\neg a\vee b))=\frac{4}{5}\vee\left(\frac{4}{5}\to\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}\neq 1$。从而 M 不是 R_0-代数。

2 蕴涵格的 MP-滤子、素滤子和正规 MP-滤子

2.1 基本概念

定义 2.1 设 M 是蕴涵格,$F\subseteq M$,称 F 是 M 的 MP-滤子,如果:

(ⅰ) $1\in F$; (ⅱ) 当 $x,x\to y\in F$ 时,有 $y\in F$。

如果 $F\neq M$,则称 F 是 M 的真 MP-滤子。M 的真 MP-滤子 F 为素 MP-滤子,如果 $\forall x,y\in M$,有 $x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$。

定义 2.2 设 M 是蕴涵格, $\Phi\neq F\subseteq M$,如果 F 满足(ⅰ)和

(ⅲ) $z\to(x\to y)\in F,z\in F$,则 $((\neg x\to\neg y)\to\neg y)\to\neg x\in F$,

则称 F 是 M 的正规 MP-滤子。

在例 1 中,容易验证蕴涵格 M 中,$F=\left\{\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right\}$是一个正规 MP-滤子。

命题 2.1 蕴涵格 M 的一个 MP-滤子 F 是正规的 MP-滤子的充要条件是

$$\forall x,y\in M,x\to y\in F\Rightarrow((\neg x\to\neg y)\to\neg y)\to\neg x\in F。\tag{2.1}$$

证明 设 F 是 M 的正规 MP-滤子,在(ⅲ)里令 $z=1$,则有 $x\to y\in F\Rightarrow((\neg x\to\neg y)\to\neg y)\to\neg x\in F$。

另一方面, 设 $z\to(x\to y)\in F,z\in F$。由 F 是 MP-滤子知 $(x\to y)\in F$。再由已知条件知 $\forall x,y\in M$, $x\to y\in F\Rightarrow((y\to x)\to\neg y)\to\neg x\in F$。即(ⅲ)成立,因此 F 是正规的 MP-滤子。

命题 2.2 正规 MP-滤子必是 MP-滤子。

证明 设 F 是正规 MP-滤子,若 $x\in F,x\to y\in F$,则 $x\to(1\to y)\in F$。则由定义 2.1.2 知 $((\neg 1\to\neg y)\to\neg y)\to\neg 1=((0\to\neg y)\to\neg y)\to 0=y\in F$。从而 F 是 MP-滤子。

命题 2.3 设 $F\subset M$,则 F 是 MP-滤子当且仅当 $F\neq\emptyset$,F 是上集,即当 $a\in F,b\geqslant a$ 时 $b\in F$,且 F 对$\otimes$运算封闭。

证明 充分性:当 $a\in F,a\to b\in F$ 时,$a\otimes(a\to b)\in F$,再由(17)和 F 是上集得 $b\in F$,所以 F 是 MP-滤子。

必要性:F 是 MP-滤子,因 $a\in F,b\geqslant a$ 时,$a\to b=1\in F$,所以 $b\in F$。对 $a,b\in F$,$a\to(b\to a\otimes b)=a\otimes b\to a\otimes b=1\in F$,所以 $a\otimes b\in F$。

下文中,用 M 表示蕴涵格,把 MP-滤子简称为滤子,M 的全体滤子之集记为 $F(M)$,全体素滤子 $P(M)$。

2.2 蕴涵格的生成滤子及其性质

设 $A\subset M$,则所有包含 A 的滤子之交显然是包含 A 的最小滤子,称为由 A 生成的滤子,记作$[A)$。显然

$$[A)=\bigcap\{F\mid A\subset F,F\in F(M)\}。\tag{2.2}$$

命题 2.4 设 A 是蕴涵格的一个非空子集,则$[A)=\{x\in M\mid$存在,$n\in N$ 和 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$ 使$a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_n\leqslant x\}$。$A=\{a\}$时把$[\{a\})$简记为$[a)$,则

$$[a)=\{x\in M\mid 存在\ n\in N\ 使\ a^n\leqslant x\}。\tag{2.3}$$

推论 2.1 设 F 是蕴涵格 M 的滤子及 $a\in M$,则

$$[F\cup\{a\})=\{x\in M\mid(s_1\otimes a^{n_1})\otimes\cdots\otimes(s_m\otimes a^{n_m})\leqslant x,m\geqslant 1,n_1,\cdots,n_m\geqslant 0,s_1,\cdots,s_m\in F\}。\tag{2.4}$$

命题 2.5 设 $A,B\subset M$,则有

① 若 $A\subset B$,则$[A)\subset[B)$; ②若 $x\leqslant y$,则$[y)\subset[x)$; ③ 若 $A\in F(M)$,$a\in M$,$[a)\subset A$ 当且仅当 $a\in A$; ④ 若 $A,B\in F(M)$,则 $A\cap B\in F(M)$; ⑤ 若 $A,B\in F(M)$,则$[A\cup B)=\{x\in M\mid$存在 $a\in A$ 和$b\in B$ 使$a\otimes b\leqslant x\}$。

证明 易证①~④,下证⑤。令$\{x\in M\mid$存在 $a\in A$ 和$b\in B$ 使$a\otimes b\leqslant x\}=Z$,则 Z 是滤子。事实上,由 $1\in A$且 $1\in B$ 得到 $1\in Z$。设 $x,x\to y\in Z$,则存在 $a_1,a_2\in A,b_1,b_2\in B$ 使得$a_1\otimes b_1\leqslant x$,$a_2\otimes b_2\leqslant x\to y$。由$\otimes$的可交换性和结合性以及(17)得:

$$(a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)=(a_1\otimes a_2)\otimes(b_1\otimes b_2)\leqslant x\otimes(x\to y)\leqslant y。$$

又因为,$a_1\otimes a_2\in A$,$b_1\otimes b_2\in B$,所以 $y\in Z$,即 Z 是滤子。

再证 Z 是包含A,B 的最小滤子。设 F 是任一包含A,B 的滤子,任取 $x\in Z$,则存在 $a\in A\subset F$,$b\in B\subset F$ 使 $a\otimes b\leqslant x$,由 F 是上集且对$\otimes$运算封闭知 $x\in F$,即 $Z\subset F$,即 Z 是包含 A,B 的最小滤子。

命题 2.6 在 $F(M)$中引入 2 个运算$\overline{\wedge}$与$\overline{\vee}$如下:

$$F_1\,\overline{\wedge}\,F_2=F_1\cap F_2,\ F_1\,\overline{\vee}\,F_2=[F_1\cup F_2),\ \forall F_1,F_2\in F,\tag{2.5}$$

则$(F(M),\subset,\overline{\wedge},\overline{\vee},\{1\},M)$是有界分配格。

证明 显然它是有界格,现证明它是分配格。

在任一格中 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$与 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$是等价的,故只需证明 $F_1\,\overline{\wedge}(F_2\,\overline{\vee}\,F_3)=(F_1\,\overline{\wedge}\,F_2)\overline{\vee}(F_1\,\overline{\wedge}\,F_3)$即

$$F_1\cap[F_2\cup F_3)=(F_1\cap F_2)\overline{\vee}(F_1\cap F_3)=[(F_1\cap F_2)\cup(F_1\cap F_3))=[F_1\cap(F_2\cup F_3))$$

显然$[F_1\cap(F_2\cup F_3))\subset F_1\cap[F_2\cup F_3)$。下证 $F_1\cap[F_2\cup F_3)\subset[F_1\cap(F_2\cup F_3))$为证明方便,只需证明$F_1\cap[F_2\cup F_3)\subset[(F_1\cap F_2)\cup(F_1\cap F_3))$,任取 $x\in F_1\cap[F_2\cup F_3)$,则 $x\in F_1$ 且 $x\in[F_2\cup F_3)$,由 $x\in[F_2\cup F_3)$可知,存在 $a\in F_2$,$b\in F_3$ 使 $a\otimes b\leqslant x$,由滤子 $F_1\cap F_2$,$F_1\cap F_3$ 是上集知 $x\vee a\in F_1\cap F_2$,$x\vee b\in F_1\cap F_3$,又$(a\vee x)\otimes(b\vee x)=(a\otimes b)\vee(x\otimes b)\vee((a\vee x)\otimes x)\leqslant x$,于是 $x\in[(F_1\cap F_2)\cup(F_1\cap F_3))=[F_1\cap(F_2\cup F_3))$。

命题 2.7 设 F 是蕴涵格M 的滤子及$a,b\in M$,则

$$[F\cup\{a\})\cap[F\cup\{b\})=[F\cup\{a\vee b\})。\tag{2.6}$$

证明 设 $x\in[F\cup\{a\})\cap[F\cup\{b\})$,则存在 $n_1,\cdots,n_m,l_1,\cdots,l_k\geqslant 0$,$s_1,\cdots,s_m,t_1,\cdots t_k\in F$,使得

$$(s_1\otimes a^{n_1})\otimes\cdots\otimes(s_m\otimes a^{n_m})\leqslant x,\ (t_1\otimes b^{l_1})\otimes\cdots\otimes(t_k\otimes b^{l_k})\leqslant x。$$

令 $h=s_1\otimes\cdots\otimes s_m\otimes t_1\otimes\cdots\otimes t_k$,$g=\max\{n_1,\cdots,n_m,l_1,\cdots,l_k\}$,则$(h\otimes a^g)^m\leqslant x$,$(h\otimes b^g)^k\leqslant x$,于是由(18)得

$$x\geqslant(h\otimes a^g)^m\vee(h\otimes b^g)^k\geqslant((h\otimes a^g)^m\vee(h\otimes b^g))^k\geqslant((h\otimes a^g)\vee(h\otimes b^g))^{mk}=$$
$$(h\otimes(a^g\vee b^g))^{mk}\geqslant(h\otimes(a\vee b)^{g^2})^{mk},$$

所以 $x\in[F\cup\{a\vee b\})$。因此,$[F\cup\{a\})\cap[F\cup\{b\})\subset[F\cup\{a\vee b\})$;反包含易证。

推论 2.2 设 $x,y\in M$,则$[x)\overline{\vee}[y)=[x\wedge y)$,$[x\vee y)=[x)\overline{\wedge}[y)$。

定理 2.1 F 是M 的 MP-滤子,则 F 是素的当且仅当$\forall x,y\in M$,当 $x\vee y\in F$,有 $x\in F$ 或$y\in F$。

证明 充分性: $\forall x,y\in M$,由(9)$(x\to y)\vee(y\to x)=1\in F$,由题设 $x\to y\in F$ 或$y\to x\in F$,这说明,F 是M 的素 MP-滤子。

必要性:设 F 是M 的素 MP-滤子,且 $x\vee y\in F(\forall x,y\in M)$。因为 F 是素滤子,则 $x\to y\in F$ 或$y\to x\in F$,由(11)知 $x\vee y\leqslant(x\to y)\to y$,再由滤子是上集可得$(x\to y)\to y\in F$,若$(x\to y)\in F$,则 $y\in F$;若$(y\to x)\in F$,由$x\vee y\leqslant(y\to x)\to x$ 可得$x\in F$。

2.3 蕴涵格的素滤子定理

命题 2.8 设 F 是M 的真滤子,则以下各式彼此等价:

① F 是素滤子;

② $\forall F_1, F_2 \in F(M)$,若 $F_1 \cap F_2 \subset F$,则 $F_1 \subset F$ 或 $F_2 \subset F$;

③ $\forall x, y \in M$,若 $[x) \cap [y) \subset F$,则 $x \in F$ 或 $y \in F$。

证明　① 推②设 $F_1 \cap F_2 \subset F$, $F_1, F_2 \in F(M)$。若 $F_1 \not\subset F$ 且 $F_2 \not\subset F$,则存在 $x \in F_1 - F$, $y \in F_2 - F$,由推论 2.2 知 $[x \vee y) = [x) \overline{\wedge} [y) = ([x) \cap [y)) \subset F_1 \cap F_2 \subset F$,又因为 F 是素滤子,由定理 2.1 知,当 $x \vee y \in F$,有 $y \in F$ 或 $x \in F$,矛盾! 所以 $F_1 \subset F$ 或 $F_2 \subset F$。

② 推③显然。

③ 推①设 $x \vee y \in F$,则由命题 2.5③和推论 2.2 知 $[x \vee y) = [x) \cap [y) \subset F$,而又由题设得到 $x \in F$ 或 $y \in F$,即 F 是素滤子。

推论 2.3　设 F 是 M 的素滤子,则

① 若 F_1 是 M 的真滤子,且 $F \subset F_1$,则 F_1 也是 M 的素滤子。

② 若 $\{F_i\}_{i \in I}$ 是 $F(M)$ 的子集族,且 $\{F_i \mid F \subset F_i\}_{i \in I}$ 则 $\{F_i\}_{i \in I}$ 是链。

定理 2.2 (蕴涵格的素滤子定理)　设 F 是 M 的一个滤子, S 是 M 的一个对 $\vee$ 运算封闭的非空子集且 $S \cap F = \emptyset$,则存在 M 的一个素滤子 P 使得 $F \subset P$ 且 $S \cap P = \emptyset$。

证明　令 $\Omega = \{J \in F(M) \mid F \subset J, J \cap S = \emptyset\}$。显然 $\Omega \neq \emptyset$,若 $\{J_i\}_{i \in I}$ 为一族 Ω 中的集合,由推论 2.3 知 $\{J_i\}_{i \in I}$ 为链,则 $\bigcup_{i \in I} J_i \in F(M)$ 且 $\bigcup_{i \in I} J_i \cap S = \emptyset$(事实上, $1 \in \bigcup_{i \in I} J_i$,且若 $a, a \to b \in \bigcup_{i \in I} J_i$,则 $b \in \bigcup_{i \in I} J_i$;假设 $\bigcup_{i \in I} J_i \cap S \neq \emptyset$ 则存在 $a \in \bigcup_{i \in I} J_i$,即 $a \in J_{i_0}$ 且 $a \in S$,矛盾!),所以 $\bigcup_{i \in I} J_i \in \Omega$。$\Omega$ 满足 Zorn 引理,所以 Ω 有一个极大元 P。

下证 P 为素滤子。事实上,假设 P 不为素滤子,则存在 $x, y \in M$,虽然 $x \vee y \in P$,但 $x \notin P$ 且 $y \notin P$,从而 $[P \cup \{x\}) \wedge S \neq \emptyset$, $[P \cup \{y\}) \wedge S \neq \emptyset$, 任取 $a \in [P \cup \{x\}) \wedge S$, $b \in [P \cup \{y\}) \wedge S$ 则 $a \vee b \in S$ 且 $a \vee b \in [P \cup \{x\}) \cap [P \cup \{y\}) = P$,矛盾!

推论 2.4　在 M 中,以下性质成立

① 设 $x \in M$, $x \neq 1$,则有 M 中的素滤子 P 使 $x \notin P$。

② 设 $F \in F(M)$,则存在素滤子 P 使得 $F \subset P$。

③ M 的每个真滤子都是素滤子之交。

参考文献:

[1] ESTEVA F, GÖDO L. Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124: 271-288.

[2] GOTTWALD S. A treatise on many-valued logics[M]. Baldock: Research Studies Press LTD, 2001.

[3] HÁJEK P. Metamathematics of fuzzy logic[M]. Dordrecht: Kluwer, 1998.

[4] 王国俊.模糊命题演算的一种形式演绎系统[J].科学通报, 1997, 42(10):1041-1045.

[5] PAVELKA J. On fuzzy logic (Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ)[J]. Z Math Logik Grund Math, 1979, 25: 45-52;119-134; 447-464.

[6] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京:科学出版社 2000.

[7] 王国俊.蕴涵格及其 Fuzzy 拓扑表现定理[J].数学学报,1999,42(1):133-140.

(编辑:孙培芹)