第 44 卷 第 10 期 Vol.44 No.10
山东大学学报(理学版) Journal of Shandong University(Natural Science)
2009 年 10 月 Oct. 2009

文章编号:1671-9352(2009)10-0087-04

有限群中的 q-补及其应用

刘晓蕾[1],王燕鸣[2]

(1. 山西财经大学应用数学系,太原 030006; 2. 中山大学岭南学院数学与科学计算学院,广州 510275)

摘要:定义了 q-补,研究了有限群的结构和性质,给出了有限群是超可解群或 p-幂零的充分条件。

关键词:有限群; q-补;超可解;p-幂零

中图分类号: O152 **文献标志码**:A

q-supplement in finite groups and its applications

LIU Xiao-lei[1], WANG Yan-ming[2]

(1. Deptartment of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, Shanxi, China;
2. Lingnan College and School of Math, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Finite groups are investigated in terms of q-supplement, some sufficient conditions on supersolubility and p-nilpotence of finite groups are obtained.

Key words: finite group; q-supplement; supersoluble; p-nilpotent

0 引言

本文中,G 指有限群,H_G 指 H 在 G 中的核,H_{qG} 指 G 的含于 H 的最大 s-拟正规子群,$\pi(G)$ 指 $|G|$ 的素因子集。

补(supplement)在有限群中是一个有用的概念。1954 年, Huppert 实际上证明了:一个有限群超可解的必要条件是其每一个极大子群有一个素数幂阶的循环补[1]。1965 年, Kegel 则证明了:每一个极大子群有一个素数幂阶的循环补的有限群是可解的[2]。在[3]中, Baumeister 给出了关于补的若干定理。但是,由于条件相当弱,利用补不能得到更好的结论。于是,人们希望给补附加一些条件,得到有限群的更多信息。在[4-5]中,定义了 c-补(c-supplement):设 H 是 G 的一个子群,如果存在 G 的一个子群 K 使得 $G=HK$,且 $H\cap K\leqslant H_G$,那么,称 H 在 G 中被 c-补。我们注意到,s-拟正规(s-quasinormal)性是正规性的一个推广。在本文中,我们以 s-拟正规性取代正规性,得到了 c-补一个推广,即所谓的 q-补。

先回顾一个术语。设 G 是一个有限群,H 是 G 的一个子群。如果 H 与 G 个每一个 Sylow 子群的乘积是一个群,那么称 H 在 G 中是 s-拟正规的。

1 结果与证明

定义 设 G 是一个有限群,H 是 G 的一个子群。如果存在 G 的一个子群 K 使得 $G=HK$,且 $H\cap K\leqslant$

收稿日期:2008-11-28
基金项目:山西省高等学校科技研究开发项目(200811005)
作者简介:刘晓蕾(1963-),男,副教授,从事代数学研究.Email:lxlljh@163.com

H_{qG},则称 K 是 H 在 G 中的一个 q-补,并称 H 在 G 中有一个 q-补。

注 1 由于 s-拟正规子群仍然生成一个 s-拟正规子群,故上述定义是有意义的。

注 2 正规子群当然是 s-拟正规子群,但反过来不成立。因此,c-补意味着 q-补。反过来,下面例子表明,q-补不必意味着 c-补:

例[6] 设 p 是一个奇素数,E 是一个以 $e_1,\cdots,e_{p+1}$ 为基的初等交换 p-群。令

$$G=\langle E,x,y\mid x^{p^2}=e_{p+1},x^{-1}e_ix=e_ie_{i+1},i=1,\cdots,p,y^{p^2}=1,y^{-1}xy=x^{1+p},$$
$$y^{-1}e_1y=e_1e_p^{-1},y^{-1}e_iy=e_i,i=2,\cdots,p+1\rangle,$$

那么,$|G|=p^{p+5}$。再令 $Q=\langle e_1,\cdots,e_p,y\rangle$,那么 $Q'=\langle e_p\rangle>1$,因而 $\Phi(Q)>1$。Thompson[6]证明了 Q 是 G 的无核拟正规子群。取 $\Phi(Q)$ 的一个子群 A,那么 A 当然是 G 的一个无核子群。因 A 是 s-拟正规的,故 A 在 G 中有一个 q-补。下面证明 A 在 G 中没有 c-补。

假设 A 在 G 中有一个 c-补 K,那么,K 是 G 的真子群。现在,由于 A 含于 $\Phi(Q)$,故 $Q=Q\cap G=Q\cap AK=A(Q\cap K)=Q\cap K$。这表明,$Q\leqslant K$。因此,$A\leqslant Q\leqslant K$,这导致 $G=AK=K$,与 $K<G$ 矛盾。

此例表明,q-补是 c-补的真推广。

注 3 如果 $\langle x\rangle$ 在 G 中有一个 c-补,我们也称 x 在 G 中有一个 c-补。

引理 1.1 设 H 是 G 的一个子群。那么,下述结论成立:

(1) 假设 $H\leqslant M\leqslant G$。如果 H 在 G 中有一个 q-补 K,那么,$K\cap M$ 是 H 在 M 中的一个 q-补。

(2) 如果 N 是 H 的子群,且在 G 中正规,那么,H/N 在 G/N 中有 q-补的充要条件是 H 在 G 中有 q-补。

(3) 设 π 是一个素数集,N 是 G 的一个 π'-正规子群。如果 H 是一个 π-群,且在 G 中有一个 q-补,那么,HN/N 在 G/N 中有一个 q-补。

(4) 如果 P 是 G 的一个 Sylow p-子群,那么 $P_{qG}=P_G$。

证明 (1) 显然,如果 $N\leqslant M$,且 N 在 G 中是 s-拟正规的,那么,N 在 M 中是 s-拟正规的[7, Theorem 6.1(b)]。

假设 K 是 H 在 G 中的一个 q-补。据上所述,有 $H_{qG}\leqslant H_{qM}$,因此,

$$M=M\cap G=M\cap HK=H(M\cap K),$$
$$H\cap(M\cap K)=H\cap K\cap M\leqslant H_{qG}\cap M=H_{qG}\leqslant H_{qM}。$$

(2) 设 H/N 在 G/N 中有一个 q-补 K/N,那么,由于 $N\leqslant H_{qG}$,$H/N\cap K/N\leqslant(H/N)_{q(G/N)}\leqslant H_{qG}/N$。因此,$K$ 是 H 在 G 中的一个 q-补。

现设 K 是 H 在 G 中的一个 q-补。那么 $G=HK$,且 $H\cap K\leqslant H_{qG}$。显然 $N\leqslant H_{qG}$。因而,

$$G/N=HK/N=(H/N)(KN/N),$$

且
$$(H/N)\cap(KN/N)=(H\cap KN)/N=(H\cap K)N/N\leqslant H_{qG}/N\leqslant(H/N)_{qG}。$$

(3) 设 $G=HK$,$H\cap K\leqslant H_{qG}$。由于 N 在 G 中正规,容易证明 $N\leqslant K$。因此 $G/N=(HN/N)(K/N)$,且

$$(HN/N)\cap(K/N)=(HN\cap K)/N=(H\cap K)N/N\leqslant H_{qG}N/N\leqslant(HN/N)_{q(G/N)}。$$

(4) 显然 $P_G\leqslant P_{qG}$。另一方面,如果假设 Q 是 G 的 Sylow p-子群,由于 P_{qG} 在 G 中是 s-拟正规的,那么 $P_{qG}Q=Q$。进而 $P_{qG}\leqslant Q$。这样,$P_{qG}\leqslant O_p(G)\leqslant P_G$。因此,$P_G=P_{qG}$。

引理 1.2 设 $p\in\pi(G)$,$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$。如果 P 在 G 中有一个 q-补,那么 G 有一个 p'-Hall 子群。

证明 假设 $G=PK_1$,$P\cap K_1\leqslant P_{qG}$。设 $K=K_1P_G$,那么,$G=PK$。由于根据引理 1.1(4),$P_{qG}=P_G$,故有 $P\cap K=P_G$ 且 $P_G\in \mathrm{Syl}_p(K)$。由 Schur-Zassenhaus 定理知,P_G 在 K 中有一个 p'-Hall 子群 $K_{p'}$。显然,$K_{p'}$ 也是 G 的 p'-Hall 子群。

推论 G 是可解群的充要条件是 G 的每一个 Sylow 子群在 G 中有一个 q-补。

证明 由引理 1.2 及 P. Hall 的一个定理[8]即得。

定理 1.1 设 $p=\min\pi(G)$。如果每一个 p 阶元和每一个 4 阶元均在 G 中有 q-补,那么,G 是 p-幂零的。

证明 只证明 $q=2$ 的情形。对 $q>2$ 的情形,证法相同。

设定理不真,取 G 是一个极小反例。由于条件是子群遗传的,故 G 是一个极小非 2-幂零群。进而 G 是

一个极小非幂零群。设 $Q\in \mathrm{Syl}_2(G)$, $P\in \mathrm{Syl}_p(G)(p\neq 2)$。那么, Q 在 G 中正规, P 不正规, $G=PQ$, $\exp Q=2$ 或 4,且 P 是一个循环群。

设 x 是一个 2 阶元。假设 $\langle x\rangle$ 在 G 中不是 s-拟正规的。由题设,存在 L 使得 $G=\langle x\rangle L$,且 $\langle x\rangle\cap L\leqslant\langle x\rangle_{qG}$。显然 $L<G$。故 $|G:L|=|\langle x\rangle L:L|=2$,因而 L 在 G 中正规。由于 G 是一个极小非幂零群, 故 L 是 G 的一个幂零子群。因而, $L_p(\in \mathrm{Syl}_p(L))$ 是 L 的一个特征子群,进而在 G 中正规。显然, $L_p\in \mathrm{Syl}_p(G)$, 矛盾。这样 G 中每一个 2 阶元在 G 中是 s-拟正规的。如果 $\exp Q=2$, 那么 Q 中每一个元均是 2 阶的。假设 y 是 Q 中一个 2 阶元,那么, $\langle y\rangle P\leqslant Q$。易知, $\langle y\rangle P\leqslant G$ 是 2-幂零的。故 y 正规化 P,进而 Q 正规化 P, 矛盾。故 $\exp Q=4$。

根据[9, Ⅲ, 5], $1<\Phi(Q)\leqslant\Phi(G)\leqslant Z(G)$,且 $\Phi(Q)(=Z(Q))$ 是一个初等交换 2-群。设 $a(\neq 1)\in\Phi(Q)$,那么, $\langle a\rangle$ 在 G 中正规,因而含于 G 的每一个极大子群中。设 $x\langle a\rangle$ 是 $G/\langle a\rangle$ 中一个 2 阶元, 那么, $x^2\in\langle a\rangle$。因此, $|x|=4$ 或 2。如果 $|x|=2$, 那么 $x\langle a\rangle$ 在 $G/\langle a\rangle$ 中有一个 q-补,因为 x 在 G 中是 s-拟正规的。如果 $|x|=4$, 那么, $\langle x\rangle\geqslant\langle a\rangle$。由题设及引理 1.1, $x\langle a\rangle$ 在 $G/\langle a\rangle$ 中有一个 q-补。

设 $y\langle a\rangle$ 是 $G/\langle a\rangle$ 中一个 4 阶元素。由于 $\exp Q=4$, 故 $|y|=4$。由题设,存在 G 的一个子群 T,使得 $G=\langle y\rangle T$,且 $\langle y\rangle\cap T\leqslant\langle y\rangle_{qG}$。假设 T 不是 G 的极大子群。那么, $T=G$ 或存在 G 的一个极大子群 M,使得 $T<M$,且 $|G:M|=2$。如果 $T=G$,则有 $\langle y\rangle=\langle y\rangle_{qG}$。因而 $y\langle a\rangle$ 在 $G/\langle a\rangle$ 中有一个 q-补。如果存在 G 的极大子群 M,使得 $T<M$,那么 $|G:M|=2$, 因而 M 在 G 中正规。由于 M 是 G 的幂零子群,故 $M_p(\in \mathrm{Syl}_p(M))$ 是 M 的一个特征子群,进而是 G 的一个正规子群。显然, $M_p(\in \mathrm{Syl}_p(G))$, 矛盾。因而 T 是 G 的一个极大子群。显然 $\langle a\rangle\leqslant T$。于是, $G/\langle a\rangle=(\langle y\rangle\langle a\rangle/\langle a\rangle)(T/\langle a\rangle)$。又,

$$(y)\langle a\rangle/\langle a\rangle\cap(T/\langle a\rangle)=(\langle y\rangle\langle a\rangle\cap T)/\langle a\rangle=$$
$$(\langle y\rangle\cap T)\langle a\rangle/\langle a\rangle\leqslant\langle y\rangle_{qG}\langle a\rangle/\langle a\rangle\leqslant\langle y\langle a\rangle/\langle a\rangle\rangle_{q(G/\langle a\rangle)}。$$

这表明, $y\langle a\rangle$ 在 $G/\langle a\rangle$ 中有一个 q-补。根据 $|G|$ 的极小性, $G/\langle a\rangle$ 是 2-幂零的。但是, $G/\langle a\rangle$ 是 p-幂零的,进而 $G/\langle a\rangle$ 是幂零的。由于 $\langle a\rangle\leqslant Z(G)$,故 G 本身是幂零的,矛盾。

下面,对一个群 K,记 $P^*(K)=\{x\mid x\in K,|x|$ 是素数$\}\cup\{x\mid x\in K,|x|=4\}$。

定理 1.2　设 k 是群 G 的一个正规子群,且使得 G/K 超可解。如果 $P^*(K)$ 中每一个元在 G 中有一个 q-补,那么, G 是超可解的。

证明　假设定理不真, G 是一个关于 $|G|+|K|$ 的极小反例。那么 $P^*(K)$ 不是空集,且其中每一个元素在 G 中有一个 q-补。进一步,还有:

(1) G 是一个极小非超可解群, $G=PR$, $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, R 是 G 的一个 p'-Hall 子群, P 在 G 中正规, $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群, $\exp P=p$ 或 4, P 不是循环的。

设 M 是 G 的一个极大子群。由于 MK/K 是 G/K 的一个子群,且根据假设 G/K 是超可解的,故 MK/K 是超可解的。另一方面,由于 MK/K 同构于 $M/M\cap K$,而根据引理 1.1, $P^*(M\cap K)\leqslant P^*(K)$,故 $P^*(M\cap K)$ 中每一个元素在 M 中有一个 q-补,这表明根据 G 的极小性, M 是超可解的,矛盾。因此 G 是一个极小非超可解群。由[10, Satz 1]即得(1)中其他结论。

(2) $K=P$。

根据(1), G/P(同构于 R)是超可解的。由于 $G/(P\cap K)$ 同构于 $G/P\times G/K$, 故 $G/(P\cap K)$ 超可解。显然 $P^*(P\cap K)$ 中每一个元素在 G 中有一个 q-补。故 $K=P\cap K$, 即, 根据 G 的选择 $K\leqslant P$。由于 $K\Phi(P)/\Phi(P)$ 在 $G/\Phi(P)$ 中正规,而 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的一个极小正规子群,故或者 $K=P$,或者 $K\leqslant\Phi(P)$。但 $K\leqslant\Phi(P)$ 意味着 $K\leqslant\Phi(G)$, 这导致 G 的超可解性, 矛盾。故 $K=P$。

(3) $\Phi(P)>1$。

假设 $\Phi(P)=1$。那么, P 是一个初等交换群。因而 $P-\{1\}$ 包含于 $P^*(K)$。设 $1\neq x\in P$。根据假设,存在一个子群 M,使得 $G=\langle x\rangle M$,且 $\langle x\rangle\cap M\leqslant\langle x\rangle_{qG}$。于是 $P=P\cap\langle x\rangle M=\langle x\rangle(P\cap M)$。由于 $P\cap M$ 在 M 中正规,而 P 是交换的,故 $P\cap M$ 也在 G 中正规。根据(1),如果 $\Phi(P)=1$,那么 P 是 G 的一个极小正规子群。因此, $P\cap M=1$,或者 $P\leqslant M$。如果 $P\cap M=1$, 那么 $\langle x\rangle\cap M=1$。由于 $G=\langle x\rangle M=PM$, 故 $P=\langle x\rangle$, 与(1)矛盾。如果 $P\leqslant M$, 那么 $\langle x\rangle\leqslant M$, 且 $\langle x\rangle=\langle x\rangle\cap M\leqslant\langle x\rangle_{qG}$, 这意味着 $\langle x\rangle$ 在 G 中是 s-拟正规

的。根据[7,Lemma 5.5],$R\leqslant N_G\langle x\rangle$。再利用 P 的交换性,$\langle x\rangle$在 G 中正规,由 P 的极小性得 $P=\langle x\rangle$,矛盾。

(4) $p=2$,且 G 是一个极小非幂零群。

设 $p>2$,且 $x\in P\setminus\Phi(P)$,那么,存在一个子群 M 使得 $G=\langle x\rangle M$,且$\langle x\rangle\cap M\leqslant\langle x\rangle_{qG}$。由于 $p>2$,故根据(1)得 $\exp P=p$。因此$\langle x\rangle_{qG}=1$,或者$\langle x\rangle$。设$\langle x\rangle_{qG}=\langle x\rangle$,那么$\langle x\rangle$在 G 中是 s-拟正规的。由于 $P/\Phi(P)$是 $G/\Phi(P)$的一个极小正规子群,故$\langle x\rangle^G=P$。由于 $G/\langle x\rangle^G=G/P$ 超可解,故由[7,Theorem 5.6],G 是超可解的,矛盾。于是$\langle x\rangle\cap M=1$。这表明,$P/\Phi(P)$的每一个极小 p-子群在 $G/\Phi(P)$中有一个 q-补。根据 G 的选择,$G/\Phi(P)$是超可解的,进而 G 是超可解的,矛盾。故 $p=2$。

由于 G 是一个极小非超可解群,故 G 的每一个真子群是超可解的,因而有 Sylow 塔。令 $q=\max\pi(G)$,取 $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$。因而 $p=2,q>2,P\cap Q=1$。

假设 Q 在 G 中正规。由于 G/P 和 G/Q 均是超可解的,而 G 同构于 $G/P\times G/Q$ 的一个子群,故 G 超可解,矛盾。因此,Q 在 G 中不是正规的。由于超可解群有 Sylow 塔,故 G 的正规子群有正规的 Sylow q-子群。容易看到,G 是一个极小非幂零群。

(5) 根据[9,Ⅲ,5],$\exp P=4$,$\Phi(P)(=Z(P)=P')$是一个初等交换 2-群。故 P 可以由 4 阶元生成。

(6) 最后的矛盾。

设 x 是 P 中一个 4 阶元,那么,x 不含于 $\Phi(P)$。由题设,存在一个子群 M 使得 $G=\langle x\rangle M$,且$\langle x\rangle\cap M\leqslant\langle x\rangle_{qG}$。因此有:

(a) $|G:M|\neq2$。

如果$|G:M|=2$,那么 M 在 G 中正规。因此 $P=K\leqslant M$。特别地,$\langle x\rangle\leqslant M$。于是 $G=M$,矛盾。

(b) $|G:M|\neq4$。

假设$|G:M|=4$。那么$\langle x\rangle\cap M=1$。根据(1),$P/\Phi(P)$是 $G/\Phi(P)$的极小正规子群。因此,对任意 $y\in P,y^2\in\Phi(P)$。

如果 M 是 G 的一个极大子群,那么,由于 $x^2\in\Phi(P)\setminus M$,故 $G=\Phi(P)M=\Phi(G)M=M$,矛盾。

因此,可以假设 $M\leqslant S\leqslant G$,这里 S 是 G 的一个极大子群,而 M 是 S 的一个极大子群。根据(4),$S=S_2\times Q$,这里 $S_2\in\mathrm{Syl}_2(G)$。显然,$S_2=P\cap S$ 是 P 的一个极大子群,故 S_2 在 $PQ=G$ 中正规,进而 $S_2\Phi(P)/\Phi(P)$在 $G/\Phi(P)$中正规。由于 $P/\Phi(P)$是 $G/\Phi(P)$的一个极小正规子群,故 $S_2=\Phi(P)$,这意味着 P 循环,与(1)矛盾。

(c) G 有一个 4 阶循环群在 G 中不是 s-拟正规的。

假定 G 中每一个 4 阶循环群在 G 中均是 s-拟正规的。设 x 是 G 中一个 4 阶元。由于$\langle x\rangle Q$ 是 G 的真子群,故根据(4),$\langle x\rangle Q=\langle x\rangle\times Q$。这表明 $x\in N_G(Q)$。根据(5),$P\leqslant N_G(Q)$,进而 Q 在 G 中正规,与(4)矛盾。

由(a)和(b)得,$G=M$,这意味着$\langle x\rangle=\langle x\rangle_{qG}$,即$\langle x\rangle$在 G 中是 s-拟正规的,这与(c)矛盾。

引理 1.3 如果有限群 G 的每一个 Sylow 2-子群的极大子群在 G 中有 q-补,那么,G 是可解的。

证明 对$|G|$做归纳法。由奇阶定理及引理 1.1(2),可以假设 $O_2(G)=1$。由于 G 的每一个 s-拟正规的 2-子群含于 $O_2(G)$,故 G 没有非单位的 s-拟正规的 2-子群。

设 P_1 是 P 的一个极大子群,根据假设,存在 G 的一个子群 K,使得 $G=P_1K$,且 $P_1\cap K\leqslant(P_1)_{qG}=1$。设 P_1 在 G 中有一个补。由[5,Theorem 3.2],G 可解。

定理 1.3 设 N 是 G 的一个正规子群,且使得 G/N 超可解。如果 N 的每一个 Sylow 子群的极大子群在 G 中有 q-补,那么,G 是超可解的。

证明 假设定理不真,取 G 是一个关于($|G|,|N|$)的极小反例。根据引理 1.3,N 是可解的,进而 G 可解。设 L 是 G 的一个包含在 N 中的极小正规子群。那么,对某个素数 p,L 是一个初等交换 p-群。容易证明,($|G/L|,|N/L|$)也满足定理的假设。因此,由($|G|,|N|$)的极小性得到 $N=L$。

设 L_1 是 N 的一个极大子群。根据假设,存在 G 的一个子群 K 使得 $G=L_1K$,且 $L_1\cap K\leqslant(L_1)_{qG}$。这样,

$G = L_1 K = NK$。显然,$N\cap K$ 在 K 中正规。由于 N 是交换的,$N\cap K$ 在 N 中正规。

因而 $N\cap K$ 在 G 中正规。由 N 的选择,必有 $N\cap K = 1$,或者 $N\cap K = N$。

如果 $N\cap K = 1$, 那么 $L_1\cap K = 1$。因而 $|L_1| = |G:M| = |N|$,矛盾。

如果 $N\cap K = N$, 那么,N 含于 K 中,进而 $G = K$。于是有 $L_1 = L_1\cap K\leqslant (L_1)_{qG}$。另一方面,显然有 $(L_1)_{qG}\leqslant L_1$,因而 $(L_1)_{qG} = L_1$。这表明,L_1 在 G 中是 s-拟正规的。由[11,Theorem 4.1],G 是超可解的,矛盾。

致谢:感谢编辑和审稿人的帮助!

参考文献:

[1] HUPPERT B. Normalterteiler und maximale Untergruppen englicher Gruppen[J]. Math Z, 1954, 60:409-434.

[2] KEGEL O H. On Huppert's characterization of finite supersolvable groups[M]. Proc Internat Conf Theory of groups Canberra, 1965:209-215.

[3] BAUMEISTER B. A characterization of the finite solvable groups[J]. Arch Math, 1999, 72(3):167-176.

[4] BALLESTER-BOLLINCHES A, WANG Y M. GUO X Y. c-Supplemented subgroups of finite groups[J]. Glasgow Math J, 2000,42:383-389.

[5] WANG Y M. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented[J]. J Algebra, 2000, 224:467-478.

[6] THOMPSON J. An example of core-free quasinormal subgroups of p-groups[J]. Math Z, 1967, 96:226-227.

[7] WEINSTEIN M. Between nilpotent and solvable[M]. Polygonal Publishing House, 1982.

[8] HALL P. A characteristic property of soluble group[J]. J London Math Soc, 1937, 12:188-200.

[9] HUPPERT B. Endliche Gruppen I[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[10] DOERK K. Minimal nicht Uberauflosbarer endliche Gruppen[J]. Math Z, 1966, 91:198-205.

[11] ASAAD M, RAMADAN M, SHAALAN A. Influence of π-quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of Fitting subgroup of a finite group[J]. Arch Math, 1991, 56: 521-527.

(编辑:李晓红)