第 43 卷　第 6 期　山 东 大 学 学 报 (理 学 版)　2008 年 6 月
Vol.43　No.6　Journal of Shandong University(Natural Science)　Jun. 2008

文章编号:1671-9352(2008)06-0028-03

一般 g-期望的收敛定理

林乾,石玉峰
(山东大学数学学院,山东 济南 250100)

摘要:讨论定义在 $\ell^1(\Omega, F_T, P)$空间上一般 g-期望的一些性质,进而得到了一般 g-期望的单调收敛定理、Fatou 引理和控制收敛定理。

关键词:倒向随机微分方程;一般 g-期望;收敛定理;比较定理
中图分类号:O211.6; O211.63　**文献标志码**:A

Convergence theorems for generalized g-expectations

LIN Qian, SHI Yu-feng
(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: Some properties of the generalized g-expectations defined in $\ell^1(\Omega, F_T, P)$ were studied. Also, monotonic convergenle theorem, Fatou Lemma, and dominated convergence theorem for the generalized g-expectations were obtained.

Key words: BSDE; generalized g-expectations; convergence theorem; comparison theorem

在倒向随机微分方程理论的基础上,受经济学中期望效应理论研究的启发,Peng[1]首先提出了 g-期望和条件 g-期望的概念。这是一种性质优良的非线性数学期望,它保留了除线性之外数学期望的几乎所有的性质,对解决经济学及金融学中的重要难题提供了强有力的工具。随后 Peng[2]、Brind[3]、Coquet[4]、Jiang[5,6]等人研究了 g-期望和条件 g-期望的一些性质,取得了令人瞩目的成果。陈[7]将 g-期望的定义空间由 $L^2(\Omega, F_T, P)$推广到 $\ell^1(\Omega, F_T, P)$。这些重要进展大大促进了以 g-期望为代表的非线性数学期望理论的发展。本文将进一步讨论 $\ell^1(\Omega, F_T, P)$空间上的 g-期望的一些性质,得到一般 g-期望的收敛定理,即一般 g-期望的单调收敛定理、Fatou 引理和控制收敛定理等基本结果,补充完善 g-期望理论。

1　基本假设、定义与结论

1.1　基本假设

设(Ω, F_T, P)是一个概率空间,$(B_t)_{t\geqslant 0}$是 d 维标准 Brown 运动,设$(F_t)_{t\geqslant 0}$是由此 Brown 运动生成的自然 σ 代数流:$F_t=\sigma\{B_s, s\leqslant t\}\vee N$,$t\in[0, T]$,其中 N 是由所有的P-零测集所组成的子集类。设 T 为有限的固定正实数,本文限制在概率空间(Ω, F_T, P)上讨论问题,仅考虑 $t\in[0, T]$的过程。对任意正整数 n 以及 $z\in\mathbf{R}^n$,$|z|$表示 z 的欧氏范数。

定义如下的过程空间:

$L^p(\Omega, F_T, P):=\{\varphi:\varphi$ 是一维 F_T 可测的随机变量,使得 $E|\varphi|^p<\infty, p>1\}$,

收稿日期:2007-11-01
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771122);山东省自然科学基金资助项目(Y2006A08);国家基础研究发展计划(973)资助项目(2007CB814900)
作者简介:林乾(1982-),男,硕士研究生,研究方向为随机分析与金融数学. Email:linqian1824@mail.sdu.edu.cn
石玉峰(1970-),男,博士,教授,研究方向为随机分析、随机控制与金融数学. Email:yfshi@sdu.edu.cn

$\ell^1(\Omega, F_T, P):=\bigcup_{p>1} L^p(\Omega, F_T, P)$,

$S_F^2(0, T; \mathbf{R}):=\{\varphi \mid \varphi:[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}$ 是(F_t)循序可测；$\|\varphi\|^2=E[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\varphi_t|^2]<\infty\}$,

$H_F^2(0, T; \mathbf{R}^n):=\{\varphi \mid \varphi:[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是(F_t)循序可测；$\|\varphi\|^2=E[\int_0^T|\varphi_t|^2\mathrm{d}t]<\infty\}$。

设 $\xi\in L^2(\Omega, F_T, P)$,考虑如下的形式的 BSDE：

$$y_t=\xi+\int_t^T g(s,y_s,z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T z_s\mathrm{d}B_s,\ t\in[0, T]。\tag{1}$$

设函数 $g=g(\omega,t,y,z):\Omega\times[0, T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 满足如下的假设(H_1)与(H_2)或(H_1)与(H_3)：

(H_1) 存在非负常数 K,使得 $\forall t\in[0, T]$, $\forall y_1,y_2\in\mathbf{R}, z_1,z_2\in\mathbf{R}^n$,有

$$|g(t,y_1,z_1)-g(t,y_2,z_2)|\leqslant K(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|),\ \text{a.s.};$$

(H_2) 对 $\forall(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$,有$(g(t,y,z))_{t\in[0, T]}\in H_F^2(0, T; \mathbf{R})$；

(H_3) 对 $\forall(y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$,$(g(t,y,z))_{t\in[0, T]}$是$(F_t)$循序可测且 $\forall(t,y)\in[0, T]\times\mathbf{R}, g(t,y,0)=0$, a.s。

1.2　定义与结论

下面给出 g- 期望的概念及倒向随机微分方程的一些基本性质：

定义 1[1]（g- 期望）　设 g 满足(H_1)与(H_3),$\varepsilon_g[\cdot]:L^2(\Omega, F_T, P)\to\mathbf{R}$ 定义为 $\varepsilon_g[\xi]:=y_0$。

引理 1[1]　设 $\xi\in L^2(\Omega, F_T, P)$,$g$ 满足(H_1)与(H_2),则 BSDE(1) 存在惟一的一对平方可积的适应解$(y_t,z_t)_{t\in[0, T]}$,即：$(y_t,z_t)_{t\in[0, T]}\in S_F^2(0, T; \mathbf{R})\times H_F^2(0, T; \mathbf{R}^n)$。

引理 2[2]（比较定理）　设 $Y_1,Y_2\in L^2(\Omega, F_T, P)$,$g_1 g_2$ 满足(H_1)与(H_2),$(y_t^1,z_t^1)_{t\in[0, T]}$,$(y_t^2,z_t^2)_{t\in[0, T]}$ 分别是下面两个 BSDEs 的解：

$$y_t^1=Y_1+\int_t^T g_1(s,y_s^1,z_s^1)\mathrm{d}s-\int_t^T z_s^1\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0, T],$$

$$y_t^2=Y_2+\int_t^T g_2(s,y_s^2,z_s^2)\mathrm{d}s-\int_t^T z_s^2\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0, T]。$$

(1) 如果 $Y_1\geqslant Y_2, g_1(t,y,z)\geqslant g_2(t,y,z)$ a.s., $\forall(y,z)\in\mathbf{R}^{1+n}$,则对 $\forall t\in[0, T]$,有 $y_t{}^1\geqslant y_t{}^2$, a.s.。

(2) 若还有 $P\{Y_1>Y_2\}>0$,则有 $P\{y_t^1-y_t^2>0\}>0$,特别 $y_0{}^1>y_0{}^2$。

2　主要结果

2.1　一般 g- 期望的定义及性质

定义 2（一般 g- 期望）　设 g 满足(H_1)与(H_3),对任意的 $X\in\ell^1(\Omega, F_T, P)$,存在序列 $X_n\in L^2(\Omega, F_T, P)$ 使得$\lim_{n\to\infty}X_n=X$, a.s.,一般 g- 期望定义为：$\varepsilon_g[X]:=\lim_{n\to\infty}\varepsilon_g[X_n]$。

注 1：陈[7] 证明定义 2 中 $\varepsilon_g[X]$ 不依赖于序列$\{X_n\}$的选择且 $\varepsilon_g[X_n]$ 的极限关于 g 是惟一的。若对任意非负（相应的，非正）的 $X\in\ell^1(\Omega, F_T, P)$,存在非降（相应的，非升）序列 $X_n\in L^2(\Omega, F_T, P)$ 使得$\lim_{n\to\infty}X_n=X$, a.s.,一般 g- 期望定义为：$\varepsilon_g[X]:=\lim_{n\to\infty}\varepsilon_g[X_n]$。

为了证明一般 g- 期望的性质，需要下面的引理：

引理 3　设 $Y_1,Y_2\in L^2(\Omega, F_T, P)$,$g$ 满足(H_1)与(H_2),设$(y_t^1,z_t{}^1)_{t\in[0, T]}$,$(y_t{}^2,z_t{}^2)_{t\in[0, T]}$ 分别是下面两个 BSDEs 解：

$$y_t^1=Y_1+\int_t^T g(s,y_s^1,z_s^1)\mathrm{d}s-\int_t^T z_s^1\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0, T]。\tag{2}$$

$$y_t^2=Y_2+\int_t^T g(s,y_s^2,z_s^2)\mathrm{d}s-\int_t^T z_s^2\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0, T]。\tag{3}$$

设$(\overline{y_t},\overline{z_t})$是下面倒向随机微分方程的解：$\overline{y_t}=Y_1-Y_2-K\int_t^T[|\overline{y_s}|+|\overline{z_s}|]\mathrm{d}s-\int_t^T\overline{z_s}\mathrm{d}B_s$,则有：$y_t^1-y_t^2\geqslant\overline{y_t}$, a.s.。

证明　由式(2)和(3)得:$y_t^1 - y_t^2 = Y_1 - Y_2 + \int_t^T [g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^2, z_s^2)]\mathrm{d}s - \int_t^T [z_s^1 - z_s^2]\mathrm{d}B_s$,令:$g_1(s, y, z) := g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^1 - y, z_s^1 - z)$,则 g_1 满足(H_1)与(H_2),从而$(y_t^1 - y_t^2, z_t^1 - z_t^2)$是下面 BSDE 的惟一解:$y_t = Y_1 - Y_2 + \int_t^T g_1(s, y_s, z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T z_s \mathrm{d}B_s$。由于 g 满足(H_1)知:

$$|g_1(s, y, z)| = |g(s, y_s^1, z_s^1) - g(s, y_s^1 - y, z_s^1 - z)| \leqslant K(|y| + |z|),$$

从而:$g_1(t, y, z) \geqslant -K(|y| + |z|)$,根据比较定理得:$y_t^1 - y_t^2 \geqslant \overline{y_t}$, a.s.。证毕。

下面给出一般 g- 期望的一些性质。

定理 1　(1) 保常数性:$\varepsilon_g[c] = c, \forall c \in \mathbf{R}$;

(2) 单调性:若 $X_1, X_2 \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$ 且 $X_1 \geqslant X_2$ a.s.,则有 $\varepsilon_g[X_1] \geqslant \varepsilon_g[X_2]$;

严格单调性:若 $X_1, X_2 \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$,$X_1 \geqslant X_2$ a.s.,且 $P\{X_1 > X_2\} > 0$,则 $\varepsilon_g[X_1] > \varepsilon_g[X_2]$;

(3) 对 $\forall X_1, X_2 \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$,存在常数 C 和 $p > 1$ 且 C, p 与 X_1, X_2 无关,满足:

$$|\varepsilon_g[X_1] - \varepsilon_g[X_2]| \leqslant C\|X_1 - X_2\|_{L^p},\ \text{其中:}\ \|X\|_{L^p} := (E|X|^p)^{1/p}。$$

证明　(1) 和(2) 的单调性显然成立,(3) 由文献[7] 容易得到。下证(2) 的严格单调性:取$\{X_n\}, \{Y_n\} \in L^2(\Omega, F_T, P)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_2$,$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n \uparrow = X_1 - X_2$,从而$\lim\limits_{n\to\infty} X_n + Y_n = X_1$。因为 $P\{X_1 > X_2\} > 0$,所以存在充分大的正整数 M,使得当 $n > M$ 时,$P\{Y_n > 0\} > 0$,设(y_t^n, z_t^n)是下面倒向随机微分方程的解:$y_t^n = Y_n - K\int_t^T [|y_s^n| + |z_s^n|]\mathrm{d}s - \int_t^T z_s^n \mathrm{d}B_s$。根据比较定理得:$y_0^n$ 单调递增且 $y_0^n > 0$。设(y_t^1, z_t^1),(y_t^2, z_t^2)分别是下面两个 BSDEs 解:

$$y_t^1 = X_n + Y_n + \int_t^T g(s, y_s^1, z_s^1)\mathrm{d}s - \int_t^T z_s^1 \mathrm{d}B_s,\ y_t^2 = X_n + \int_t^T g(s, y_s^2, z_s^2)\mathrm{d}s - \int_t^T z_s^2 \mathrm{d}B_s。$$

根据引理 3 得:$\varepsilon_g[X_n + Y_n] - \varepsilon_g[X_n] \geqslant y_0^n$,两边取极限得:$\varepsilon_g[X_1] - \varepsilon_g[X_2] \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_0^n > 0$,即:$\varepsilon_g[X_1] > \varepsilon_g[X_2]$。证毕。

2.2　一般 g- 期望的收敛定理

定理 2(单调收敛定理)　设 g 满足(H_1)与(H_3),$X, X_n \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$,

(1) 若 $X_n \uparrow X$, a.s., 则有$\lim\limits_{n\to\infty} \uparrow \varepsilon_g[X_n] = \varepsilon_g[X]$;(2) 若 $X_n \downarrow X$, a.s.,则$\lim\limits_{n\to\infty} \downarrow \varepsilon_g[X_n] = \varepsilon_g[X]$。

证明　仅证(1),(2) 可以类似证明。根据 $X_n \uparrow X$ a.s.得:$|X_n| \leqslant |X_1| + |X|$,从而存在 $p > 1$,使得 $X_n \in L^p(\Omega, F_T, P)$。根据 $X_n \uparrow X$ a.s.得:$\lim\limits_{n\to\infty} |X - X_n|^p = 0$ a.s.,序列$\{\varepsilon_g[X_n]\}_{n=1}^\infty$ 单调递增,又 $0 \leqslant |X - X_n|^p \leqslant |X - X_1|^p \leqslant 2^{p-1}(|X|^p + |X_1|^p) \in L^1(\Omega, F_T, P)$,由经典的控制收敛定理得:$\lim\limits_{n\to\infty} E|X - X_n|^p = 0$,再根据定理 1 得:$|\varepsilon_g[X] - \varepsilon_g[X_n]| \leqslant C\|X - X_n\|_{L^p}$。两边取极限得:$\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_g[X_n] = \varepsilon_g[X]$,从而:$\lim\limits_{n\to\infty} \uparrow \varepsilon_g[X_n] = \varepsilon_g[X]$。证毕。

定理 3(Fatou 引理)　设 g 满足(H_1)与(H_3),$X_n, Y, Z \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$,

(1) 若 $X_n \geqslant Z$ a.s.,且$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$,则有 $\varepsilon_g[\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n] \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \varepsilon_g[X_n]$;

(2) 若 $X_n \leqslant Y$ a.s., 且$\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$,则有 $\varepsilon_g[\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n] \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \varepsilon_g[X_n]$。

证明　仅证(1),(2) 可以类似证明。令:$Y_n = \inf\limits_{k\geqslant n} X_k$,则 $Z \leqslant Y_n \uparrow \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n$,由于$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n, Z \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$得:$Y_n \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$。由定理 1 的一般 g- 期望的单调性得:$\varepsilon_g[X_n] \geqslant \varepsilon_g[Y_n]$。根据定理 2 得:$\varepsilon_g[\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n] = \varepsilon_g[\lim\limits_{n\to\infty} Y_n] = \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_g[Y_n] \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \varepsilon_g[X_n]$,即:$\varepsilon_g[\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n] \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \varepsilon_g[X_n]$。证毕。

定理 4(控制收敛定理)　设 g 满足(H_1)与(H_3),$Y \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$,$|X_n| \leqslant Y$ a.s.,若$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$, a.s.,则有$\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_g[X_n] = \varepsilon_g[X]$。

证明　由$|X_n| \leqslant Y$ a.s.和$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ a.s.得:$|X| \leqslant Y$。根据 $Y \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$得:$X_n, X \in \ell^1(\Omega, F_T, P)$。由$|X_n| \leqslant Y$得:$-Y \leqslant X_n \leqslant Y$,再根据定理3得:$\varepsilon_g[X] = \varepsilon_g[\lim\limits_{n\to\infty} X_n] = \varepsilon_g[\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n] \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \varepsilon_g[X_n] \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \varepsilon_g[X_n] \leqslant \varepsilon_g[\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n] = \varepsilon_g[X]$,即:$\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_g[X_n] = \varepsilon_g[X]$。证毕。　(下转第 33 页)

(上接第 30 页)

注 2:可以证明当 $T=\infty$ 或停时时,也有类似的收敛定理。

参考文献:

[1] PENG S G. BSDE and related g-expectations[M]// EI Karoui, Mazliak L. Pitman Research Notes in Mathematics Series(364): Backward stochastic differential equations. Harlow: Addison Walsey Longman, 1997: 141-159.

[2] KAROUI N EL, PENG S G, QUENEZ M C. Backward stochastic differential equations in finace[J]. Mathematical Finace, 1997, 7(1): 1-71.

[3] BRIAND P, COQUET F, HU Y, et al. A converse comparison theorem for BSDEs and related properties of g-expectations[J]. Electronic Communications in Probability, 2000, 5:101-117.

[4] COQUET F, HU Y, MEMIN J, et al. Filtration consistent nonlinear expectations and related g-expectations[J]. Probability Theory and Related Fields, 2002, 123(1):1-27.

[5] JIANG L. A converse comparison theorem for g-expectations [J]. Acta Mathematica Appliticae Sinica, English Series, 2004, 20(4): 701-706.

[6] JIANG L, CHEN Z. On Jensen's inequality for g-expectation[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2004, 25B(3):401-412.

[7] CHEN Z. On the generalized nonlinear mathematical expectations-g-expectation[J]. Advances in Mathematics, 1999, 28(2):175-180.

(编辑:李晓红)