第44卷 第10期
Vol.44 No.10

山东大学学报(理学版)
Journal of Shandong University(Natural Science)

2009年10月
Oct. 2009

文章编号:1671-9352(2009)10-0080-07

三矩阵左半张量积的加权 Moore-Penrose 逆的反序律

宋彩芹[1],赵建立[2],王晓东[3]

(1. 华东师范大学数学系, 上海 200241;
2. 聊城大学数学科学学院, 山东 聊城 252059;
3. 石家庄铁道学院数理系, 河北 石家庄, 050043)

摘要:给出了三矩阵左半张量积 $\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C}$ 的加权 Moore-Penrose 逆满足反序律$(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C})^{+}_{MK}=(\boldsymbol{C}^{+}_{LK}\otimes\boldsymbol{I}_t)(\boldsymbol{B}^{+}_{NL}\otimes\boldsymbol{I}_p)\boldsymbol{A}^{+}_{MN}$的充要条件。

关键词:矩阵左半张量积;加权 Moore-Penrose 逆;反序律

中图分类号:O151.21 **文献标志码**:A

Reverse order law for the weighted Moore-Penrose inverse of a triple left matrix semi-tensor product

SONG Cai-qin[1], ZHAO Jian-li[2], WANG Xiao-dong[3]

(1. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, China;
2. School of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng 252059, Shandong, China;
3. Department of Mathematics & Physics, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, Hebei China)

Abstract: The reverse order law for the weighted Moore-Penrose inverse of a triple matrix left semi-tensor product is investigated, and a necessary and sufficient condition for it is given.

Key words: matrix left semi-tensor product; weighted Moore-Penrose inverse; reverse order law

0 引言及符号

中科院系统所程代展教授提出了一种新的矩阵乘法——左半张量积,程教授在文献[1]中给出了矩阵左半张量积在动态系统吸引域、动态系统对称性、Morgan 问题、微分几何中的联络问题、逻辑问题等许多领域的重要应用。考虑到矩阵广义逆的反序律在理论研究和数值计算中有着重要的作用,但三矩阵的左半张量积的加权 Moore-Penrose 逆的反序律还没有被探讨过,本文就来考虑此问题。

用符号$\odot$表示左半张量积,$\boldsymbol{I}_t$ 表示 t 阶单位矩阵,$\otimes$表示张量积。$\mathbf{C}^{m\times n}$表示 $m\times n$ 阶复矩阵的全体,$R(\boldsymbol{A})$,$N(\boldsymbol{A})$表示复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域(列空间)与零空间;$r(\boldsymbol{A})$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,$\boldsymbol{A}^{*}$,$\boldsymbol{A}^{\#}$分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置和加权共轭转置,$\boldsymbol{P}_{L,M}$表示为 M 到 $\boldsymbol{L}$ 上的投影算子。

收稿日期:2008-09-17
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771073)
作者简介:宋彩芹(1983-),女,博士研究生,主要从事矩阵代数研究. Email:songcaiqin1983@163.com

1 预备知识

设 $\boldsymbol{A}$ 的列和 $\boldsymbol{B}$ 的行分别为 m 和 n,$m=nt$ 时,记为 $\boldsymbol{A}\succ_t\boldsymbol{B}$,$n=mt$ 时,记为 $\boldsymbol{A}\prec_t\boldsymbol{B}$。下面给出 $\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}$ 的第二定义:

定义 1.1[1]　$$\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=\begin{cases}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_t),\boldsymbol{A}\succ_t\boldsymbol{B},\\(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_t)\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\prec_t\boldsymbol{B}。\end{cases}$$

定义 1.2[2]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 分别为 m 阶和 n 阶 Hermite 正定矩阵,则把满足下列矩阵方程

(1) $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}$;(2) $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X}$;(3$M$) $(\boldsymbol{MAX})^*=\boldsymbol{MAX}$;(4$N$) $(\boldsymbol{NXA})^*=\boldsymbol{NXA}$

的惟一矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times m}$,称为 $\boldsymbol{A}$ 的加权 Moore-Penrose 逆(简称 $\boldsymbol{A}$ 的加权 $\boldsymbol{M}$-$\boldsymbol{P}$ 逆),记作 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}_{MN}^+$。当 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 分别为 m 阶和 n 阶单位矩阵时,$\boldsymbol{X}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{M}$-$\boldsymbol{P}$ 逆,记作 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^+$。

定理 1.1[2]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times l}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbf{C}^{l\times k}$,则

$$(\boldsymbol{ABC})^+=\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A}^+ \tag{1}$$

成立的充要条件是

$$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{BB}^*\boldsymbol{B} & 0 & \boldsymbol{BC}\\ 0 & -\boldsymbol{TT}^*\boldsymbol{T} & -\boldsymbol{TC}^*\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{T} & 0\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{T})+r(\boldsymbol{B}) \tag{2}$$

成立,其中 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{ABC}$。

将上述结果推广到加权 Moore-Penrose 逆,给出三矩阵左半张量积 $\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C}$ 的加权 Moore-Penrose 逆满足反序律

$$(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C})_{MK}^+=(\boldsymbol{C}_{LK}^+\otimes\boldsymbol{I}_t)(\boldsymbol{B}_{NL}^+\otimes\boldsymbol{I}_p)\boldsymbol{A}_{MN}^+ \tag{3}$$

的充要条件。在这个充要条件中,只涉及一些与 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{L},\boldsymbol{K}$ 等有关矩阵求秩运算,而不涉及矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的加权 Moore-Penrose 逆,因而本文结果的使用是非常简单的。

定义 1.3[3]　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 分别为 m 阶和 n 阶 Hermite 正定矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的加权共轭转置 $\boldsymbol{A}^{\#}\in\mathbf{C}^{n\times m}$ 由下式定义:

$$\boldsymbol{A}^{\#}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{M}。 \tag{4}$$

定理 1.2[3]　(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\#}=\boldsymbol{A}^{\#}+\boldsymbol{B}^{\#}$, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{m\times n}$;

(2) $(\boldsymbol{AB})^{\#}=\boldsymbol{B}^{\#}\boldsymbol{A}^{\#}$;

(3) $(\boldsymbol{A}^{\#})^{\#}=\boldsymbol{A}$, $(\boldsymbol{A}^{\#})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\#}$, $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$。

定理 1.3[3]　(1) $R(\boldsymbol{A}_{MN}^+)=R(\boldsymbol{A}^{\#})$, $R((\boldsymbol{A}_{MN}^+)^{\#})=R(\boldsymbol{A})$;

(2) $\boldsymbol{AA}_{MN}^+=\boldsymbol{P}_{R(A),M^{-1}N(A^*)}=\boldsymbol{P}_{R(A),N(A^{\#})}$,$\boldsymbol{A}_{MN}^+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_{N^{-1}R(A^*),N(A)}=\boldsymbol{P}_{R(A^{\#}),N(A)}$;

(3) $\boldsymbol{A}_{MN}^+=\boldsymbol{N}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{M}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{AN}^{-\frac{1}{2}})^+\boldsymbol{M}^{\frac{1}{2}}$;

(4) $(\boldsymbol{A}_{MN}^+)_{NM}^+=\boldsymbol{A}$。

定理 1.4[3]　设 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 为 $\mathbf{C}^n$ 的互补子空间,则

$$\boldsymbol{P}_{L,M}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})\subset\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{AP}_{L,M}=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow N(\boldsymbol{A})\supset\boldsymbol{M}。$$

定理 1.5[4]　若 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 非奇异,则

(1) $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$;

(2) $r(\boldsymbol{CA})=r(\boldsymbol{A})$。

容易得到下面的定理 1.6。

定理 1.6　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times np}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times lt}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbf{C}^{l\times k}$,若 $\mathbf{P}_{NM}^+(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}_{KL}^+=\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p$,则

$$r(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)。$$

定理 1.7　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times np}$,$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 分别为 m 阶和 np 阶 Hermite 正定矩阵,则 $r(\boldsymbol{AA}^{\#})=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{A})$。

证明　$r(\boldsymbol{AA}^{\#})=r(\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{M})=r(\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A}^*)=r(\boldsymbol{AN}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{N}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}^*)=r(\boldsymbol{AN}^{-\frac{1}{2}})=r(\boldsymbol{A})$。

同理可证 $r(A^{\#}A)=r(A)$。

定理 1.8 设 $A\in\mathbf{C}^{m\times np}$,$M$ 和 N 分别为 m 阶和 np 阶 Hermite 正定矩阵,则

$$\begin{bmatrix} I & & \\ & A & \\ & & A \end{bmatrix}^{+}_{\hat{M}\hat{N}}=\begin{bmatrix} I & & \\ & A^{+}_{MN} & \\ & & A^{+}_{MN} \end{bmatrix},$$

其中

$$\hat{M}=\begin{bmatrix} I & & \\ & M & \\ & & M \end{bmatrix},\quad \hat{N}=\begin{bmatrix} I & & \\ & N & \\ & & N \end{bmatrix}。$$

证明 利用定义 1.3 即可推出。

定理 1.9 分块矩阵 $\hat{M}=\begin{bmatrix} A & AQ \\ PA & B\otimes I_p \end{bmatrix}$ 的秩可表示为

$$r\begin{bmatrix} A & AQ \\ PA & B\otimes I_p \end{bmatrix}=r(A)+r(B\otimes I_p-PAQ)。$$

证明 对分块矩阵进行列变换后即得。

定理 1.10[5] $(A\otimes B)^{+}=A^{+}\otimes B^{+}$,$A^{+}$,$B^{+}$ 表示矩阵 A,B 的广义逆。

2 主要结论

下面给出三矩阵左半张量积的加权 Moore-Penrose 逆满足反序律的充要条件。这里只讨论 $A>_pB>_tC$,的情况,对于 $A>_pB<_tC$(此时 $p=rt$)和 $A<_pB<_tC$ 的情况也有类似的结论,不再赘述。

定理 2.1 设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$B\in\mathbf{C}^{np\times l}$,$C\in\mathbf{C}^{lt\times k}$,$M,N,L,K$ 分别为 m,np,lt,k 阶 Hermite 正定矩阵,则三矩阵左半张量积 $A\odot B\odot C$ 的加权 Moore-Penrose 逆反序律

$$(A\odot B\odot C)^{+}_{MK}=(C^{+}_{LK}\otimes I_t)(B^{+}_{NL}\otimes I_p)A^{+}_{MN}$$

成立的充要条件是

$$r\begin{bmatrix} BB^{\#}B\otimes I_p & 0 & (B\otimes I_p)C \\ 0 & -TT^{\#}T & TC^{\#}C \\ A\odot B & AA^{\#}T & 0 \end{bmatrix}=r(T)+pr(B),\tag{5}$$

其中 $T=A\odot B\odot C$。

证明 由定理 1.3 中的(3)得

$$(A\odot B\odot C)^{+}_{MK}=K^{-\frac{1}{2}}(M^{\frac{1}{2}}(A\odot B\odot C)K^{-\frac{1}{2}})^{+}M^{\frac{1}{2}},$$

$$(C^{+}_{LK}B^{+}_{NL}\otimes I_{pt})A^{+}_{MN}=K^{-\frac{1}{2}}(L^{\frac{1}{2}}(C\otimes I_t)K^{-\frac{1}{2}})^{+}L^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}(N^{\frac{1}{2}}(B\otimes I_p)N^{-\frac{1}{2}})^{+}N^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}}(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^{+}M^{\frac{1}{2}}=$$

$$K^{-\frac{1}{2}}(L^{\frac{1}{2}}(C\otimes I_t)K^{-\frac{1}{2}})^{+}(N^{\frac{1}{2}}(B\otimes I_p)N^{-\frac{1}{2}})^{+}(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^{+}M^{\frac{1}{2}}。$$

若令 $\tilde{A}=M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}}$,$\tilde{B}\otimes I_p=N^{\frac{1}{2}}(B\otimes I_p)L^{-\frac{1}{2}}$,$\tilde{C}\otimes I_t=L^{\frac{1}{2}}(C\otimes I_t)K^{-\frac{1}{2}}$,

则

$$(A\odot B\odot C)^{+}_{MK}=K^{-\frac{1}{2}}(\tilde{A}\odot\tilde{B}\odot\tilde{C})^{+}M^{\frac{1}{2}},$$

$$(C^{+}_{LK}B^{+}_{NL}\otimes I_{pt})A^{+}_{MN}=K^{-\frac{1}{2}}(\tilde{C}^{+}\tilde{B}^{+}\otimes I_{pt})\tilde{A}^{+}M^{\frac{1}{2}},$$

$$(A\odot B\odot C)^{+}_{MK}=(C^{+}_{LK}\otimes I_t)(B^{+}_{NL}\otimes I_p)A^{+}_{MN}$$

成立等价于

$$(\tilde{A}\odot\tilde{B}\odot\tilde{C})^{+}=(\tilde{C}^{+}\otimes I_t)(\tilde{B}^{+}\otimes I_p)\tilde{A}^{+}。\tag{6}$$

由定理 1.1 知式(6)成立的充要条件为

$$r\begin{bmatrix}(\widetilde{B}\widetilde{B}^{*}\widetilde{B})\otimes I_p & 0 & (\widetilde{B}\widetilde{C})\otimes I_{pt}\\ 0 & -\widetilde{T}\widetilde{T}^{*}\widetilde{T} & \widetilde{T}(\widetilde{C}^{*}\widetilde{C}\otimes I_t)\\ \widetilde{A}\odot\widetilde{B} & \widetilde{A}\widetilde{A}^{*}\widetilde{T} & 0\end{bmatrix}=r(\widetilde{T})+r(\widetilde{B}\otimes I_p),\tag{7}$$

其中 $\widetilde{T}=\widetilde{A}\odot\widetilde{B}\odot\widetilde{C}$。由定理 1.5 得式(7)左端矩阵的秩为

$$r\begin{bmatrix}(\widetilde{B}\widetilde{B}^{*}\widetilde{B})\otimes I_p & 0 & (\widetilde{B}\otimes I_p)(\widetilde{C}\otimes I_t)\\ 0 & -\widetilde{T}\widetilde{T}^{*}\widetilde{T} & \widetilde{T}(\widetilde{C}^{*}\widetilde{C}\otimes I_t)\\ \widetilde{A}\odot\widetilde{B} & \widetilde{A}\widetilde{A}^{*}\widetilde{T} & 0\end{bmatrix}=$$

$$r\begin{bmatrix}N((BB^{\#}B)\otimes I_p)L^{-\frac{1}{2}} & 0 & N^{\frac{1}{2}}(B\otimes I_p)(C\otimes I_t)K^{-\frac{1}{2}}\\ 0 & -M^{\frac{1}{2}}TT^{\#}TK^{-\frac{1}{2}} & M^{\frac{1}{2}}T(C^{\#}C\otimes I_t)K^{-\frac{1}{2}}\\ M^{\frac{1}{2}}(A\odot B)L^{-\frac{1}{2}} & M^{\frac{1}{2}}AA^{\#}TK^{-\frac{1}{2}} & 0\end{bmatrix}=$$

$$r\left(\begin{bmatrix}N^{\frac{1}{2}} & & \\ & M^{\frac{1}{2}} & \\ & & M^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(BB^{\#}B)\otimes I_p & 0 & (B\otimes I_p)(C\otimes I_t)\\ 0 & -TT^{\#}T & T(C^{\#}C\otimes I_t)\\ A\odot B & AA^{\#}T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L^{-\frac{1}{2}} & & \\ & K^{-\frac{1}{2}} & \\ & & K^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\right)=$$

$$r\begin{bmatrix}(BB^{\#}B)\otimes I_p & 0 & (B\otimes I_p)(C\otimes I_t)\\ 0 & -TT^{\#}T & T(C^{\#}C\otimes I_t)\\ A\odot B & AA^{\#}T & 0\end{bmatrix},$$

且

$$r(\widetilde{T})=r(M^{\frac{1}{2}}(A\odot B\odot C)K^{-\frac{1}{2}})=r(A\odot B\odot C)=r(T),$$
$$r(\widetilde{B}\otimes I_p)=r(N^{\frac{1}{2}}(B\otimes I_p)L^{-\frac{1}{2}})=r(B\otimes I_p)。$$

所以式(7)等价于

$$r\begin{bmatrix}(BB^{\#}B)\otimes I_p & 0 & (B\otimes I_p)(C\otimes I_t)\\ 0 & -TT^{\#}T & T(C^{\#}C\otimes I_t)\\ A\odot B & AA^{\#}T & 0\end{bmatrix}=r(T)+r(B\otimes I_p)。$$

充要条件(5)的一个明显特点是它不含 A,B,C 的加权 Moore-Penrose 逆,只需计算 T,B 的秩以及由 A,B,C,T 及它们的加权共轭转置矩阵的左半张量积组成的一个分块矩阵的秩,就可检验(3)式是否成立,当矩阵 A,B,C 满足一些特殊条件时,条件(5)就可以更加简化。

推论 2.1　设 A,B,C 满足下列条件之一:

(1) $R(B\otimes I_p)\subset R(A^{\#})$, $R(B^{\#}\otimes I_p)\subset R(C\otimes I_t)$;

(2) A 列满秩,C 行满秩;

(3) A,C 为非奇异方阵,

则 $A\odot B\odot C$ 满足式(3)的充要条件为

$$r\begin{bmatrix}B\otimes I_p\\ (B\otimes I_p)(C^{\#}C\otimes I_t)\end{bmatrix}=r(B\otimes I_p),r(B\otimes I_p\mid AA^{\#}(B\otimes I_p))=r(B\otimes I_p)。\tag{8}$$

证明　因为条件(2),(3)为(1)的特殊情况,故只需证条件(1)的情况即可。由定理 1.4 知,条件(1)中两式等价于

$$A^{+}_{MN}(A\odot B)=B\otimes I_p,\ (B\otimes I_p)(CC^{+}_{LK}\otimes I_t)=B\otimes I_p,\tag{9}$$

即

$$A^{+}_{MN}(A\odot B\odot C)(C^{+}_{LK}\otimes I_t)=B\otimes I_p,\tag{10}$$

所以

$$r(A\odot B\odot C)=r(B\otimes I_p)。\tag{11}$$

式(5)左端分块矩阵可分解为

$$\begin{bmatrix} (BB^{\#}B)\otimes I_p & 0 & (B\otimes I_p)(C\otimes I_t) \\ 0 & -TT^{\#}T & T(C^{\#}C\otimes I_t) \\ A\odot B & AA^{\#}T & 0 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} I & & \\ & A & \\ & & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (BB^{\#}B)\otimes I_p & 0 & B\otimes I_p \\ 0 & -(B\otimes I_p)(C\otimes I_t)T^{\#}(A\odot B) & (B\otimes I_p)(CC^{\#}\otimes I_t) \\ B\otimes I_p & A^{\#}(A\odot B) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & & \\ & C\otimes I_t & \\ & & C\otimes I_t \end{bmatrix},$$

又上式左乘$\begin{bmatrix} I & & \\ & A & \\ & & A \end{bmatrix}_{\hat{M}\hat{N}}$和右乘$\begin{bmatrix} I & & \\ & C\otimes I_t & \\ & & C\otimes I_t \end{bmatrix}_{\hat{L}\hat{K}}$,并利用定理1.8以及

$$(C^{\#}CC^{+}_{LK})\otimes I_t=C^{\#}\otimes I_t,\ A^{+}_{MN}AA^{\#}=A^{\#},$$

可得

$$\begin{bmatrix} I & & \\ & A^{+}_{MN} & \\ & & A^{+}_{MN} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (BB^{\#}B)\otimes I_p & 0 & (B\otimes I_p)(C\otimes I_t) \\ 0 & -TT^{\#}T & T((C^{\#}C)\otimes I_t) \\ A\odot B & AA^{\#}T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & & \\ & C^{+}_{LK}\otimes I_t & \\ & & C^{+}_{LK}\otimes I_t \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} (BB^{\#}B)\otimes I_p & 0 & B\otimes I_p \\ 0 & -(B\otimes I_p)(C\otimes I_t)T^{\#}(A\odot B) & (B\otimes I_p)(CC^{\#}\otimes I_t) \\ B\otimes I_p & A^{\#}(A\odot B) & 0 \end{bmatrix}。$$

利用定理1.6并进行适当的行变换得到

$$r\begin{bmatrix} (BB^{\#}B)\otimes I_p & 0 & (B\otimes I_p)(C\otimes I_t) \\ 0 & TT^{\#}T & T(C^{\#}C\otimes I_t) \\ A\odot B & AA^{\#}T & 0 \end{bmatrix}=$$

$$r\begin{bmatrix} (BB^{\#}B)\otimes I_p & 0 & B\otimes I_p \\ 0 & -(B\otimes I_p)(C\otimes I_t)T^{\#}(A\odot B) & (B\otimes I_p)(CC^{\#}\otimes I_t) \\ B\otimes I_p & A^{\#}(A\odot B) & 0 \end{bmatrix}=$$

$$r\begin{bmatrix} 0 & 0 & B\otimes I_p \\ 0 & 0 & (B\otimes I_p)(CC^{\#}\otimes I_t) \\ B\otimes I_p & A^{\#}(A\odot B) & 0 \end{bmatrix}=$$

$$r\begin{bmatrix} B\otimes I_p \\ (B\otimes I_p)(CC^{\#}\otimes I_t) \end{bmatrix}+r(B\otimes I_p \mid A^{\#}(A\odot B))。\tag{12}$$

把(11),(12)代入(5)整理即得式(8)。

推论2.2　设 A,B,C 满足下列条件之一:

(1) $R(A^{\#})\subset R(B\otimes I_p)$, $R(C\otimes I_t)\subset R(B^{\#}\otimes I_p)$,

(2) $B\otimes I_p$为非奇异方阵,

则 $T=A\odot B\odot C$ 满足式(3)的充要条件为

$$r\begin{bmatrix} B^{\#}\otimes I_p & C\otimes I_t \\ A & 0 \end{bmatrix}=r(T)+pr(B)。\tag{13}$$

证明　由于条件(2)为(1)的特例,只需证在条件(1)下的情况即可。由定理1.4知,条件中两式等价于

$$A(BB^{+}_{NL}\otimes I_p)=A,\ (B^{+}_{NL}B\otimes I_p)(C\otimes I_t)=C\otimes I_t,\tag{14}$$

$$(B^{+}_{NL}BB^{\#})\otimes I_p=P_{R(B^{\#}),N(B)}(B^{\#}\otimes I_p)=B^{\#}\otimes I_p,\tag{15}$$

$$(\boldsymbol{B}^{\#}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_{NL}^{+})\otimes\boldsymbol{I}_p=(\boldsymbol{B}^{\#}\otimes\boldsymbol{I}_p)\boldsymbol{P}_{R(B),N(B^{\#})}=\boldsymbol{B}^{\#}\otimes\boldsymbol{I}_p。\tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\#}\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{I}_p & 0 & (\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ 0 & -\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\#}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{C}^{\#}\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ \boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{T} & 0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p & & \\ & \boldsymbol{I} & \\ & & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{\#}\otimes\boldsymbol{I}_p & 0 & \boldsymbol{C}\\ 0 & -\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\#}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}((\boldsymbol{C}^{\#}\boldsymbol{C})\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{T} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p & & \\ & \boldsymbol{I} & \\ & & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}。$$

在条件(14),(15)和(16)下对式(5)左端分块矩阵利用定理 1.6 和定理 1.7,并进行适当的行列变换可得

$$r\begin{bmatrix}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\#}\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{I}_p & 0 & (\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ 0 & -\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\#}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}((\boldsymbol{C}^{\#}\boldsymbol{C})\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ \boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{T} & 0\end{bmatrix}=$$

$$r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{NL}^{+}\otimes I_p & & \\ & \boldsymbol{L} & \\ & & \boldsymbol{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\#}\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{I}_p & 0 & (\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ 0 & -\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\#}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}((\boldsymbol{C}^{\#}\boldsymbol{C})\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ \boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{T} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{NL}^{+}\otimes\boldsymbol{I}_p & & \\ & \boldsymbol{I} & \\ & & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\right)=$$

$$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{\#} & 0 & \boldsymbol{C}\\ 0 & -\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\#}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}\boldsymbol{C}^{\#}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{T} & 0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{\#} & 0 & \boldsymbol{C}\\ 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{A} & 0 & 0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{\#} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{A} & 0\end{bmatrix}。$$

利用式(5),即得式(13)。

推论 2.3 若$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\#}\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{I}_p=\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p$,$\boldsymbol{B}_{NL}^{+}\otimes\boldsymbol{I}_p=\boldsymbol{B}^{\#}\otimes\boldsymbol{I}_p$,则 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C}$ 的加权 Moore-Penrose 逆满足式(3)的充要条件为

$$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{T}((\boldsymbol{C}^{\#}\boldsymbol{C})\otimes\boldsymbol{I}_t) & \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\#}\boldsymbol{T}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{T})。\tag{17}$$

证明 已知$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\#}\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{I}_p=\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p$,可直接验证$\boldsymbol{B}^{\#}\otimes\boldsymbol{I}_p$满足

$$(\boldsymbol{B}^{\#}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\#})\otimes\boldsymbol{I}_p=\boldsymbol{B}^{\#}\otimes\boldsymbol{I}_p,(N((\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\#})\otimes\boldsymbol{I}_p))^{*}=N((\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\#})\otimes\boldsymbol{I}_p),$$

$$(L((\boldsymbol{B}^{\#}\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{I}_p))^{*}=L((\boldsymbol{B}^{\#}\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{I}_p),$$

即可得$\boldsymbol{B}_{NL}^{+}\otimes\boldsymbol{I}_p=\boldsymbol{B}^{\#}\otimes\boldsymbol{I}_p$。

对式(5)左端分块矩阵作适当的行列变换可得

$$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{\#}\otimes\boldsymbol{I}_p & 0 & (\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ 0 & -\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\#}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}((\boldsymbol{C}^{\#}\boldsymbol{C})\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ \boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{T} & 0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p & 0 & (\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ 0 & -\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\#}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}((\boldsymbol{C}^{\#}\boldsymbol{C})\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ \boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{T} & 0\end{bmatrix}=$$

$$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p & 0 & 0\\ 0 & -\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\#}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}((\boldsymbol{C}^{\#}\boldsymbol{C})\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ 0 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{T} & -\boldsymbol{T}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)+r\begin{bmatrix}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\#}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}((\boldsymbol{C}^{\#}\boldsymbol{C})\otimes\boldsymbol{I}_t)\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\#}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}\end{bmatrix},$$

与式(5)比较可得式(17)。

定理 2.2 三个矩阵左半张量积 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C}$ 的加权 Moore-Penrose 逆可表成

$$(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C})_{MK}^{+}=((\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{I}_t))_{NK}^{+}(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B})_{ML}^{+}\tag{18}$$

的充要条件

$$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p & (\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B})^{\#}\\ ((\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p)(C\otimes\boldsymbol{I}_t))^{\#}(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_p) & 0\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{T})+pr(\boldsymbol{B})。\tag{19}$$

证明 把 $\boldsymbol{T}$ 表示成

$$T=(A\odot B)(B_{NL}^{+}\otimes I_p)(B\otimes I_p)(C\otimes I_t)。$$

令 $P=A\odot B$, $Q=(B\otimes I_p)(C\otimes I_t)$,由定理 1.3 得

$$R(P^{\#})\subset R(B^{\#}\otimes I_p)=R(B_{NL}^{+}\otimes I_p),\ R(Q)\subset R(B\otimes I_p)=R((B_{NL}^{+}\otimes I_p)^{\#})。$$

因此 $T=P(B_{NL}^{+}\otimes I_p)Q$ 满足推论 2.1,由此可得 $T_{MK}^{+}=Q_{NK}^{+}(B\otimes I_p)P_{MN}^{+}$成立等价于

$$r\begin{bmatrix}(B_{NL}^{+})^{\#}\otimes I_p & (B\otimes I_p)(C\otimes I_t)\\ A\odot B & 0\end{bmatrix}=r(T)+r(B\otimes I_p)。\tag{20}$$

对上式左端分块矩阵取加权共轭转置,则式(20)等价于

$$r\begin{bmatrix}B_{NL}^{+}\otimes I_p & (A\odot B)^{\#}\\ ((B\otimes I_p)(C\otimes I_t))^{\#} & 0\end{bmatrix}=r(T)+r(B\otimes I_p)。\tag{21}$$

对式(21)左端分块矩阵作初等变换,第一行左乘 $B\otimes I_p$,第一列右乘 $B\otimes I_p$,即可得式(19)。

推论 2.4　若三矩阵左半张量积 $A\odot B\odot C$ 的秩满足

$$r(A\odot B\odot C)=r(B\otimes I_p),\tag{22}$$

则 $A\odot B\odot C$ 的加权 Moore-Penrose 逆可写为

$$(A\odot B\odot C)_{MK}^{+}=((B\otimes I_p)(C\otimes I_t))_{NK}^{+}(B\otimes I_p)(A\odot B)_{ML}^{+}。\tag{23}$$

证明　条件(22)与

$$r(A\odot B)=r(B\otimes I_p)=r((B\otimes I_p)(C\otimes I_t))\tag{24}$$

等价。由式(24),并利用定理 1.7 可得 $r(B\otimes I_p)=r(A\odot B)=r((A\odot B)(A\odot B)^{\#})$。由此可得

$$r(B\otimes I_p)=r((B\otimes I_p)(A\odot B)^{\#})。\tag{25}$$

同理可得

$$r(B\otimes I_p)=r(((B\otimes I_p)(C\otimes I_t))^{\#}(B\otimes I_p))。\tag{26}$$

由此可推出式(19)左端分块矩阵秩为

$$r\begin{bmatrix}B\otimes I_p & (B\otimes I_p)(A\odot B)^{\#}\\ ((B\otimes I_p)(C\otimes I_t))^{\#}(B\otimes I_p) & 0\end{bmatrix}=$$

$$r((B\otimes I_p)(A\odot B)^{\#})+r(((B\otimes I_p)(C\otimes I_t))^{\#}(B\otimes I_p))=2r(B\otimes I_p),$$

而右端秩显然也为 $2r(B\otimes I_p)$,从而在条件(22)下式(19)成立,所以由定理 2.2 可得式(23)。

参考文献:

[1] 程代展,齐洪胜.矩阵的半张量积及其应用[M].北京:科学出版社,2007.
[2] Ben-Israel A, GREVILLE T N E. Generalized inverses theory and applications[M]. 2nd ed. New York: Springer Verlag, 2003.
[3] 王国荣.矩阵与算子广义逆[M].北京:科学出版社,1998.
[4] STEWART G W.矩阵计算引论[M]上海:上海科技出版社,1980.
[5] 戴华.矩阵论[M].北京:科学出版社,2001.
[6] GOLUB G H, LOAN C F V. Matrix computations[M]. Baltimorem, MD: The Johns Hopkins University Press, 1983.
[7] HARTWIG R E. Block generalized inverses[J]. Arch Relational Mech Anal, 1976, 61:197-251.
[8] RAO C R, MITRA S K. Generalized inverse of matrices and its applications[M]. New York: John Wiley, 1971.
[9] 王国荣,高[redacted].三矩阵乘积的加权 Moore-Penrose 逆的反序律[J].上海师范大学学报:自然科学版,2000,29(3):001-011.

(编辑:李晓红)