第 43 卷 第 10 期　山东大学学报(理学版)　2008 年 10 月
Vol.43　No.10　Journal of Shandong University(Natural Science)　Oct. 2008

文章编号:1671-9352(2008)10-0077-03

关于图的广义 Mycielski 图的邻点可区别关联着色

王文丽,刘西奎,周薇
(山东科技大学信息科学与工程学院,山东 青岛 266510)

摘要:邻点可区别关联着色是使得相邻顶点的颜色集不同的关联着色。主要研究了路,圈 C_{3m},C_{4m} 与完全图的广义 Mycielski 图的邻点可区别关联色数,拓展了图着色的领域,便于更好的研究图的结构。

关键词:邻点可区别关联着色;圈;完全图;广义 Mycielski 图
中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A

On the adjacent vertex-distinguishing incidence coloring of general Mycielski graphs

WANG Wen-li, LIU Xi-kui, ZHOU Wei
(College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, Shandong, China)

Abstract: The adjacent vertex-distinguishing incidence coloring is incidence coloring satisfying the sets with different colors of two adjacent vertices. The adjacent vertex-distinguishing incidence coloring of path, cycle with 3 m or 4 m vertices and the complete graph's general Mycielski graphs were studied. It exploits the area of the graph coloring for studying the structure of graphs.

Key words: adjacent vertex-distinguishing incidence coloring; cycle; complete graph; general Mycielski graphs

0 引言

图的染色问题是图论研究的经典领域,在网络问题,组合分析和实际生活中有着广泛的应用,是图论的主要研究内容之一。

本文首先在关联着色的基础上,进一步研究了图的邻点可区别关联着色,刻画了路,圈 C_{3m},C_{4m} 与完全图的广义 Mycielski 图的邻点可区别关联色数。文中用 $V(G)$,$E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集,$\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度,$\bar{C}(u)$ 表示顶点 u 在全体颜色集合 C 中的补集,其它未说明的术语和记号参见文献[1-3]。

定义 1[4,5]　设 $G=(V,E)$ 是一个图,设 $I(G)=\{(v,e)\mid v\in V, e\in E, v$ 与 e 相关联$\}$ 是 G 的关联集。G 的两个关联对 (v,e) 和 (w,f) 是相邻的满足下列三个条件之一:(ⅰ) $v=w$;(ⅱ) $e=f$;(ⅲ) $vw=e$ 或 $vw=f$。图 G 的关联着色是从 $I(G)$ 到颜色集合 C 的一个映射 σ,使得 G 中任何两个相邻关联具有不同的象,若 $\sigma: I(G)\to C$ 是 G 的一个关联着色且 $|C|=k$,k 是一个正整数,则称 G 是 k-关联着色的,并称 $\chi_i(G)=\min\{k\mid$ 存在 G 的 k-关联着色$\}$ 为 G 的关联色数。记 $I_v=\{(v,vu)\mid u\in N(v)\}$ 为 v 的近关联集,$A_v=\{(u,uv)\mid u\in N(v)\}$ 为 v 的远关联集,分别用 C_{A_v},C_{I_v} 表示着在 A_v,I_v 上的色集。将两种色的有序对 $(\sigma(u,uv),\sigma(v,vu))$ 简记为 $\sigma(uv)$。

收稿日期:2008-03-30
作者简介:王文丽(1983-),女,硕士研究生,研究方向为系统模型与算法. Email: wangwenli0705@163.com

定义 2[1] 对图 G,设 $Q_u=\{(u,uu')\mid u'\in N(u)\}\cup\{(u',u'u)\mid u'\in N(u)\}$,$\sigma: I(G)\to C$ 为图 G 的 k-关联着色,C_u 表示着在 Q_u 上的色集。若对任意 $uv\in E(G)$满足 $C_u\neq C_v$,则称 σ 为 G 的 k-邻点可区别关联着色,并称 $\chi_{ai}(G)=\min\{k\mid$存在 G 的 k-邻点可区别关联着色$\}$为 G 的邻点可区别关联色数。

定义 3[6] 对简单图 G,$V(G)=\{v_{0i}\mid i=1,2,\cdots,p\}$,$M_n(G)$称为 G 的广义 Mycielski 图,其中

$$V(M_n(G))=\{v_{01},v_{02},\cdots,v_{0p};\ v_{11},v_{12},\cdots,v_{1p};\cdots;\ v_{n1},v_{n2},\cdots,v_{np}\},$$

$$E(M_n(G))=E(G)\cup\{v_{ij}v_{(i+1)k}\mid v_{0j}v_{0k}\in E(G),1\leqslant j,k\leqslant p,i=0,1,\cdots,n-1\}。$$

引理 1[1] 对具有最大度 Δ 的图 G,有 $\chi_{ai}(G)\geqslant\chi_i(G)\geqslant\Delta+1$。

引理 2[1] 简单连通图 G,$|V(G)|\geqslant 3$,$V_\Delta=\{u\mid d(u)=\Delta(G)\}$,若 $E(G[V_\Delta])\neq\varnothing$,则

$$\chi_{ai}(G)\geqslant\Delta+2。$$

引理 3[1] 设 P_n 为 $n(n\geqslant 3)$阶路,则

$$\chi_{ai}(P_n)=\begin{cases}3, & n=3;\\ 4, & n\geqslant 4。\end{cases}$$

1 主要结果及其证明

定理 1 设 $M_n(P_m)$是路 P_m 的广义 Mycielski 图,其中 $m\geqslant 2,n\geqslant 1$,则

$$\chi_{ai}(M_n(P_m))=\begin{cases}4, & m=2;\\ 5, & m=3;\\ 6, & m\geqslant 4。\end{cases}$$

证明 (1) 当 $m=2$ 时,$M_n(P_2)$即为路 $P_{2(n+1)}$,且 $2(n+1)\geqslant 4$。由引理 3 知,$\chi_{(ai)}(M_n(P_2))=4$。

(2) 当 $m=3$ 时,$\Delta(M_n(P_3))=4$,由引理 1。1 知,$\chi_{ai}(M_n(P_3))\geqslant\Delta(M_n(P_3))+1=5$。

为证明 $\chi_{ai}(M_n(P_3))=5$,仅需给出 $M_n(P_3)$的一个 5-邻点可区别关联着色。对于任意的顶点 $v_{ij}(1\leqslant j\leqslant 3)$,分两种情况进行关联着色:

当 $i=0$ 时,令

$$\sigma(v_{01}v_{02})=(4,3),\sigma(v_{02}v_{03})=(1,4),\sigma(v_{01}v_{12})=(2,5),$$
$$\sigma(v_{02}v_{11})=(2,4),\sigma(v_{02}v_{13})=(5,4),\sigma(v_{03}v_{12})=(2,3)。$$

当 $i\neq 0$ 时,令

$$\sigma(v_{i1}v_{(i+1)2})=\begin{cases}(1,5), & i\equiv 1(\bmod 3);\\ (3,1), & i\equiv 2(\bmod 3);\\ (2,5), & i\equiv 0(\bmod 3)。\end{cases}\qquad \sigma(v_{i2}v_{(i+1)1})=\begin{cases}(1,2), & i\equiv 1(\bmod 3);\\ (4,1), & i\equiv 2(\bmod 3);\\ (2,3), & i\equiv 0(\bmod 3)。\end{cases}$$

$$\sigma(v_{i2}v_{(i+1)3})=\begin{cases}(4,2), & i\equiv 1(\bmod 3);\\ (3,1), & i\equiv 2(\bmod 3);\\ (5,3), & i\equiv 0(\bmod 3)。\end{cases}\qquad \sigma(v_{i3}v_{(i+1)2})=\begin{cases}(1,2), & i\equiv 1(\bmod 3);\\ (3,4), & i\equiv 2(\bmod 3);\\ (2,3), & i\equiv 0(\bmod 3)。\end{cases}$$

显然,此着色是 $M_n(P_3)$的关联着色,又因为在 $M_n(P_3)$的关联着色中,对 $M_n(P_3)$中任意的 1 度顶点 u,2 度顶点 v 和 4 度顶点 w,显然有$|C_u|=2,3\leqslant|C_v|\leqslant 4,|C_w|=5$。所以,色集 C_u,C_v,C_w 各不相同,而且在 $M_n(P_3)$中度相同的顶点互不相邻,因此,σ 为 $M_n(P_3)$的一个 5-邻点可区别关联着色。
所以,$\chi_{(ai)}(M_n(P_3))=5$。

(3) 当 $m\geqslant 4$ 时,由于 $E(M_n(P_m)[V_\Delta])\neq\varnothing$,$\Delta(M_n(P_m))=4$,由引理 2 知,$\chi_{ai}(M_n(P_m))\geqslant 4+2=6$。

为证明 $\chi_{ai}(M_n(P_m))=6$,仅需给出 $M_n(P_m)$的一个 6-邻点可区别关联着色法:

对于 $r=0,1,2\cdots,\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$;$s=0,1,2,\cdots,\lfloor\frac{n}{4}\rfloor$;$t=0,1,2,\cdots,\lfloor\frac{n-2}{4}\rfloor$;$i=1,2,\cdots,m$。令:

$$C_{A_{v_{(2r+1)i}}}=\begin{cases}\{(i+3)(\bmod 6)\}, & \text{当顶点 } v_{(2r+1)i}\text{ 与 } v_{(2r)(i-1)}\text{ 或 } v_{(2r)(i+1)}\text{ 相邻时};\\ \{i(\bmod 6)\}, & \text{当顶点 } v_{(2r+1)i}\text{ 与 } v_{(2r+2)(i-1)}\text{ 或 } v_{(2r+2)(i+1)}\text{ 相邻时},\end{cases}$$

$$C_{A_{v_{(4s)i}}}=\{i(\bmod 6)\},\ C_{A_{v_{(4t+2)i}}}=\{(i+3)(\bmod 6)\}。$$

显然,此着色方法是 $M_n(P_m)$ 的关联着色,下面研究它是否是邻点可区别的。

在 $M_n(P_m)$ 中的顶点,按照度数分为三种:1 度顶点 u,2 度顶点 v 和 4 度顶点 w。有 $|C_u|=2,3\leqslant|C_v|\leqslant4,|C_w|=5$ 或 $|C_w|=6$。下面按照顶点的度数分析相邻的顶点的颜色集是否相同:

(1) 与 1 度顶点相邻的全为 4 度顶点,显然色集不同;

(2) 与 2 度顶点相邻的为 4 度顶点或 2 度顶点,显然仅分析相邻的全为 2 度的顶点的情况即可。这种相邻顶点只有 2 对:v_{n2} 与 $v_{(n-1)1}$;$v_{n(m-1)}$ 与 $v_{(n-1)m}$。对于顶点 v_{n2} 与 $v_{(n-1)1}$,只要看 $\sigma(v_{n2},v_{n2}v_{(n-1)3})$ 与 $\sigma(v_{(n-1)1},v_{(n-1)1}v_{(n-2)2})$ 是否相同。进而分析 $C_{A_{v_{(n-2)2}}}$ 与 $C_{A_{v_{(n-1)3}}}$,由上述着色法,若 $n-2$ 为奇数,则 $C_{A_{v_{(n-2)2}}}=\{2\}$,$C_{A_{v_{(n-1)3}}}=\{3\}$ 或 $\{0\}$;若 $n-2$ 为偶数,则 $C_{A_{v_{(n-2)2}}}=\{5\}$ 或 $\{2\}$,$C_{A_{v_{(n-1)3}}}=\{3\}$。显然顶点 v_{n2} 与 $v_{(n-1)1}$ 的颜色集不同,同理可得顶点 $v_{n(m-1)}$ 与 $v_{(n-1)m}$ 的颜色集不同。

(3) 与 4 度顶点相邻的为 4 度顶点或 2 度顶点,显然仅分析相邻的全为 4 度的顶点的情况即可。对于上面的着色法我们发现相邻的 4 度顶点中颜色集元素个数不同,所以其颜色集不同。

因此,σ 为 $M_n(P_m)$ 的一个 6-邻点可区别关联着色。

定理得证。

定理 2　设 $M_n(K_m)$ 是完全图 K_m 的广义 Mycielski 图,其中 $m\geqslant1,n\geqslant2$,则

$$\chi_{ai}(M_n(K_m))=2m。$$

证明　由于 $E(M_n(K_m)[V_\Delta])\neq\emptyset,\Delta(M_n(K_m))=2\Delta(K_m)=2(m-1)=2m-2$。由引理 2 知,$\chi_{ai}(M_n(K_m))\geqslant\Delta+2=2m$。
现仅需给出 $M_n(K_m)$ 的一个 $2m$-邻点可区别关联着色法:对 $i=0,1,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$,令

$$C_{A_{v_{ij}}}=\begin{cases}\{j+m\}, & i\equiv1(\mathrm{mod}\,4),2(\mathrm{mod}\,4);\\ \{j\}, & i\equiv0(\mathrm{mod}\,4),3(\mathrm{mod}\,4)。\end{cases}$$

显然,上述着色方法是 $M_n(K_m)$ 的关联着色,且有

$$\bar{C}(v_{ij})=\begin{cases}\{j+m\}, & i\equiv0(\mathrm{mod}\,4),3(\mathrm{mod}\,4);\\ \{j\} & i\equiv1(\mathrm{mod}\,4),2(\mathrm{mod}\,4)。\end{cases}$$

容易验证,在上述着色中,$M_n(K_m)$ 任意相邻顶点的颜色集互不相同。所以,该着色是 $M_n(K_m)$ 的一个 $2m$-邻点可区别关联着色。因此,$\chi_{ai}(M_n(K_m))=2m$。

定理 3　设 C_{km} 为 km 阶圈,其中 $k=3,4,m\geqslant1$,则 $\chi_{ai}(M_n(C_{km}))=6$。

证明　因为 $E(M_n(C_{km})[V_\Delta])\neq\emptyset,\Delta(M_n(C_{km}))=4$,由引理 2 知,$\chi_{(ai)}(M_n(C_{km}))\geqslant4+2=6$。
现在仅需给出 $M_n(C_{km})$ 的一个 6-邻点可区别关联着色法,下面分两种情况分析。

情况 1　$k=3$。对 $i=0,1,\cdots,n$ 和 $j=1,2,\cdots,3m$,令

$$C_{A_{v_{ij}}}=\begin{cases}\{j(\mathrm{mod}\,3)\}, & i\equiv0(\mathrm{mod}\,4),3(\mathrm{mod}\,4);\\ \{j(\mathrm{mod}\,3)+3\}, & i\equiv1(\mathrm{mod}\,4),2(\mathrm{mod}\,4)。\end{cases}$$

显然,上述着色是 $M_n(C_{3m})$ 的关联着色,且有

$$\bar{C}(v_{ij})=\begin{cases}\{j(\mathrm{mod}\,3)\}, & i\equiv1(\mathrm{mod}\,4),2(\mathrm{mod}\,4);\\ \{j(\mathrm{mod}\,3)+3\}, & i\equiv0(\mathrm{mod}\,4),3(\mathrm{mod}\,4)。\end{cases}$$

容易验证,在上述着色中,$M_n(C_{3m})$ 的任意相邻顶点的颜色集不同,所以上述着色是 $M_n(C_{3m})$ 的一个 6-邻点可区别关联着色法。

情况 2　$k=4$。对 $i=0,1,\cdots,n$ 和 $j=1,2,\cdots,4m$,令

$$C_{A_{v_{ij}}}=\begin{cases}\{j(\mathrm{mod}\,4)\}, & i\equiv0(\mathrm{mod}\,6),5(\mathrm{mod}\,6);\\ \{(j+1)(\mathrm{mod}\,4)\}, & i\equiv2(\mathrm{mod}\,6),3(\mathrm{mod}\,6);\\ \{4\}, & i\equiv1(\mathrm{mod}\,6),4(\mathrm{mod}\,6),j\equiv1(\mathrm{mod}\,4),0(\mathrm{mod}\,4);\\ \{5\}, & i\equiv1(\mathrm{mod}\,6),4(\mathrm{mod}\,6),j\equiv2(\mathrm{mod}\,4),3(\mathrm{mod}\,4)。\end{cases}$$

(下转第 84 页)

(上接第 79 页)

显然,上述着色是 $M_n(C_{4m})$的关联着色,且有

$$\bar{C}(v_{ij})=\begin{cases}\{(j+2)(\mathrm{mod}4)\}, & i\equiv 0(\mathrm{mod}6),5(\mathrm{mod}6);\\ \{(j+3)(\mathrm{mod}4)\}, & i\equiv 2(\mathrm{mod}6),3(\mathrm{mod}6);\\ \{5\}, & i\equiv 1(\mathrm{mod}6),4(\mathrm{mod}6),j\equiv 1(\mathrm{mod}4),0(\mathrm{mod}4);\\ \{4\}, & i\equiv 1(\mathrm{mod}6),4(\mathrm{mod}6),j\equiv 2(\mathrm{mod}4),3(\mathrm{mod}4)。\end{cases}$$

容易验证,在上述着色中,$M_n(C_{4m})$的任意相邻顶点的颜色集不同,所以上述着色是 $M_n(C_{4m})$的一个 6-邻点可区别关联着色法。

综上所述,定理得证。

参考文献:

[1] 王亚琴,刘西奎.图的关联着色与邻点可区别关联着色[D].青岛:山东科技大学,2007:13-18.

[2] BRUALDI R A, MASSEY J Q. Incidence and strong edge colorings of graphs[J]. Discrete Math, 1993, 122:51-58.

[3] 张忠辅,陈祥恩,李敬文,等.关于图的邻点可区别全染色[J].中国科学:A 辑,2004,34(5):574-583.

[4] 陈东灵,刘西奎,王淑栋.图的关联色数和关联着色猜想[J].经济数学,1998(3):47-51.

[5] CHEN Xue-gang. Incidence coloring of some graphs[J]. Joural of Inner Mongolia Normal University, 2005, 34(4):404-408.

[6] 强会英,张忠辅,晁福刚.关于 s_m 广义 Mycielski 图的若干色性[J].兰州交通大学学报,2005(6):136-137.

(编辑:李晓红)