文章编号:1671-9352(2008)06-0092-05

内生土地效用指数的城市经济增长优化配置模型

纪荣芳,国忠金
(泰山学院数学与系统科学系, 山东 泰安 271021)

摘要:通过将含环境因子的人口增长、土地效用指数与社会生产总量联系起来,引入含消费与土地效用指数的双变量效用函数,提出社会效用最大化问题。求解优化问题得到描述模型的三维动力系统并证明了系统存在惟一的双曲型平衡点。

关键词:均衡点;土地效用指数;最优增长路径;稳定流形定理
中图分类号:F224.1 **文献标志码:**A

An economic growth model of optimization and allocation with endogenous utility index of lands

JI Rong-fang, GUO Zhong-jin
(Department of Mathematics University of Taishan, Taian 271021, Shandong, China)

Abstract: By integrating both population growths with environmental factor, utility index of land resources, and production amounts of society, and introducing a utility function with both consumption and utility index of land resources was introduced, and the optimization problem with infinite level was also presented. A three-dimension dynamic system was obtained by solving the optimization problem. It is proved that this system has unique non-zero positive equilibrium, which is a saddle.

Key words: equilibrium point; utility index of land resources; optimal growth path; stable manifold theorem

0 引言

随着城市人口的增加和经济的发展,城市的建设用地需求量大幅度增加,同时城市化带动了城市居民的住房和政府配套的基础设施的投入。土地稀缺性日益加剧,合理、高效地利用土地资源显得尤为重要[1-5]。

本文运用许德林[6]的思想构造了包括资本,劳动力与土地资源的 Cobb-douglas 生产函数并与包含消费与土地效用指数的效用函数联系起来提出了效用最大化问题。解优化问题得到描述模型的三维动力系统,证明了系统存在惟一的双曲型平衡点且在平衡点附近存在二维稳定流形与一维不稳定流形。然后由在平衡点附近的几何分析知优化问题存在惟一的最优增长路径,土地效用指数存在最优决策值。

1 模型

1.1 生产函数

假定 t 时刻的资本,劳动力及用于生产过程的土地的份额分别为 $K(t)$, $L(t)$, $1-R(t)$,其中 $R(t)$ 为土地效用指数,且 $0 \leqslant R(t) \leqslant 1$ 生产函数为:

收稿日期:2008-04-16
作者简介:纪荣芳(1963-),女,副教授,主要从事统计方法应用研究.Email: tajrf@sina.com

$$Y(t)=F(K(t),L(t),1-R(t))=AK^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)[1-R(t)]^{\gamma}。$$

其中 A 为技术水平,$0<\alpha,\beta,\gamma<1,\alpha+\beta+\gamma=1$。

设 t 时刻社会的总消费为 $C(t)$,则 t 时刻社会的净资本积累为:

$$K'(t)=Y(t)-C(t)-\delta K(t)=AK^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)[1-R(t)]^{\gamma}-C(t)-\delta K(t),$$

其中 δ 为折旧率。

因受环境因素影响,假设劳动力满足 Logistic 分配,即:

$$L'=aL-bL^2,L(0)=L_0, \tag{1}$$

其中 $a>0$ 为增长率,$b>0$ 为拥挤系数。

由式(1),t 时刻劳动力为:

$$L(t)=\left[\frac{1}{L^*}+\left(\frac{1}{L_0}-\frac{1}{L^*}\right)e^{-at}\right]^{-1}, \tag{2}$$

其中,$L^*=\frac{a}{b}$。

1.2 效用函数

假定社会的总效用由消费与土地效用指数得到,其效用函数为强可加的对数函数形式,即:

$$U(C,R)=\theta_1\ln C+\theta_2\ln R,$$

其中,$\theta_i,i=1,2$ 为正常数。

1.3 优化问题

假定居民生命是无限的,则无限水平下的效用最大化问题为:

$$\begin{aligned}&\max\int_0^{\infty}e^{-\rho t}[\theta_1\ln C(t)+\theta_2\ln R(t)]dt\\&\text{s.t.}\,K'(t)=AK^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)[1-R(t)]^{\gamma}-C(t)-\delta K(t),\end{aligned} \tag{3}$$

其中,$0<\rho<1$ 为贴现率。

解优化问题(3) 的现值 Hamilton 函数为:

$$H=\theta_1\ln C+\theta_2\ln R+\lambda[AK^{\alpha}L^{\beta}(1-R)^{\gamma}-C-\delta K],$$

其一阶条件及横截性条件为:

$$K'=\frac{\partial H}{\partial\lambda}=AK^{\alpha}L^{\beta}-C-\delta K, \tag{4}$$

$$\lambda'=\rho\lambda-\frac{\partial H}{\partial K}=\rho\lambda-\lambda[\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}(1-R)^{\gamma}-\delta], \tag{5}$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial C}=\frac{\theta_1}{C}-\lambda, \tag{6}$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial R}=\frac{\theta_2}{R}-\gamma\lambda AK^{\alpha}L^{\beta}(1-R)^{\gamma-1}, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\lambda(t)K(t)=0。 \tag{8}$$

引理 1 一阶条件中(6),(7) 两式确定土地效用指数 R 为资本 K,消费 C,人口 L 的函数,即 $R=R(K,C,L)$,且 $\frac{\partial R}{\partial K}<0,\frac{\partial R}{\partial C}>0,\frac{\partial R}{\partial L}<0$。

证明 由(6),(7) 消去 λ 得

$$\frac{(1-R)^{\gamma}}{R}=\frac{\gamma\theta_1AK^{\alpha}L^{\beta}}{\theta_2C}, \tag{9}$$

令 $G(R)=\frac{(1-R)^{1-\gamma}}{R}$,由 $G'(R)=\frac{(1-R)^{-\gamma}(\gamma R-1)}{R^2}<0$,知 $G(R)$ 为严格单调减函数。又由(9) 得

$$R=R(K,C,L)=G^{-1}\left(\frac{\gamma\theta_1AK^{\alpha}L^{\beta}}{\theta_2C}\right), \tag{10}$$

且

$$\frac{\partial R}{\partial K}=\frac{1}{G'(R)}\frac{\gamma\theta_1\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}}{\theta_2C}<0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial C}=-\frac{1}{G'(R)}\frac{\gamma\theta_1 AK^{\alpha}L^{\beta}}{\theta_2 C^2}>0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial L}=\frac{1}{G'(R)}\frac{\gamma\theta_1\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}}{\theta_2 C}<0。$$

1.4　模型

由式(6),$\lambda=\frac{\theta_1}{C}$,对 t 求导得$\lambda'=-\frac{\theta_1 C'}{C^2}$,代入(4),(5)与(1),构成描述模型的三维动力系统:

$$K'=AK^{\alpha}L^{\beta}[1-R(K,C,L)]^{\gamma}-C-\delta K,\tag{11}$$

$$C'=C\{\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}[1-R(K,C,L)]^{\gamma}-\rho-\delta\},\tag{12}$$

$$L'=aL-bL^2,\tag{13}$$

其中,$(K,L,C)\in\mathbf{R}_+^3$。

2　主要结果

引理 2　令$f_1(K,C)=AK^{\alpha}L^{*\beta}[1-R(K,C,L^*)]^{\gamma}-C-\delta K,$

$$f_2(K,C)=\alpha AK^{\alpha-1}L^{*\beta}[1-R(K,C,L^*)]^{\gamma}-\rho-\delta,$$

其中 $L^*=\frac{a}{b}$,则在 K,C 平面的正象限上,$f_1(K,C)=0$ 与 $f_2(K,C)=0$ 有惟一的非零交点。

证明　由 $f_1(K,C)=0,f_2(K,C)=0$ 联立可得:$C=\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)K$ 将其代入$f_2(K,C)=0$ 得

$$\alpha AK^{\alpha-1}L^{*\beta}\left\{1-R\left[K,\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)K,L^*\right]\right\}^{\gamma}=\rho+\delta。\tag{14}$$

下证存在惟一的 K^* 使(14)成立。

令$h(K)=\alpha AK^{\alpha-1}L^{*\beta}\left\{1-R\left[K,\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)K,L^*\right]\right\}^{\gamma}-\rho-\delta$,则

$$h'(K)=\alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^{*\beta}\left\{1-R\left[K,\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)K,L^*\right]\right\}^{\gamma}-$$

$$\alpha\gamma AK^{\alpha-1}L^{*\beta}\left\{1-R\left[K,\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)K,L^*\right]\right\}^{\gamma-1}\left[\frac{\partial R}{\partial K}+\frac{\partial R}{\partial C}\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)\right]。$$

由引理 1 知$\frac{\partial R}{\partial K}+\alpha\frac{\partial R}{\partial C}\frac{C}{K}=0$,即$\frac{\partial R}{\partial K}+\frac{\partial R}{\partial C}\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)>0$, 故 $h'(K)<0$。

再由(10)知$\frac{\left\{1-R\left[K,\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)K,L^*\right]\right\}^{1-\gamma}}{R\left[K,\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)K,L^*\right]}=\frac{\gamma\theta_1 AK^{\alpha-1}L^{*\beta}}{\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)\theta_2}$,

则$\lim\limits_{K\to0^+}R\left[K,\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)K,L^*\right]=0$, $\lim\limits_{K\to\infty}R\left[K,\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)K,L^*\right]=1$,

从而$\lim\limits_{K\to0^+}h(K)=+\infty$,$\lim\limits_{K\to\infty}h(K)=-\rho-\delta<0$。

综上,存在惟一的 K^* 使(14)成立,从而$f_1(K,C)=0$与$f_2(K,C)=0$有惟一的非零交点(K^*,C^*)其中 $C^*=\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)K^*$ 且 $K^*>0$。

定理 1　三维动力系统(11),(12),(13)存在惟一的非零平衡点。

证明　由(1)$L'=0$,可得 $L^*=0$ 或 $L^*=\frac{a}{b}$。

若 $L^*=0$ 则代入 $K'=0,C'=0$ 知 $K^*=0,C^*=0$。

若 $L^*=\frac{a}{b}$,则由引理 2 知存在惟一的非零点 $P^*=(K^*,C^*,L^*)$为模型的平衡点。

引理 3　由模型动力系统与引理 1 可知在平衡点 P^* 处有

$$\left(\frac{\partial K'}{\partial K}+\frac{\partial C'}{\partial C}\right)\Big|_{P^*}=\rho,\left(\frac{\partial K'}{\partial K}\frac{\partial C'}{\partial C}-\frac{\partial K'}{\partial C}\frac{\partial C'}{\partial K}\right)\Big|_{P^*}<0。$$

证明 $\frac{\partial K'}{\partial K}=\alpha Ak^{\alpha-1}L^{\beta}[1-R(K,C,L)]^{\gamma}-\delta-\gamma AK^{\alpha}L^{\beta}[1-R(K,C,L)]^{\gamma-1}\frac{\partial R}{\partial K}$,

$$\frac{\partial C'}{\partial C}=-\alpha\gamma Ak^{\alpha-1}L^{\beta}[1-R(K,C,L)]^{\gamma-1}\frac{\partial R}{\partial C}C,$$

$$\frac{\partial K'}{\partial C}=-\gamma Ak^{\alpha}L^{\beta}[1-R(K,C,L)]^{\gamma-1}\frac{\partial R}{\partial C}-1,$$

$$\frac{\partial C'}{\partial K}=C\left\{\alpha(\alpha-1)Ak^{\alpha-2}L^{\beta}[1-R(K,C,L)]^{\gamma}-\alpha\gamma AK^{\alpha-1}L^{\beta}[1-R(K,C,L)]^{\gamma}\frac{\partial R}{\partial K}\right\}。$$

由引理1知 $\frac{\partial R}{\partial K}+\alpha\frac{\partial R}{\partial C}\frac{C}{K}=0$,从而

$$\left(\frac{\partial K'}{\partial K}+\frac{\partial C'}{\partial C}\right)\Big|_{P^*}=\rho,$$

$$\left(\frac{\partial K'}{\partial K}\frac{\partial C'}{\partial C}-\frac{\partial K'}{\partial C}\frac{\partial C'}{\partial K}\right)\Big|_{P^*}=-(1-\alpha)(\rho+\delta)\left(\frac{\rho+\delta}{\alpha}-\delta\right)-$$

$$\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}(\rho+\delta)+\delta-\alpha\delta\right]\frac{\gamma AK^{\alpha}L^{\beta}}{(1-R)^{1-\gamma}}\frac{\partial R}{\partial K}\Big|_{P^*}<0。$$

由 Hartman-Grobman 定理和稳定流形定理,可得:

引理4 动力系统(11)~(13)的惟一非零平衡点 $P^*=(K^*,C^*,L^*)$ 为鞍点,且平衡点的稳定流形与不稳定流形分别为二维与一维。

证明 令

$$a_{11}=\frac{\partial K'}{\partial K}\Big|_{P^*},a_{12}=\frac{\partial K'}{\partial C}\Big|_{P^*},a_{13}=\frac{\partial K'}{\partial L}\Big|_{P^*},$$

$$a_{21}=\frac{\partial C'}{\partial K}\Big|_{P^*},a_{22}=\frac{\partial C'}{\partial C}\Big|_{P^*},a_{23}=\frac{\partial C'}{\partial L}\Big|_{P^*},$$

则三维动力系统(11)~(13)在平衡点 P^* 处的线性化方程的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&0&-a\end{pmatrix}。$$

特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$。特征根为:

$$\lambda_1=\frac{-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_1+\sqrt{\mathrm{tr}^2\boldsymbol{A}_1-4|\boldsymbol{A}_1|}}{2},$$

$$\lambda_2=\frac{-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_1-\sqrt{\mathrm{tr}^2\boldsymbol{A}_1-4|\boldsymbol{A}_1|}}{2},$$

$$\lambda_3=-a,$$

其中,$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$,$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_1$ 与 $|\boldsymbol{A}_1|$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 的迹与行列式。

由引理2知,$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_1=a_{11}+a_{22}>0$, $|\boldsymbol{A}_1|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}<0$。故 λ_1 为正实根,λ_2 为负实根,λ_3 为负实根,由此得结论成立。

由此,得到下面的结论:

定理2 当 $a\neq\lambda_1$ 时,优化问题(3)在局部存在惟一解。

证明 设对应于特征值 λ_3 的特征向量为 $\boldsymbol{v}_3=(v_{31},v_{32},v_{33})^{\mathrm{T}}$,则 $v_{33}\neq 0$。否则,λ_3 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二重根,矛盾。

对应于特征值 λ_2 的特征向量 $\boldsymbol{v}_2=(v_{21},v_{22},v_{23})^{\mathrm{T}}$,满足 $(\lambda_2-a_{11})v_{21}-a_{12}v_{22}=0$, $v_{23}=0$。因而,$\boldsymbol{u}_2=\left(1,\frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}},0\right)^{\mathrm{T}}$ 为对应于特征值 λ_2 的一个特征向量。动力系统(11)~(13)在平衡点处的线性化系统的稳

定子空间为 $E^S = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2\}$，它为三维空间的一个平面，该平面的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = \left(\frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} v_{33}, -v_{33}, -\frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} v_{31} + v_{32}\right)^{\mathrm{T}}$。空间直线 $K = K_0, L = L_0$ 与平面存在惟一的交点。

由稳定流形定理,动力系统(11) ~ (13)的稳定流形 W^S 与 E^S 在平衡点处相切。对于充分接近 K^*, L^* 的初值 K_0, L_0,直线 $K = K_0, L = L_0$ 与稳定流形 W^S 存在惟一的交点,即存在惟一的 C_0 使 $(K_0, C_0, L_0) \in W^S$。因此,优化问题(3)局部地存在最优解。

定理 3　土地效用指数存在惟一最优决策值

$$R^* = R(K^*, C^*, L^*) = \frac{\theta_2(\rho + \delta - \alpha\delta)}{\theta_2(\rho + \delta - \alpha\delta) + (\rho + \delta)\gamma\theta_1}。$$

证明　由式(12)知:$[1 - R(K^*, C^*, L^*)]^\gamma = \frac{\rho + \delta}{\alpha A K^{*\alpha-1} L^{*\beta}}$,

代入式(9),有$\frac{[1 - R(K^*, C^*, L^*)]^{1-\gamma}}{R(K^*, C^*, L^*)} = \frac{\gamma\theta_1 A K^{*\alpha} L^{*\beta}}{C^* \theta_2}$,

由此得 $R^* = R(K^*, C^*, L^*) = \frac{\theta_2(\rho + \delta - \alpha\delta)}{\theta_2(\rho + \delta - \alpha\delta) + (\rho + \delta)\gamma\theta_1}$。

3　讨论与分析

由定理 3 知模型存在最优的经济增长路径。随着经济增长,城市的土地效用指数最终达到一个稳定水平:

$$R^* = \frac{\theta_2(\rho + \delta - \alpha\delta)}{\theta_2(\rho + \delta - \alpha\delta) + (\rho + \delta)\gamma\theta_1} = 1 - \frac{(\rho + \delta)\gamma\theta_1}{\theta_2(\rho + \delta - \alpha\delta) + (\rho + \delta)\gamma\theta_1}。$$

且由社会居民对消费和土地效用指数的偏好系数(θ_1 与 θ_2)资本折旧率(δ),贴现率(ρ)以及生产过程中,资本与土地所占份额(α 与 γ)这六个参数确定且 R^* 与 ρ, θ_2 正相关与 $\gamma, \theta_1, \alpha, \delta$ 负相关。在假定其他参数不变前提下,若社会居民对土地效用指数更加偏好(即有相对较大的 θ_2)或贴现率 ρ 较大时,则社会的土地效用指数将达到一个较高的稳定水平。

反之,在假定其他参数不变的前提下,若社会居民更加偏好于消费(即有相对较大的 θ_1)或生产过程中资本与土地所占份额比较大(即有相对较大的 α 与 γ)或资本的折旧率比较大(即有相对较大的 δ)时,社会的土地效用指数将为一个比较低的水平,大量的土地资源将被投入到了生产中。这些结果与现实世界的发展是非常一致的。对于发展中国家,居民追求更高的消费水平,并且大量的资本与土地资源被投入到了经济的发展中,从而,稳定状态下的土地效用指数是比较低的。而对于发达国家,居民更倾向于追求舒适的生活环境,从而稳定状态下的土地效用指数比较高。

参考文献:

[1] STOKEY N. Are there limits to growth? [J]. International Economic Review, 1998, 39(1):1-33.

[2] NGAI L R. Barriers and the transition to modern economic growth[J]. Journal of Monetary Economics, 2004, 51:1353-1383.

[3] COPELAND B R, TAYLOR M S. Trade, growth and the environment[EB/OL]. [2008-01-21]. http://www.ssc.wisc.edu/econ/archive/wp2003-10.pdf.

[4] Ricardo Hausman, Lant Pritchett, Dani Rodrik. Growth accelerations[J]. Journal of Economic Growth, 2005, 10(4):303-329.

[5] BROCK W, TAYLOR M S. Economic growth and the environment: a review of theory and empirics[EB/OL]. [2008-01-21]. http://www.nber.org/papers/w10854.

[6] 许德林,欧名豪,杜江.土地利用规划与城市规划协调研究[J].现代城市研究,2004(1):46-49.

(编辑:李晓红)