第 44 卷 第 10 期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2009 年 10 月
Vol.44 No.10 Journal of Shandong University(Natural Science) Oct. 2009

文章编号:1671-9352(2009)10-0017-04

含相邻三角形的平面图的列表边和列表全染色

董爱君,李国君*,邹青松
(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要:给定一个平面图 G, $\chi'_l(G)$和 $\chi''_l(G)$分别表示图 G 的列表边色数和列表全色数。证明了:如果一个平面图 G 满足 $\Delta(G)\geqslant 7$,并且任何一个三角形至多和一个其他的三角形相邻,则有 $\chi'_l(G)\leqslant\Delta(G)+1$ 和 $\chi''_l(G)\leqslant\Delta(G)+2$ 成立。

关键词: 三角形;列表边色数;列表全色数
中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A

List edge and list total colorings of planar graphs with adjacent triangles

DONG Ai-jun, LI Guo-jun*, ZUO Qing-song
(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: Given a planar graph G, let $\chi'_l(G)$ and $\chi''_l(G)$ denote the list edge chromatic number and list total chromatic number of G respectively. It is proved that if a planar graph G with $\Delta(G)\geqslant 7$ such that a triangle is adjacent to at most one triangle, then $\chi'_l(G)\leqslant\Delta(G)+1$ and $\chi''_l(G)\leqslant\Delta(G)+2$.

Key words: triangle; list edge chromatic number; list total chromatic number

0 引言

本文仅考虑简单平面图。未定义的术语和符号请参阅[1]。本文用 $V(G)$, $E(G)$, $\delta(G)$和 $\Delta(G)$分别表示图 G 的顶点集合,边集合,图的最小度数和最大度数。用 $d_G(v)$表示点 v 在图 G 中的度。度数至少为 k 的点,记为 k^+-点。三角形即长为 3 的圈。已嵌入到平面中的图 G 的面 f 的集合记为 $F(G)$;面 f 的度记为 $d(f)$; 与面 f 相关联的点的最小度记为 $\delta(f)$。度数至少为 k 的面记为 k^+-面;当且仅当两个圈有一条公共边称两个圈相邻。长为 k 的路称 k-路。

设 $c: E(G)\cup V(G)\rightarrow\{1,2,\cdots,k\}$是从 G 的边集和 顶点集构成的集合 $E(G)\cup V(G)$到自然数集的一个映射,如果对于任意 相邻或相关联的两个元素 $x,y\in E(G)\cup V(G)$,均有 $c(x)\neq c(y)$,则称 c 是 G 的一个正常全染色。列表全染色是全染色的推广,对图 G 的每个元素 $x\in E(G)\cup V(G)$给定一个颜色集合记为 $L(x)$,得列表 $L=\{L(x)\mid x\in E(G)\cup V(G)\}$。若图 G 存在正常全染色 c 使得对于任意的元素 $x\in E(G)\cup V(G)$,都有 $c(x)\in L(x)$,则称 G 是全-L-可染的。令 $f: E(G)\cup V(G)\rightarrow N$ 是从 G 的边集和顶点集所构成的集合到自然数集的正整数函数,若对任意的颜色列表 L 满足:对任意的元素 $x\in E(G)\cup V(G)$都有 $f(x)=|L(x)|$,则称 G 是全-f-可选择的。使图 G 存在全-k-可选择的最小正整数 k 称为 G 的列表全色数,记为 $\chi''_l(G)$。列表边色数的定义类似于列表全色数的定义,所不同的是仅考虑对图 G 的边进行染色,这里不再

收稿日期:2009-03-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60673059)
作者简介:董爱君(1976-),男,硕士研究生,主要研究方向为图论及组合优化.Email: ajdongmath@126.com
* **通讯作者:**李国君(1958-),男,教授,主要研究方向为生物信息学,图论及组合优化.Email: gjli@sdu.edu.cn

重述。

关于图 G 的列表边染色和列表全染色的重要猜想如下:

猜想 1[2] 如果 G 是一个多重图,则 $\chi'_l(G)=\chi'(G)$。

这就是著名的列表染色猜想。对于二部重图[3],外平面图[4],$\Delta(G)\geqslant 12$ 且可嵌入非负特征曲面上的图[5]以及不含某些短圈的平面图[6-9]等已经验证了猜想 1 是成立的。但对于大多数图类,猜想 1 还没有得到验证。Vizing 提出了以下弱化的列表边染色猜想[10]:

猜想 2 每个简单图 G 是边-$(\Delta(G)+1)$-可选择的。

对于 $\Delta(G)\geqslant 9$ 的平面图[11],不含 k-圈的平面图($3\leqslant k\leqslant 6$)[12-15]等,猜想 2 已经得到了证明。

猜想 3[5] 如果 G 是一个多重图,则

$$\chi''_l(G)=\chi''(G)。$$

这就是著名的列表全染色猜想。对于外平面图[4],$\Delta(G)\geqslant 12$ 且可嵌入非负特征曲面上的图[5]以及不含某些短圈的平面图[7-8,16]等已经验证了猜想 3 是成立的。本文运用欧拉公式和赋权分配的方法,对含有相邻三角形的平面图进行了研究。

1 主要定理及证明

定理 1 给定平面图 G,如果 $\Delta(G)\geqslant 7$,并且任何一个三角形至多和一个其他的三角形相邻,则 $\chi'_l(G)\leqslant\Delta(G)+1$ 且 $\chi''_l(G)\leqslant\Delta(G)+2$。

证明 不妨设图 G 已被嵌入到平面中,且是满足定理假设的一个极小反例。如果 G 不是边-$(\Delta(G)+1)$-可选择的,则存在一个满足条件"对于任意的边 $e\in E(G)$,$|L(e)|=\Delta(G)+1$"的边列表 L,使得 G 不是边-L-可染的;如果 G 不是全-$(\Delta(G)+2)$-可选择的,则存在一个满足条件"对于任意的元素 $x\in E(G)\cup V(G)$,$|L'(x)|=\Delta(G)+2$"的全列表 L',使得 G 不是全-L'-可染的。又由图 G 的极小性可得如下结论:

(a) 图 G 是连通的。

(b) 图 G 的任何点 $v\in V(G)$,至多与$\lfloor\frac{2d(v)}{3}\rfloor$个 3-面相关联。

(c) 图 G 不包含满足条件 $d(u)+d(v)\leqslant\Delta(G)+2$ 并且 $\min\{d(u),d(v)\}\leqslant\lfloor\frac{\Delta(G)+1}{2}\rfloor$的边 $uv\in E(G)$。

(d) 令 G_3 是由图 G 中所有与 3 度点相关联的边所导出的子图,则 G_3 是森林。

(e) G_3是具有二分类(V_1,V_2)的二部图,则 G_3 包含一个二部子图 $G'=(V'_1,V'_2)$满足 $V_1=V'_1$,且对任意的点 $v\in V'_1$,$u\in V'_2$ 满足 $d_G(v)=3$,$d_{G'}(v)=2$;$d_G(u)=\Delta(G)$,$d_{G'}(u)=1$。

结论(a),(b)是显然的。结论(c),(d),(e)的证明思想来源于文献[16],为了 文章的完整性,特给出证明。下证(c):若图 G 包含边 $e=uv$ 满足条件 $d(u)+d(v)\leqslant\Delta(G)+2$ 且 $\min\{d(u),d(v)\}\leqslant\lfloor\frac{\Delta(G)+1}{2}\rfloor$,令 $G_1=G-\{e\}$,由 G 的极小性可得 G_1 是边-$(\Delta(G)+1)$-可选择的,或者 G_1 是全-$(\Delta(G)+2)$-可选择的。如果 G_1 是边-$(\Delta(G)+1)$-可选择的,从而 G_1 是边-L-可染的,因为 $d_{G_1}(u)+d_{G_1}(v)\leqslant\Delta(G)+2-2=\Delta(G)$,所以边 e 最多与 $\Delta(G)$条已染色边相邻,$L(e)$中至少有一种颜色可用,从而 e 可以用它的颜色列表中的颜色正常染色,从而 G 是边-L-可染的,这与 G 是反例相矛盾。如果 G_1是全-$(\Delta(G)+2)$-可选择的,从而 G_1 是全-L'-可染的,下证 G 也是全-L'-可染的。不妨设 $d(u)\leqslant d(v)$,有条件可得 $d(u)\leqslant\lfloor\frac{\Delta(G)+1}{2}\rfloor$。首先擦掉点 u 上的颜色,因为边 e 最多与 $\Delta(G)$条已染色边相邻,与一个已染色的点相关联,从而 $L'(e)$中至少有一种颜色可用,从而 e 可以用它的颜色列表中的颜色正常染色。因为点 u 最多分别与$\lfloor\frac{\Delta(G)+1}{2}\rfloor$个已染色的点相邻,与$\lfloor\frac{\Delta(G)+1}{2}\rfloor$个已染色的边相关联,$L'(u)$中至少有一种颜色可用,从而 u 可以用它的颜色列表中的颜色正常染色,从而 G 是全-L'-可染的,这与 G 是反例相矛盾。至此(c)得证。

由(c)显然 G_3 不包含奇圈。下证 G_3 也不包含偶圈:假设 G_3 包含一个偶圈 $C=v_1v_2\cdots v_{2t}v_1$,其中$d(v_1)=d(v_3)=\cdots=d(v_{2t-1})=3$。令 $G_1=G-E(C)$,由 G 的极小性可得 G_1 是边-$(\Delta(G)+1)$-可选择的,或者 G_1 是全-$(\Delta(G)+2)$-可选择的。如果 G_1是边-$(\Delta(G)+1)$-可选择的,从而 G_1是边-L-可染的。对于任意的边 $e\in E(C)$,e 与 $\Delta(G)$-1 条已染色的边相邻,所以 $L(e)$中至少有两种颜色可用。显然圈 C 的边可以用它的颜色列表中的颜色进行染色,这与 G 是反例相矛盾。如果 G_1 是全-$(\Delta(G)+2)$-可选择的,从而 G_1 是全-L'-可染的,下证 G 也是全-L'-可染的。首先擦掉点 $v_1,v_3,\cdots,v_{2t-1}$上的颜色,对于任意的边 $e\in E(C)$,e 分别与 $\Delta(G)$-1 条已染色的边相邻,与一个已染色的点相关联。从而 $L'(e)$中至少有一种颜色可用,从而 e 可以用它的颜色列表中的颜色正常染色。下面我们给点 $v_1,v_3,\cdots,v_{2t-1}$染色:对于任意的点 $v\in\{v_1,v_3,\cdots,v_{2t-1}\}$,点 v 分别与三个已染色的点相邻和三条已染色的边相关联。所以 $L'(v)$中至少有一种颜色可用,从而 v 可以用它的颜色列表中的颜色正常染色,从而 G 是全-L'-可染的,这与 G 是反例相矛盾。至此(d)得证。

由于 G_3 是森林,显然 G_3 是一个二部图,不妨设 G_3 是具有二分类(V_1,V_2)的二部图,满足任意的 $v\in V_1$ 有 $d_G(v)=3$,任意的点 $v\in V_2$ 有 $d_G(v)=\Delta(G)$。对 G_3 的任意一个连通分支树,选择一个 3 度点做为树的根。显然自树叶至树根的距离(即以树叶和树根为端点的路的长度)为奇数。为叙述方便我们称以与树根的距离分别为 $i,i+1$ 的点为端点的边为树的“i-层边”$(i=0,1,\cdots)$。在“偶数-层边”中选择适当的边,可得到一条满足条件 $d_G(v)=3$ 的 3-路 v_1vv_2。取所有的 3-路,可得到满足条件 $V'_1=V_1$ 的 G_3 的二部子图 $G'=(V'_1,V'_2)$,并且任意的点 $v\in V'_1$,有 $d_{G'}(v)=2$;任意的点 $v\in V'_2$,有 $d_{G'}(v)=1$。从而(e)得证。对于任意的边 $uv\in E(G')$,$u\in V'_2$,称 u 是v 的 3-主点。不难看出,每一个度数为 3 的点有两个 3-主点,每个度数为 $\Delta(G)$的点最多可能为一个 3 度点的 3-主点。

由欧拉公式$|V|-|E|+|F|=2$ 和$\sum\limits_{v\in V}d(v)=\sum\limits_{f\in F}d(f)=2|E|$易得

$$\sum_{v\in V}(d(v)-4)+\sum_{f\in F}(d(f)-4)=-4(|V|-|E|+|F|)=-8<0。$$

现在给图 G 的任意一个元素 $x\in V(G)\cup F(G)$赋权记为 $W(x)=d(x)-4$。显然 $\sum\limits_{x\in V\cup F}W(x)=-8$。下面对图 G 的点及面上的权进行转移分配,使每个元素 $x\in V(G)\cup F(G)$具有新权,记为 $W'(x)$,如果能证明 $\sum\limits_{x\in V\cup F}W'(x)\geqslant 0$,则可得矛盾。

定义权转移规则如下:

D1 每个 5 度点向它关联的 3-面转移权$\frac{1}{3}$。

D2 每个 6^+-点向它关联的 3-面转移权$\frac{1}{2}$。

D3 每个 3 度点从它的每个 3-主点得到权$\frac{1}{2}$。

对任意的面 $f\in F(G)$。当 $d(f)\geqslant 4$ 时,显然有 $W'(f)=W(f)=d(f)-4\geqslant 0$。当 $d(f)=3$ 时,下面分两种情况讨论:(1) 当 $\delta(f)\leqslant 4$ 时,由(c)可知面 f 与两个 6^+-点相关联,由 D2 可得 $W'(f)=W(f)+2\times\frac{1}{2}=0$;(2) 当 $\delta(f)\geqslant 5$ 时,由 D1,D2 可得 $W'(f)\geqslant W(f)+3\times\frac{1}{3}=0$。对任意的点 $v\in V(G)$。当 $d(v)=3$ 时,由 D3 可得 $W'(v)=W(v)+2\times\frac{1}{2}=0$。当 $d(v)=4$ 时,则 $W'(v)=W(v)=0$。当 $d(v)=5$ 时,点 v 至多与 3 个 3-面相关联,由 D1 得 $W'(v)\geqslant W(v)-3\times\frac{1}{3}=0$。当 $d(v)=6$ 时,点 v 至多与 4 个 3-面相关联,由 D2 得 $W'(v)\geqslant W(v)-4\times\frac{1}{2}=0$。当 $d(f)\geqslant 7$ 时,点 v 最多是一个 3 度点的 3-主点,此外点 v 至多与$\lfloor\frac{2d(v)}{3}\rfloor$个 3-面相关联,由 D2,D3 可得 $W'(v)\geqslant W(v)-\frac{1}{2}-\lfloor\frac{2d(v)}{3}\rfloor\times\frac{1}{2}\geqslant 0$。由以上讨论知对于任意元素 $x\in V(G)\cup F(G)$都有 $W'(x)\geqslant 0$,从而$\sum\limits_{x\in V\cup F}W'(x)\geqslant 0$ 成立,得到矛盾。定理得证。

参考文献:

[1] BONDY J, MURTY U. Graph theory with applications[M]. Amsterdam, North Holland, 1976.
[2] AXLER S, GEHRING F, RIBERT K. Graph Theory[M]. Beijing: Springer, 2004.
[3] GALVIN F. The list chromatic index of a bipartite multigraph[J]. J Combin Theory: Ser B, 1995, 63:153-158.
[4] WANG W, LIH K. Choosability, edge choosability and total choosability of outerplane graphs[J]. European J Combin, 2001, 22(1): 71-78.
[5] BORODIN O, KOSTOCHKA A, WOODALL D. List edge and list total coloring of multigraphs[J]. J Combin Theory Ser B, 1997, 71: 184-204.
[6] HOU J, LIU G, CAI J. Edge-choosability of planar graphs without adjacent triangles or without 7-cycle[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309:77-84.
[7] HOU J, LIU G, CAI J. List edge and list total colorings of planar graphs without 4-cycles[J]. Theoretical Computer Science, 2006, 369: 250-255.
[8] LIU B, HOU J, LIU G. List edge and list total colorings of planar graphs without short cycles[J]. Information Processing Letters, 2008, 108:347-351.
[9] CAI J, HOU J, ZHANG X, et al. Edge-choosability of planar graphs without non-induced 5-cycles[J]. Information Processing Letters, 2009, 109(7):343-346.
[10] KOSTOCHKA A. List edge chromatic number of graphs with large girth[J]. Discrete Math, 1992, 101:189-201.
[11] BORODIN O. An extension of Kotzig's theorem and the list edge coloring of plane graphs[J]. Matzametki, 1990, 48(1):22-28.
[12] ZHANG L, WU B. Edge choosability of planar graphs without small cycles[J]. Discrete Math, 2004, 283:289-293.
[13] WANG W, LIH K. Choosability and edge choosability of planar graphs without five cycles[J]. Appl Math Lett, 2002, 15:561-565.
[14] WANG W, LIH K. Structure properties and edge choosability of planar graphs without 6-cycles[J]. Combin Probab Comput, 2001, 10: 267-276.
[15] 王维凡. 没有短圈的平面图的边选择性[J]. 中国科学:A辑,2005,35(9):1028-1043.
[16] HOU J, LIU G, WU J. Some results on list total colorings of planar graphs[J]. Lecture Note in Computer Science, 2007, 4489:320-328.

(编辑:李晓红)