文章编号:1671-9352(2008)06-0009-03

一类距离图的分数色数

刘西奎,赵秉清,王彩虹,薛圣伟
(山东科技大学信息科学与工程学院,山东 青岛 266510)

摘要:主要讨论了距离图 $G(\mathbf{Z},D_{m,k,k+1,k+2,k+3})$(其中 $D_{m,k,k+1,k+2,k+3}=\{1,2,\cdots,m\}-\{k,k+1,k+2,k+3\}$)的分数色数,以及当 $2k\leqslant m\leqslant 2k+5$ 时 $G(\mathbf{Z},D_{m,k,k+1,k+2,k+3})$的色数。

关键词:距离图;分数色数;色数
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

Fractional chromatic number of one class of distance graphs

LIU Xi-kui, ZHAO Bing-qing, WANG Cai-hong, XUE Sheng-wei
(Shandong University of Science and Technology, College of Information and Engineering,
Qingdao 266510, Shandong, China)

Abstract: The fractional chromatic number of the distance graph $G(\mathbf{Z},D_{m,k,k+1,k+2,k+3})$ (where $D_{m,k,k+1,k+2,k+3}=\{1,2,\cdots,m\}-\{k,k+1,k+2,k+3\}$) and its chromatic number for some pairs of integers, when $2k\leqslant m\leqslant 2k+5$ were discussed.

Key words: distance graph; fractional chromatic number; chromatic number

0 引言

本文仅考虑有限、简单、无向图,本节首先介绍距离图、色数以及分数色数的有关定义,然后给出有关色数和分数色数的已有结果。

用不同的颜色给欧式平面上的所有顶点着色,使得单位距离的点着以不同的颜色所需的最小颜色数是多少?这就是著名的平面着色问题。受这个问题启发,Eggleton[1]引入了距离图的概念:

定义1 假设 S 是度为 δ 的度量空间 μ 的子集,D 是一个正实数集,则距离图 $G(S,D)$具有顶点集 S 以及距离集 D,且满足:对 $\forall x,y\in S$,x,y 相邻当且仅当 $\delta(x,y)\in D$。

这样,平面着色问题就等价于求距离图 $G(\mathbf{R}^2,\{1\})$的色数,这个图的色数介于4和7之间,然而,具体的颜色数仍然是未知的。

要考虑的是定义在整数集上的距离图,即整数距离图。给定一个有限的正整数集合 D,整数距离图 $G(\mathbf{Z},D)$是具有顶点集 $\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$、距离集 D,且满足顶点 x 与 y 相邻的充要条件是 $|x-y|\in D$ 的无限图,本文中所述距离图都是整数距离图。

顶点着色是图论的一个重要的研究方向,[2]中给出了有关顶点着色的一些概念:

定义2 图 G 的一个 k-顶点着色是指 k 种颜色对于图 G 的所有顶点的一个分配;如果任意两个相邻的顶点都分配到不同的颜色,则称该着色是正常的。当图 G 有一个正常 k-顶点着色时,称图 G 是 k-顶点可着色的。图 G 的色数是使图 G 为 k-可着色的 k 的最小值,通常用 $\chi(G)$来表示。

收稿日期:2007-10-21
作者简介:刘西奎(1973-),男,博士,副教授,主要从事组合优化方面的研究.Email:liuxikui@sdust.edu.cn

分数色数是色数的一种推广，也是图的一个重要参数，它的定义如下：

定义3　给定一个图 $G(V,D)$，用 $I(G)$ 表示图 G 的所有独立集构成的集合，如果存在一个从 $I(G)$ 到区间 $[0,1]$ 的函数 c，使得对 $\forall x\in V(G)$，都有 $\sum_{x\in I\in I(G)} c(I)\geqslant 1$，就称函数 c 为图 G 的一个分数着色。该分数着色的值为 $\sum_{x\in I\in I(G)} c(I)$，并称 $\chi_f(G)=\inf\{\sum_{I\in I(G)} c(I)\}$ 为图 G 的分数色数。

分数色数的其他等价定义可参见[3]。

对任意的图 G，有以下的关系成立：

$$\max\{\omega(G),|G|/\alpha(G)\}\leqslant\chi_f(G)\leqslant\chi(G)。\qquad (*)$$

其中 $\omega(G)$ 为图 G 的团数，$\alpha(G)$ 为独立数，$|G|$ 表示图 G 的定点数。

有关距离图着色的研究已经取得很多成果：当 $|D|=1$ 时 $\chi_f(G)=\chi(G)=2$；$|D|=|\{a,b\}|=2$ 时 $\chi_f(G)=(a+b)/\lfloor(a+b)/2\rfloor$[4]，但是如果 D 包含两个奇数则 $\chi(G)=2$，如果 D 中含两个具有不同奇偶性的数时 $\chi(G)=3$[5]；当 $|D|\geqslant 3$ 时情况比较复杂，已经求出距离集为 $D=\{a,b,a+b\}$（其中 $0<a<b$，$\gcd(a,b)=1$，$\gcd(a,b)$ 是整数 a,b 的最大公因数），$D=\{2,3,n,n+2\}$（n 为至少5的奇数），$D=\{1,2,n\}$（$n\geqslant 3$），$D=\{2,3,n\}$（$n\geqslant 6$）等距离图的色数以及距离集为 $D=\{a,b,a+b\}$（其中 $0<a<b$，$\gcd(a,b)=1$），$a\equiv b(\mathrm{mod}3)$），$D=\{1,2,\cdots m,n\}$（其中 $1\leqslant m<n$），$D=\{q,q+1,\cdots,p\}$（$q\leqslant p$），$D=\{1,2,3k\}$（$k\geqslant 1$）等距离图的分数色数。此外，文献[6,7]还分别给出了距离图 $G(\mathbf{Z},D_{m,k})$，$G(\mathbf{Z},D_{m,k,k+1})$ 以及 $G(\mathbf{Z},D_{m,k,k+1,k+2})$ 的色数和分数色数（其中 $D_{m,k}=\{1,2,\cdots,m\}-\{k\}$，$D_{m,k,k+1}=\{1,2,\cdots,m\}-\{k,k+1\}$，$D_{m,k,k+1,k+2}=\{1,2,\cdots,m\}-\{k,k+1,k+2\}$）。本文将会确定图 $G(\mathbf{Z},D_{m,k,k+1,k+2,k+3})$ 的分数色数，以及当 $2k\leqslant m\leqslant 2k+5$ 时 $G(\mathbf{Z},D_{m,k,k+1,k+2,k+3})$ 的色数。

为方便起见，用 G' 来表示距离图 $G(\mathbf{Z},D_{m,k,k+1,k+2,k+3})$，它的色数和分数色数分别用 $\chi(G')$ 和 $\chi_f(G')$ 来表示。并且把由 G' 的顶点集 $V(G)=\{0,1,\cdots,i\}$ 导出的子图记为 G'_i。

1　距离图 $G(\mathbf{Z},D_{m,k,k+1,k+2,k+3})$ 的分数色数

这一部分将通过以下几个定理来确定当 m 和 k 取不同的值时距离图 $G(\mathbf{Z},D_{m,k,k+1,k+2,k+3})$ 的分数色数。

定理1　当 $m<2k$ 时，$\omega(G')=\chi_f(G')=\chi(G')=k$。

证明　因为顶点集 $\{1,2,\cdots,k\}$ 构成了图 G' 的一个团，所以有 $\omega(G')\geqslant k$。

另一方面，定义图 G' 的一个着色 $c:\mathbf{Z}\to\{0,1,\cdots,k-1\}$，满足 $c(i)\equiv i(\mathrm{mod}k)$。由于 $\forall x,y\in\mathbf{Z}$，当 $|x-y|\in D_{m,k,k+1,k+2,k+3}$ 时，都有 $c(x)-c(y)\equiv(x-y)(\mathrm{mod}k)\neq 0$，所以 c 为 G' 的一个正常着色。故有 $\omega(G')\leqslant k$。

由 $(*)$ 有

$$\omega(G')=\chi_f(G')=\chi(G')=k。$$

文献[7]中求出了 $m\geqslant 2k$ 时距离图 $G(\mathbf{Z},D_{m,k})$ 的分数色数：

定理2　当 $m\geqslant 2k$ 时，$\chi_f(\mathbf{Z},D_{m,k})=(m+k+1)/2$。

由于 G' 是 $G(\mathbf{Z},D_{m,k})$ 的子图，所以 $\chi_f(G')\leqslant\chi_f(\mathbf{Z},D_{m,k})$。因而当 $m\geqslant 2k$ 时，$\chi_f(G')\leqslant(m+k+1)/2$。

定理3　当 $m\geqslant 2k+6$ 时，$\chi_f(G')=(m+k+1)/2$。

证明　由上面可知，当 $m\geqslant 2k+6$ 时，$\chi_f(G')\leqslant(m+k+1)/2$。

下面来证当 $m\geqslant 2k+6$ 时，$\chi_f(G')\geqslant(m+k+1)/2$：

考虑 G' 的由顶点集 $\{0,1,\cdots,m+k\}$ 导出的子图 G'_{m+k}，当 $m\geqslant 2k+6$ 时，有 $\alpha(G'_{m+k})=2$。由 $(*)$ 可知，$\chi_f(G'_{m+k})\geqslant(m+k+1)/2$。而 G'_{m+k} 是 G' 的子图，因而有 $\chi_f(G')\geqslant(m+k+1)/2$。

故结论成立。

定理4

$$\chi_f(G)=\begin{cases}(2k+1)/2, & m=2k;\\ k+1, & m=2k+1;\\ (2k+3)/2, & m=2k+2;\\ k+2, & m=2k+3;\\ (2k+5)/2, & m=2k+4;\\ k+3, & m=2k+5。\end{cases}$$

证明　(1)当 $m=2k$ 时,取 $I_i=\{j\in\mathbf{Z}\mid j-i\equiv 0$ 或 $k(\mathrm{mod}(2k+1))\}$,其中 $0\leqslant i\leqslant 2k$。易知每个 I_i 都是 G' 的独立集。下面定义一个函数 $c:I(G')\to[0,1]$,使得

$$c(I)=\begin{cases}1/2, & I=I_i,0\leqslant i\leqslant 2k;\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

易证 c 是 G' 的一个分数着色,故有 $\chi_f(G')\leqslant(2k+1)/2$。

另一方面,考虑 G' 的子图 G'_{2k},$\alpha(G'_{2k})=2$,所以 $\chi_f(G'_{2k})\geqslant(2k+1)/2$,因而 $\chi_f(G')\geqslant(2k+1)/2$。

故当 $m=2k$ 时,$\chi_f(G')=(2k+1)/2$。

(2)当 $m=2k+1$ 时,取 $I_i=\{j\in\mathbf{Z}\mid j-i\equiv 0$ 或 $k+1(\mathrm{mod}(2k+2))\}$,其中 $0\leqslant i\leqslant 2k+1$;

(3)当 $m=2k+2$ 时,取 $I_i=\{j\in\mathbf{Z}\mid j-i\equiv 0$ 或 $k+1(\mathrm{mod}(2k+3))\}$,其中 $0\leqslant i\leqslant 2k+2$;

(4)当 $m=2k+3$ 时,取 $I_i=\{j\in\mathbf{Z}\mid j-i\equiv 0$ 或 $k+2(\mathrm{mod}(2k+4))\}$,其中 $0\leqslant i\leqslant 2k+3$;

(5)当 $m=2k+4$ 时,取 $I_i=\{j\in\mathbf{Z}\mid j-i\equiv 0$ 或 $k+2(\mathrm{mod}(2k+5))\}$,其中 $0\leqslant i\leqslant 2k+4$;

(6)当 $m=2k+5$ 时,取 $I_i=\{j\in\mathbf{Z}\mid j-i\equiv 0$ 或 $k+3(\mathrm{mod}(2k+6))\}$,其中 $0\leqslant i\leqslant 2k+5$。

以上 5 种情况可以用与(1)相同的方法,分别证明相应的结论。

定理得证。

定理 4 给出了当 $2k\leqslant m\leqslant 2k+5$ 时 G' 的分数色数,下面将给出当 $2k\leqslant m\leqslant 2k+5$ 时 G' 的色数。

定理 5

$$\chi(G')=\begin{cases}k+1, & m=2k,2k+1;\\ k+2, & m=2k+2,2k+3;\\ k+3, & m=2k+4,2k+5。\end{cases}$$

证明　由(＊)式有

$$\chi_f(G')\leqslant\chi(G')。$$

再根据定理 4,可得

$$\chi(G')\geqslant\begin{cases}k+1, & m=2k,2k+1;\\ k+2, & m=2k+2,2k+3;\\ k+3, & m=2k+4,2k+5。\end{cases}$$

当 $m=2k$ 时,可以取 $I_i=\{j\in\mathbf{Z}\mid j-i\equiv 0$ 或 $k(\mathrm{mod}(2k+1))\}$,其中 $0\leqslant i\leqslant k-1$,再取 $I=\{2k,4k+1,6k+2,\cdots\}$。可以看出 I 和每个 I_i 互不相交,都是 G' 的独立集,并且满足 $(\bigcup_{i=0}^{k-1}I_i)\cup I=\mathbf{Z}$,所以 G' 是 $(k+1)$-可着色的,所以有 $\chi(G')=k+1$。

当 $m=2k+1$ 时,可以取 $I_i=\{j\in\mathbf{Z}\mid j-i\equiv 0$ 或 $k+1(\mathrm{mod}(2k+2))\}$,其中 $0\leqslant i\leqslant k$,每个 I_i 互不相交,都是 G' 的独立集,且满足 $\bigcup_{i=0}^{k}I_i=\mathbf{Z}$,所以 G' 是 $(k+1)$-可着色的,故有 $\chi(G')=k+1$。

同理可以证明,当 $m=2k+2,2k+3$ 时,$\chi(G')=k+2$;

当 $m=2k+4,2k+5$ 时,$\chi(G')=k+3$。

参考文献:

[1] EGGLETON R B, ERDOS P, SKILON D K. Colouring the real line[J]. J Combin Theory B, 1985, 39: 86-100.

[2] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with application[M]. New York: Macmillan Press Ltd, 1976.

[3] LARSEN M, PROPP J, ULLMAN D. The fractional chromatic number of Mycidlski'graphs[J]. J Graph theory, 1995, 19: 400-416.

(下转第 14 页)

(上接第 11 页)

[4] CHANG G J, HUANG L, ZHU X. Circular chromatic numbeis and fractional chromatic numbers of distance graphs[J]. European J Combin, 1998, 19:423-431.

[5] CHEN J, CHANG G J, HUANG K. Integral distance graphs[J]. J Graph Theory, 1997, 25: 287-294.

[6] WU J, YIN X. Chromatic number and fractional chromatic number of two classes of distance graphs[J]. J Nanjing Univ of Chem Tech, 2001, 23:85-87.

[7] CHANG G J, LIU D D, ZHU X. Distance graphs and T-coloring[J]. J Combin Theory: Ser B, 1999, 75:259-269.

(编辑:李晓红)