第43卷 第6期 山东大学学报(理学版) 2008年6月
Vol.43 No.6 Journal of Shandong University(Natural Science) Jun. 2008

文章编号:1671-9352(2008)06-0021-04

不含4,5,6-圈的平面图的均匀染色

肖玉亮,马帅,吴建良
(山东大学数学学院, 山东 济南 250100)

摘要:设 ϕ 是图 G 的一个正常的顶点染色, 若 ϕ 的任何两种不同颜色所染的顶点数目至多相差1,称 ϕ 是 G 的一个均匀染色。对于不含4,5,6-圈的平面图, 且最大度 $\Delta\geqslant 9$,那么 G 存在均匀 Δ-染色。

关键词:均匀 Δ-染色;平面图;圈
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

Equitable coloring of planar graphs without 4,5,6-cycles

XIAO Yu-liang, MA Shuai, WU Jian-liang
(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: A proper vertex-coloring ϕ of a graph G is called an equitable coloring of G if the numbers of vertices in any two-color class differ with each other at most one. Then any planar graph G without 4,5,6-cycles and with $\Delta\geqslant 9$ is equitable Δ-colorable.

Key words: equitable Δ-coloring; planar graph; cycles

0 引言

本论文所考虑的图均为简单的有限的无向图。设 G 是一个图,用 $V(G)$, $|G|$, $E(G)$, $e(G)$, $\Delta(G)$, $\delta(G)$和 $g(G)$分别表示 G 的顶点集合,阶(顶点数), 边集合,边数,最大度,最小度和围长。在不引起混淆的情况下,$\Delta(G)$, $\delta(G)$和 $g(G)$可分别简记为 Δ, δ 和 g。图 G 的一个 k-顶点染色是指 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 对于 G 的各个顶点的一个分配; 如果任意两个相邻顶点都分配到不同的颜色,称染色是正常的。ϕ 是图 G 的一个正常的顶点染色, 若 ϕ 的任何两种不同颜色所染的顶点数目至多相差1,称 ϕ 是 G 的一个均匀染色。如果 ϕ 是图 G 的一个均匀 k-顶点染色,称 ϕ 是 G 的一个均匀 k-染色。图 G 可进行均匀 k-染色的最小整数 k 称 为 G 的均匀色数,记为 $\chi_e(G)$。

Hajnal 和 Szemer 证明了[1]:任意图 G,对于任意的整数 $k\geqslant\Delta(G)+1$,都存在均匀 k-染色。W. Meyer 在[2]中提出了以下猜想: 对于任意一个既不是完全图也不是奇圈的连通图 G,有 $\chi_e(G)\leqslant\Delta(G)$。1994年, Chen, Lih 和 Wu 证明了[3]:如果图 G 是一个连通图,且既不是完全图, 奇圈又不是完全二部图 $K_{2m+1,2m+1}$, $\Delta(G)=\Delta\geqslant\frac{|G|}{2}$, 那么 G 存在均匀 Δ-染色。基于这一结果,Chen, Lih 和 Wu 提出了以下猜想:

猜想1 如果 G 是一个连通图,且既不是完全图,奇圈又不是完全二部图 $K_{2m+1,2m+1}$, $\Delta(G)=\Delta$, 那么 G 存在均匀 Δ-染色。

在平面图方面,Yap 和 Zhang 在[4]中首先证明了:如果图 G 是一个连通的外平面图,$\Delta\geqslant 3$,那么图 G 存在均匀Δ-染色,在[5]中证明了任意平面图 G, $\Delta(G)\geqslant 13$,对任意整数 $m\geqslant\Delta(G)$,都存在均匀 m-染色。

收稿日期:2007-11-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10631070;60673059;10471078)
作者简介:肖玉亮(1983-),男,硕士,主要研究方向为图论及其应用. Email:yuliangxiao@gmail.com

文献[6]考虑了围长比较大时的平面图的均匀染色问题。本论文证明了:最大度 $\Delta\geqslant 9$,且不含4,5,6-圈的平面图 G 存在均匀 Δ-染色。

1 主要结果及其证明

设 G 是一个图,若 $U\subseteq V(G)$,用 $G[U]$ 表示由 U 导出的 G 的子图。若 $u\in V(G)$,用 $G-u$ 表示由 G 中删去顶点 u 及与其关联的边所得到的子图。设 xy 是 G 的一条边,用 $G-xy$ 表示由 G 中删去边 xy 得到的子图。对于 $v\in V(G)$, v 在 G 中的度用 $d_G(v)$ 表 示;v 的邻域 $N_G(v)$ 是 $V(G)$ 中所有与 v 相邻的顶点的集合。在不引起混淆的情况下, $d_G(v)$, $N_G(v)$ 可分别简记为 $d(v)$, $N(v)$。对于任意的 $U\subset V(G)$, $W\subset V(G)$,用 $e(U,W)$ 表示两端点分别在 U 与 W 中的所有边的数目。特别的,用 $e(u,W)$ 表示 $e(\{u\},W)$。

在平面图 G 中,分别用 $f,r(f),F,\phi$ 记 G 的一个面,与面相关联的边的个数,面的集合,面的个数。其他未注明的符号按文献[7]中的定义。

引理 1.1 设 G 是不含4,5,6-圈的平面图,$|G|=n$,则 $e(G)\leqslant\frac{21}{11}(n-2)$,且 $\delta\leqslant 3$。

证明 设 G 的度数为 i 的面的个数为 r_i,那么有 $3r_3+7r_7+\cdots+nr_n=\sum_{f\in F}r(f)$。因为 G 不含4-圈,所以任意两个三角形不共边,因此有 $3r_3\leqslant e$。这样有 $2e=\sum_{f\in F}r(f)\geqslant 7\phi-4r_3\geqslant 7\phi-\frac{4}{3e}$, 因此有 $\phi\leqslant\frac{10}{21}e$。由欧拉公式有 $2=v-e+\phi\leqslant v-e+\frac{10}{21}e\leqslant v-\frac{11}{21}e$, $e\leqslant\frac{21}{11}(v-2)$,因此有 $\sum_{v\in V}d(v)=2e\leqslant\frac{42}{11}(v-2)$。由 $\sum_{v\in V}(d(v)-\frac{42}{11})\leqslant 0$ 知,$\delta\leqslant 3$。

引理 1.2[5] 设 $m\geqslant 4$, $t\geqslant 1$,且均为整数。对于图 H,$|H|=mt$, $\chi(H)\leqslant m$。如果 $e(H)\leqslant(m-1)t$,那么 H 存在均匀 m-染色。

引理 1.3[5] 设 m,s 是正整数,G 是一个平面图,$\Delta(G)\leqslant m$。如果 G 存在一个独立 s-集 V', 且存在 $A\subseteq V(G)\setminus V'$, 满足 $|A|>\frac{s(m+3)}{2}$,并且对于任意的点 $v\in A$ 有 $e(v,V')\geqslant 1$,那么 A 中存在不相邻的两点 α, β,它们相邻于 V' 中的同一点 γ, 且只相邻于 V' 中的 γ 点。

引理 1.4[5] 设 m, t 是整数,且 $m\geqslant 7$, $t\geqslant 1$。H 是一个平面图,$\Delta(H)=\Delta$, $|H|=mt$。如果 $e(H)\leqslant(2m-3)t-\max\{\Delta-3,t\}$,那么 H 存在均匀 m-染色。

定理 1.1 设 G 是一个不含4,5,6-圈的平面图,$\Delta\geqslant 9$,那么 G 存在均匀 Δ-染色。

证明 首先证明当顶点数 $n=\Delta t$ 时定理成立,对 $e(G)$ 用归纳法。由引理 1.1, G 存在一条边 xy,其中 $d(x)\leqslant 3$。不失一般性,由归纳假设, $G-xy$ 存在一个均匀 Δ-染色 ψ,设其颜色类分别为 $V_1,V_2,\cdots,V_\Delta$,其中 $|V_i|=t$, $i=1,\cdots,\Delta$。当 x, y 分别属于不同的颜色类时,定理显然成立。因此只需考虑 x, $y\in V_1$ 的情况。设 $V'_1=V_1\setminus\{x\}$, $N(x)\subset V_1\cup V_2\cup V_3$。

假设对于某 $i\geqslant 4$,存在点 $z\in V_i$,使得 $e(z,V'_1)=0$。又因为 $e(x,V_i\setminus\{z\})=0$, 现将 z 加入 V'_1, x 加入 $V_i\setminus\{z\}$, 就得到 G 的一个均匀 Δ-染色。因此,对于任意的点 $z\in\bigcup_{i=4}^{\Delta}V_i$, 可以假设 $e(z,V'_1)\geqslant 1$。因此有

$$e(\bigcup_{i=4}^{\Delta}V_i,V'_1)\geqslant(\Delta-3)t。\tag{1}$$

假设存在点 $w\in V_2$, 使得 $e(w,V'_1)=0$。令 $V'_2=V_2\setminus\{w\}$,假设对于某 $i\geqslant 4$,存在点 $z\in V_i$,使得 $e(z,V'_2)=0$,又因为 $e(x,V_i)=0$, 现将 z 加入 V'_2, w 加入 V'_1,x 加入 $V_i\setminus\{z\}$,这样就得到 G 的一个均匀 Δ-染色。因此,对于任意的点 $z\in\bigcup_{i=4}^{\Delta}V_i$,可以假设 $e(z,V'_2)\geqslant 1$。因此有

$$e(\bigcup_{i=4}^{\Delta}V_i,V_2\setminus w)\geqslant(\Delta-3)t。\tag{2}$$

假设存在点 $v\in V_3$, 有 $e(v,V'_2)=0$。现将 v 加入 V'_2, w 加入 V'_1, 令 $V'_3=V_3\setminus\{v\}$,那么 V'_3 相当于 V'_1。这样,类似于(1)的讨论,可以假设对任意的点 $z\in V_i$, $i\geqslant 4$,有 $e(z,V'_3)\geqslant 1$。因此有

$$e(\bigcup_{i=4}^{\Delta}V_i, V'_3) \geqslant (\Delta-3)t。 \tag{3}$$

显然只有当 V'_1 中的所有点均为最大度点时与其关联的边最多,这样根据(1),得到 $e(\bigcup_{i=4}^{\Delta}V_i \cup \{x\}, V'_1) \leqslant \Delta(t-1)$。因此,$(\Delta-3)t+1 \leqslant \Delta(t-1)$,有 $t \geqslant \dfrac{\Delta+1}{3}$,这样 $t \geqslant 4$。

情况 1　对于每个 $j=2,3$,存在点 $v_j \in V_j$,使得 $e(v_j, V'_1)=0$。

令 $V'_j = V_j \setminus \{v_j\}, j=2,3$。由(1),(2)有,

$$e(\bigcup_{i=4}^{\Delta}V_i, \bigcup_{j=1}^{3}V'_j) \geqslant 3(\Delta-3)t, \tag{4}$$

因此有 $3(\Delta-3)t+1 \leqslant e(G) \leqslant \dfrac{21}{11}(n-2) = \dfrac{21}{11}(\Delta t-2)$。因为 $\Delta \geqslant 9$,这是不可能的。

情况 2　存在点 $v_2 \in V_2$,使得 $e(v_2, V'_1)=0$。对于 V_3 中的任意一点 v 有 $e(v, V'_1) \geqslant 1$。

令 $V'_2 = V_2 \setminus \{v_2\}$,因为 $e(v_2, V'_1)=0$,由(1),(2)有 $e(\bigcup_{i=4}^{m}V_i, \bigcup_{j=1}^{2}V'_j) \geqslant 2(m-3)t$,假设存在点 $v_3 \in V_3$ 使得 $e(v_3, V'_2)=0$,由(3)有 $e(\bigcup_{i=4}^{\Delta}V_i, V'_3) \geqslant (\Delta-3)t$,其中 $V'_3 = V_3 \setminus \{v_3\}$。这样式(4)成立,这已经证明是错误的。因此对于 V_3 中的任意一点 v 有 $e(v, V'_2) \geqslant 1$,这样有 $e(V_3, V'_2) \geqslant t$。因此有 $e(\bigcup_{i=3}^{\Delta}V_i, \bigcup_{j=1}^{2}V'_j) \geqslant 2(\Delta-3)t+t$。

令 $A = \bigcup_{i=3}^{\Delta}V_i \cup \{x\}$,则由上面的讨论有 $e(A, V'_1 \cup V_2) \geqslant 2(\Delta-3)t+t+1$,因此有 $e(G[A]) \leqslant e(G) - e(A, V'_1 \cup V_2) \leqslant \left(5-\dfrac{1}{11}\Delta\right)t - \dfrac{53}{11}$。因为 $|A| = (\Delta-2)t+1 > \dfrac{(\Delta+3)(t-1)}{2}$,由引理 1.3,$A$ 中存在不相邻的两点 α,β,它们同时相邻于 V'_1 中的一点 γ,且只相邻于 V'_1 中的 γ 点。

令 $G_1 = G[(V'_1 \setminus \{\gamma\} \cup \{\alpha,\beta\}) \cup V_2]$,$G_2 = G[(A \setminus \{\alpha,\beta\}) \cup \{\gamma\}]$。

显然有 $e(G_2) \leqslant e(G[A]) + \Delta - 2 \leqslant \left(5-\dfrac{1}{11}\Delta\right)t + \Delta - \dfrac{75}{11} \leqslant (\Delta-3)t$。根据五色定理,平面图 G_2 是 5-可染色的,因此有 $\chi(G_2) < \Delta-2$。又因为 $|G_2| = (\Delta-2)t$,由引理 1.2,G_2 存在均匀$(\Delta-2)$-染色,因此 G 存在均匀 Δ-染色。

情况 3　对任意点 $z \in V_2 \cup V_3$,有 $e(z, V'_1) \geqslant 1$。

在这种情况下,有 $e(V_2 \cup V_3, V'_1) \geqslant 2t$。由(1)有 $e(\bigcup_{i=2}^{\Delta}V_i, V'_1) \geqslant (\Delta-3)t+2t$。现令 $I = \bigcup_{i=2}^{\Delta}V_i \cup \{x\}$,有 $\Delta(t-1) \geqslant e(I, V'_1) \geqslant (\Delta-3)t+2t+1$。因此,$t \geqslant \Delta+1 \geqslant 10$。同时有 $e(G[I]) \leqslant e(G) - e(I, V'_1) \leqslant \dfrac{10}{11}\Delta t + t - \dfrac{53}{11}$。因为 $|I| = (\Delta-1)t+1 > \dfrac{(\Delta+3)(t-1)}{2}$,由引理 1.3,$I$ 中存在不相邻的两点 α,β,它们同时相邻于 V'_1 中的一点 γ,且只相邻 V'_1 中的 γ 点。

令 $G_1 = G[(V'_1 \setminus \{\gamma\} \cup \{\alpha,\beta\})]$,$G_2 = G[(I \setminus \{\alpha,\beta\}) \cup \{\gamma\}]$。

通过上面的讨论有 $e(G_2) \leqslant e(G[I]) + \Delta - 2 \leqslant \dfrac{10}{11}\Delta t + t + \Delta - \dfrac{75}{11}$。

现对 $e(G_2)$ 用归纳法来证明 G_2 存在均匀$(\Delta-1)$-染色。由引理 1.1,G_2 中存在一条边 uv,其中 $d(u) \leqslant 3$。由归纳假设,$G_2 - uv$ 存在一个均匀$(\Delta-1)$-染色 φ,设其颜色类为 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{\Delta-1}$,其中 $|Y_i| = t$,$i=1, \cdots, \Delta-1$。不失一般性,现假设 $u, v \in Y_1$,$N(u) \subset Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$。令 $Y'_1 = Y_1 \setminus \{u\}$,由(1)有,$e(\bigcup_{i=4}^{\Delta-1}Y_i, Y'_1) \geqslant (\Delta-4)t$。

子情况 3.1　存在点 $y_2 \in Y_2$,使得 $e(y_2, Y'_1)=0$。

令 $Y'_2 = Y_2 \setminus \{y_2\}$,由(1),(2)有 $e(\bigcup_{i=4}^{\Delta-1}Y_i, Y'_1 \cup Y'_2) \geqslant 2(\Delta-4)t$,

假设存在点 $y_3 \in Y_3$,使得 $e(y_3, Y'_2)=0$。由(3)有,$e(\bigcup_{i=4}^{\Delta-1}Y_i, Y_3 \setminus \{y_3\}) \geqslant (\Delta-4)t > t$。否则,对于 Y_3 中的任意一点 y 有 $e(y, Y'_2) \geqslant 1$,这样 $e(Y_3, Y'_2) \geqslant t$。因此有

$e(G_2)\geqslant 2(\Delta-4)t+t+1>\frac{10}{11}\Delta t+t+\Delta-\frac{75}{11}\geqslant e(G_2)$,矛盾。

子情况 3.2 对任意点 $w\in Y_2\cup Y_3$,有 $e(w,Y'_1)\geqslant 1$。

在这种情况下有 $e(Y_2\cup Y_3,Y'_1)\geqslant 2t$。令 $L=\bigcup_{i=2}^{\Delta-1}Y_i\cup\{u\}$,由(1)有 $e(L,Y'_1)\geqslant(\Delta-4)t+2t+1$。因此有 $e(G_2[L])\leqslant e(G_2)-e(L,Y'_1)\leqslant\left(3-\frac{1}{11}\Delta\right)t+\Delta-\frac{86}{11}$。$|L|=(\Delta-2)t+1>\frac{(\Delta+3)(t-1)}{2}$,由引理1.3,$L$ 中存在不相邻的两点 α_1,β_1,同时相邻于 Y'_1 中的一点 γ_1,且只相邻 Y'_1 中的 γ_1 点。

令 $G_3=G_2\left[\left(Y'_1\setminus\{\gamma_1\}\cup\{\alpha_1,\beta_1\}\right]\right.$, $G_4=G_2[(L\setminus\{\alpha_1,\beta_1\}\cup\{\gamma_1\}]$。

由上面的讨论有 $e(G_4)\leqslant e(G_2[L])+\Delta-2\leqslant\left(3-\frac{1}{11}\Delta\right)t+2\Delta-\frac{108}{11}\leqslant(2(\Delta-2)-3)t-\max\{\Delta-3,t\}$。由引理1.4,$G_4$ 存在均匀($\Delta-2$)-染色。因此 G_2 存在均匀($\Delta-1$)-染色,G 存在均匀Δ-染色。

若 $n\neq\Delta t$,不妨假设 $n=\Delta(t+1)-j$,其中 $0<j<\Delta$,对 n 用归纳法。由引理1.1,G 存在一个度数至多是3的点 u。由归纳假设,平面图 $G-u$ 存在均匀Δ-染色ϕ,设其颜色类为 $V_1,V_2,\cdots,V_\Delta$,其中$|V_i|=t$ 或 $t+1$,$i=1,2,\cdots,\Delta$。因为 $d(u)\leqslant 3$,假设 $N(u)\subseteq V_1\cup V_2\cup V_3$。如果存在某 $i\geqslant 4$ 有$|V_i|=t$,那么把 u 加入 V_i,将得到 G 的一个均匀 Δ-染色。因此,对于所有的 $i\geqslant 4$ 有$|V_i|=t+1$。若 $n=\Delta(t+1)-1$,则在 G 中添加一悬挂点,此点与 G 的任意一个 非最大度点相邻;若 $n=\Delta(t+1)-2$,则在 G 中添加路 $v_1v_2v_3$,其中 v_1 是 G 的任意一个非最大度点。设这样得到的新的平面图为 G',那么$|G'|=\Delta(t+1)$,G'不含4,5,6-圈,由前部分证明可知 G'存在均匀Δ-染色,那么 G 也存在均匀Δ-染色。

参考文献:

[1] HAJNAL A, SZEMERÉDI E. Proof of a conjecture of Erdös[C]// A Ré-nyi, V T Sós. Combin Theory and Its Applications: II. Amsterdam: North-Holl-and, 1970:601-623.

[2] MEYER W. Equitable coloring[J]. Amer Math Monthly, 1973,80:920-922.

[3] CHEN Bor-liang, LIH Ko-wei, WU Pou-lin. Equitable coloring and the maximum degree[J]. Europ J Combinatorics, 1994, 15:443-447.

[4] YAP H P, ZHANG Y. The equitable Δ-coloring conjecture holds for outerplanar graphs[J]. Math Acad Sinica, 1997, 25:143-149.

[5] ZHANG Y, YAP H P. Equitable colorings of planar graphs[J]. J Comb Math Comb Comput, 1998, 27:97-105.

[6] WU Jianliang, WANG P. Equitable coloring planar graphs with large girth[J]. Discrete Math, 2008, 308:985-990.

[7] 邦迪 J A, 默蒂 U S R. 图论及其应用[M]. 吴望名,译. 北京:科学出版社, 1984.

(编辑:李晓红)