第 43 卷　第 6 期　山东大学学报(理学版)　2008 年 6 月
Vol.43　No.6　Journal of Shandong University(Natural Science)　Jun. 2008

文章编号:1671-9352(2008)06-0012-03

某些 5-连通图中最长圈上的可收缩边

杨朝霞
(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要:给出某些 5-连通图中某些最长圈上的可收缩边的分布情况,得到如下结果:某些 5-连通图的某些最长圈上至少有两条可收缩边。

关键词:连通度;可收缩边;断片;端片
中图分类号:O157.5　　**文献标志码:**A

The contractible edges of the longest cycle in some 5-connected graphs

YANG Zhao-xia
(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: The distribution of the contractible edges on some longest cycles of some 5-connected graphs was given. The results show that some of the longest cycles of some 5-connected graphs have at least two contractible edges.

Key words: connected degree; contractible edge; cut fragment; end-fragment

0　引言

本文考虑的都是有限简单图,所采用的符号和术语均与文献[1]一致。

G 是 5-连通图,$V(G)$和 $E(G)$分别表示 G 的顶点集和边集,若 $x\in V(G)$,$d(x;G)$表示 x 在 G 中的度,一般在不引起歧义的情况下,用 $d(x)$代替 $d(x;G)$。$e\in E(G)$,如果收缩 e 后,G 仍是 5-连通的,则 e 是 G 的可收缩边,显然,若 e 是 G 的不可收缩边,则 G 中存在一个包含 e 的两个端点的 5-点割。G 的所有可收缩边记为 $E_C(G)$。

设 $A,B\subset V(G)$,$A\cap B=\emptyset$,$A\neq\emptyset\neq B$,定义$\langle A,B\rangle=\{xy\in E(G):x\in A,y\in B\}$。用 N 表示 $V(G)$的非空子集,则 N 在 G 中的导出子图用$[N]$表示。G 中两点 x 与 y 之间的路记为(x,y)-路。

若 $e=xy\in E(G)$,且 $xy\notin E_C(G)$。则易知 G 中存在包含 x 和 y 的 5-点割 T,称 $G-T$ 的各个连通分支为断片。设$E_0\subseteq E(G)-E_C(G)$,$xy\in E_0$,T 是包含 x,y 的 5-点割,则 T 称为 E_0-点割,称 $G-T$ 的各个连通分支为 E_0-断片。如果 E_0-断片不包含其他 E_0-断片作为它的真子集,则称它为 E_0-端片。特别地,若 A 是一个断片,且$|A|=2$,则称 A 为 2-断片。

1999 年尹建华[2]给出了 4-连通图的可去边的定义,同时证明了 4-连通图不存在可去边的充要条件。收缩边运算和可去边运算不仅是连通图构造的有力工具,在使用归纳法证明连通图的一些性质中也起到重要作用。近年来,连通图中可去边与可收缩边的存在性及其分布的情况成为人们十分关注的课题。2003 年吴吉昌等给出某些 4-连通图中圈上的可收缩边和可去边的分布情况[3]。2004 年徐丽琼给出 4-连通图上存在

收稿日期:2007-12-21
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60673059)
作者简介:杨朝霞(1983-　),女,博士研究生,研究方向为组合最优化.Email:zhaoxia.yang@163.com

至少两条可去边的充分条件[4]。而对于5-连通图中可去边与可收缩边的分布情况的研究,几乎还是空白。本文考虑5-连通图中某些最长圈上的可收缩边的分布情况。

1 主要结果

本文的主要结果以及其证明。

引理 1 设 $P: x = x_1x_2\cdots x_n = y$ 是5-连通图 G 的一条最长 (x,y)-路。若 x_ix_{i+1} 是一条不可收缩边,且 $S = \{x_i, x_{i+1}, u_1, u_2, u_3\}$ 是其相应的5-点割,则 $G-S$ 的每一个断片至少包含 P 上的一个点。

证明 反证法。设 A 是 $G-S$ 的一个断片,且 $A\cap V(P)=\emptyset$。既然 $\langle\{x_i\},A\rangle\neq\emptyset$, $\langle\{x_{i+1}\},A\rangle\neq\emptyset$,从而存在 $x_iv_1\in\langle\{x_i\},A\rangle$, $x_{i+1}v_2\in\langle\{x_{i+1}\},A\rangle$。既然 A 是 $G-S$ 的断片,则有 $P_1: v_1 = y_1y_2\cdots y_t = v_2$ 是 A 中的一条 (v_1,v_2)-路,(包含 $v_1=v_2$ 的情形),则 $P' = P - x_ix_{i+1}\cup x_iv_1\cup P_1\cup x_{i+1}v_2$ 是 G 中比 P 更长的 (x,y)-路,矛盾。故 $G-S$ 的各个片断至少包含 P 上的一个顶点。

引理 2 设 G 是5-连通图且 G 不包含2-断片。$P: x = x_1x_2\cdots x_n = y$ 是 G 的一条最长 (x,y)-路。若路 P 上任一顶点 x_i 都满足以下条件之一,则 P 至少包含一条可收缩边。

(1) $d(x_i)\geqslant 6$;

(2) $d(x_i)=5$,则 $[V(P)]$ 中无3-圈包含它。

证明 反证法。假设 P 上的边都是不可收缩边。设 $E_0 = E(P)$,则对于每一条边 x_ix_{i+1},都有相应的 E_0-点割 $S=\{x_i,x_{i+1},u_1,u_2,u_3\}$ 包含它,且对于 $G-S$ 的每一个连通分支都是 E_0-断片。设 A 是 $G-S$ 的一个 E_0-断片,易知每一个 E_0-断片都包含一个 E_0-端片作为它的子集,不失一般性,可设 A 是一个 E_0-端片,而 $B = G-A-S$ 是其他 E_0-断片之和。由引理1可知 $E(P)\cap\langle A,S\rangle\neq\emptyset$,设 $uv_1\in E(P)\cap\langle A,S\rangle$,其中 $u\in\{x_i,x_{i+1},u_1,u_2,u_3\}$, $v_1\in A$。既然 $uv_1\in E_0$ 是不可收缩边,设其对应的 E_0-点割为 $T=\{u,v_1,w,s,t\}$,令 $G-T = C\cup D$,其中 $C\neq\emptyset\neq D$,注意到 C 和 D 不一定是连通的。易知 $u\in S\cap T$, $v_1\in A\cap T$。设

$$X_1 = (C\cap S)\cup(S\cap T)\cup(A\cap T),$$
$$X_2 = (D\cap S)\cup(S\cap T)\cup(A\cap T),$$
$$X_3 = (D\cap S)\cup(S\cap T)\cup(B\cap T),$$
$$X_4 = (C\cap S)\cup(S\cap T)\cup(B\cap T)。$$

分以下几种情形讨论:

(1) $A\cap C\neq\emptyset$。

此时,X_1 是 G 的一个点割。此时必有 $|X_1|\geqslant 6$ 成立,否则,有 $|X_1|=5$ 成立。既然 $uv_1\in E_0\cap E([X_1])$,则 X_1 是 G 的 E_0-点割,$A\cap C$ 是 $G-X_1$ 的 E_0-断片(或 E_0-断片的和),与 A 是 G 的 E_0-端片相矛盾。故 $|X_1|\geqslant 6$。注意到 $|S|+|T| = |X_1|+|X_3| = 10$,故 $|X_3|\leqslant 4$,由 G 是5-连通图可知 $B\cap D=\emptyset$ 我们说 $D\cap S\neq\emptyset$,否则,有 $D = D\cap A$,则 D 是包含在 A 中的 E_0-端片,与 A 是 G 的 E_0-端片相矛盾。故 $D\cap S\neq\emptyset$。此时又分以下几种情况:

(1.1) 若 $B\cap T\neq\emptyset$,易知只有 $|B\cap T|=1$ 或 2 成立。

(1.1.1) 若 $|B\cap T|=1$, $|X_3|\leqslant 4$,此时 $|S\cap T|=1$ 或 2。

若 $|S\cap T|=2$,则 $|A\cap T|=2$,且因为 $|X_3|\leqslant 4$,有 $|S\cap D|=1$,从而 $|S\cap C|=2$。此时 $|X_2|=5$,则 $A\cap D=\emptyset$,否则 $A\cap D\neq\emptyset$,注意到 $uv_1\in E([X_2])$,因而 X_2 是 G 的 E_0-点割,$A\cap D$ 是 $G-X_2$ 的 E_0-断片(或 E_0-断片的和),与 A 是 G 的 E_0-端片相矛盾。故 $A\cap D=\emptyset$。$|D| = S\cap D| = 1$,设 $D=\{v\}$,则 vuv_1v 是 G 的3-圈。既然 P 是 G 的一条最长 (x,y)-路,易知 $v\in V(P)$, $d(v)=5$,与题设相矛盾。

若 $|S\cap T|=1$, 则 $|A\cap T|=3$, $|X_1|\geqslant 6$,则 $|S\cap C|\geqslant 2$, $|D\cap S|\leqslant 2$,此时又分两种情况:

若 $|S\cap C|=2$, $|D\cap S|=2$,则 $|X_4|=4$, $|X_3|=4$,故 $B\cap C=\emptyset$, $B\cap D=\emptyset$,否则,X_3, X_4 是 G 的4-点割,与 G 是5-连通图矛盾。故 $B = B\cap T = \{v\}$, $d(v)=5$ 且有3-圈包含它,矛盾。

若 $|S\cap C|=3$, $|D\cap S|=|S\cap T|=1$,则 $|X_2|=5$, $A\cap D=\emptyset$,若 $A\cap D\neq\emptyset$,类似前面所证可得矛盾。故 $|D|=1$,设 $D=\{v\}$, $d(v)=5$ 且有 3-圈包含它,矛盾。

(1.1.2) 若 $|B\cap T|=2$,此时 $|S\cap T|=1$ 或 2。若 $|S\cap T|=1$,则 $|A\cap T|=2$, $|S\cap D|=1$, $|S\cap C|=3$, $|X_2|=4$, $A\cap D=\emptyset$,得 $|D|=|S\cap D|=1$,类似前面所证可得矛盾。若 $|S\cap T|=2$,则 $|A\cap T|=1$, $|S\cap C|=3$, $S\cap D=\emptyset$,矛盾。

(1.2) 若 $B\cap T=\emptyset$,则 $B=B\cap C\neq\emptyset$, $|X_4|\geqslant 5$, $|S|=5$,所以 $D\cap S=\emptyset$,但 $D\cap S\neq\emptyset$,矛盾。
所以 $A\cap C=\emptyset$,同理可证 $A\cap D=\emptyset$。

(2) $A\cap C=\emptyset=A\cap D$。此时有 $A=A\cap T\neq\emptyset$。若 $|A\cap T|=1$,则可知 $A\cap T=\{v_1\}$, $d(v_1)=5$ 且有 3-圈包含它,矛盾。故 $|A\cap T|\geqslant 2$, $u\in S\cap T$, $|B\cap T|\leqslant 2$。

(2.1) 若 $|B\cap T|=2$。则 $|S\cap T|=1$, $|A|=|A\cap T|=2$ 与题设 G 不包含 2-断片矛盾。

(2.2) 若 $|B\cap T|=1$。则 $|S\cap T|=1$ 或 2。若 $|S\cap T|=1$, $|S|=5$,由 $S\cap C$ 与 $S\cap D$ 的对称性,只需讨论 $|S\cap C|=2$ 或 1,则同(1.1.1)所证可得矛盾。若 $|S\cap T|=2$,则 $|S\cap C|=1$ 或 2,由对称性,可设 $|S\cap C|=1$,类似前面所证可得矛盾。

(2.3) 若 $|B\cap T|=0$。$u\in S\cap T$, $|S\cap T|\geqslant 1$,由 $S\cap C$ 与 $S\cap D$ 的对称性,可知总有 $|X_3|\leqslant 4$ 或 $|X_4|\leqslant 4$ 成立,故 $B\cap C=\emptyset$ 或 $B\cap D=\emptyset$。不妨设 $B=B\cap C\neq\emptyset$, $|X_4|\geqslant 5$,此时只有 $|X_4|=5$ 成立,此时 $D\cap S=\emptyset$, $B\cap D=\emptyset$,故 $D=\emptyset$,矛盾。
由以上讨论可知原命题成立。

定理 1　设 G 是 5-连通图且 G 不包含 2-断片, $C=x_1x_2\cdots x_nx_1$ 是 G 的任意最长圈,若 C 上的任意顶点 x_i 都满足以下条件之一,则 G 至少包含两条可收缩边。

(1) $d(x_i)\geqslant 6$;

(2) $d(x_i)=5$,则 $[V(C)]$ 中无 3-圈包含它。

证明　设 $x'y'$ 是 C 上的一条边,显然 $P=C-x'y'$ 是 G 中一条最长 (x',y')-路。由引理 2 可知, P 至少包含一条可收缩边,设为 uv,则 $P'=C-uv$ 是 G 中一条最长 (u,v)-路,由引理 2 可知 P' 包含一条可收缩边,设为 xy。因而 $xy\neq uv$ 是 C 上两条可收缩边。
定理得证。

致谢:感谢导师李国君教授的帮助!

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. Amsterdam: North-Holland, 1976.
[2] YIN J H. Removable edges in 4-connected graphs and the structures of 4-connected graphs[J]. J Systems Sci Math Sci, 1999, 19(4): 434-438.
[3] WU J C, LI X L. Removable edges and contractible edges in cycles of 4-connected graphs[J]. Journal of Xiamen University: Natural Science, 2003, 5:16-19.
[4] XU L Q. Removable edges in connected graphs and the construction of connected graphs[D]. Xiamen: Xiamen University, 2005.

(编辑:李晓红)