第 43 卷　第 10 期
Vol.43　No.10

山　东　大　学　学　报（理　学　版）
Journal of Shandong University(Natural Science)

2008 年 10 月
Oct. 2008

文章编号:1671-9352(2008)10-0027-04

W-C-倾斜模

雷雪萍
（淮阴师范学院数学系, 江苏 淮安 223001）

摘要:给出了 W-C-倾斜模的概念,是对经典倾斜模和 Wakamatsu-倾斜模概念的推广。给出了 W-C-倾斜模存在的条件,并研究了 W-C-倾斜模的性质。

关键词:Artin 代数;Wakamatsu-倾斜模;W-C-倾斜模
中图分类号:O153　　**文献标志码**:A

W-C-tilting modules

LEI Xue-ping
(Department of Mathematics, Huaiyin Teachers College, Huaian 223001, Jiangsu, China)

Abstract: The definition of W-C-tilting modules was given, which is a generalization of the definitions of classical tilting modules and Wakamatsu-tilting modules. Furthermore, the condition of the existence of W-C-tilting modules was given and the properties of W-C-tilting modules were investigated.

Key words: Artin algebras; Wakamatsu-tilting modules; W-C-tilting modules

1　引言及预备知识

Wakamatsu T 在文献[1]中研究了 Artin 代数上投射维数无限的倾斜模(现在称为 Wakamatsu-倾斜模)。Miyashita Y 在文献[2]中给出了 Artin 代数上倾斜对的概念,它是倾斜模的一个推广。最近,魏加群和惠昌常在文献[3]和[4]中继续研究了倾斜对,给出了许多它的性质。很自然地,作者给出相对自正交模 C 的 Wakamatsu-倾斜模的定义,并且研究了它的性质。

设 A 是 Artin 代数,A-mod 表示所有有限生成的左 A-模构成的范畴。本文只考虑有限生成的左 A-模,范畴均指关于同构封闭的 A-mod 的满子范畴。

任意模 $M\in A$-mod,add M 表示同构于 M 的有限直和的直和项组成的子范畴。模 M 称为自正交的,如果$\mathrm{Ext}_A^i(M,M)=0$, $\forall\, i\geqslant 1$。$M^{\perp}$ 表示所有满足$\mathrm{Ext}_A^i(M,X)=0$(任意 $i\geqslant 1$)的模 X 构成的子范畴。对自正交模 M,定义子范畴${}_M\mathscr{X}=\{N\in A\text{-mod}\mid$存在正合列$\cdots\xrightarrow{f_2}M_1\xrightarrow{f_1}M_0\xrightarrow{f_0}N\to 0$,其中任意 $i\geqslant 0$, $M_i\in\mathrm{add}\,M$, $\mathrm{Im}\,f_i\in M^{\perp}\}$。因此${}_M\mathscr{X}\subseteq M^{\perp}$。对偶地,定义${}^{\perp}M$ 和 $\mathscr{X}_M$。

设 $\mathscr{C}$是 A-mod 的子范畴。定义子范畴$\infty\text{-pres}(\mathscr{C})=\{M\in A\text{-mod}\mid$存在正合列$\cdots\to C_n\to\cdots\to C_1\to C_0\to M\to 0$,其中任意 $i\geqslant 0$, $C_i\in\mathscr{C}\}$。如果 $\mathscr{C}=\mathrm{add}\ T$,则简记为$\infty\text{-pres}(T)$。

设 $\mathscr{C}$是 A-mod 的子范畴,定义 $\hat{\mathscr{C}}=\{M\in A\text{-mod}\mid$存在正合列 $0\to C_m\to\cdots\to C_0\to M\to 0$,其中任意 $0\leqslant i\leqslant m$, $C_i\in\mathscr{C}\}$。任意 $M\in\hat{\mathscr{C}}$, 定义$\dim_{\mathscr{C}}(M)=\inf\{m\mid$存在正合列 $0\to C_m\to\cdots\to C_0\to M\to 0$, 其中任意 $0\leqslant i\leqslant m$,

收稿日期:2008-08-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771112)
作者简介:雷雪萍(1976-　),女,讲师,博士,主要研究方向为代数表示论.Email:leixp2005@163.com

$C_i\in\mathscr{C}\}$,$(\mathscr{C})_n=\{M\in\mathscr{C}\mid \dim_{\mathscr{C}}(M)\leqslant n\}$。对偶地,定义 $\mathscr{C}$,$\mathrm{codim}_{\mathscr{C}}(M)$和$(\mathscr{C})_n$。

设 $\mathscr{C}$是 A-mod 的子范畴。$I\in\mathscr{C}$称为 $\mathscr{C}$的相对余生成子,如果任意 $M\in\mathscr{C}$,有正合列 $0\to M\to I'\to N\to 0$,其中 $I'\in\mathrm{add}\ I$,$N\in\mathscr{C}$。如果 I 还满足对任意$i\geqslant 1$,任意 $X\in\mathscr{C}$,有$\mathrm{Ext}_A^i(X,I)=0$,则称 I 是 $\mathscr{C}$的相对内射余生成子。对偶地,定义 $\mathscr{C}$的相对生成子和相对投射生成子。本文中所涉及到的其它定义和符号参考文献[1-4]。

引理 1.1[3] 设 M 是自正交的。则

(1) ${}_M\mathscr{X}$在扩张,单同态的余核和直和项下是封闭的。

(2) $\mathrm{Ext}_A^{i\geqslant 1}(U,V)=0$,任意 $U\in{}^{\perp}M$,$V\in\mathrm{add}\widehat{\ }M$。

(3) $(\mathrm{add}\widehat{\ }M)_n=\{X\in{}_M\mathscr{X}\mid \mathrm{Ext}_A^{n+1}(X,Y)=0$,任意 $Y\in M^{\perp}\}=\{X\in{}_M\mathscr{X}\mid \mathrm{Ext}_A^{n+1}(X,Y)=0$,任意 $Y\in{}_M\mathscr{X}\}$。

(4) $(\mathrm{add}\widehat{\ }M)_n$($\mathrm{add}\widehat{\ }M$)在扩张和直和项(单态射的余核)下封闭的。

(5) 任意正合列 $0\to U\to V\to W\to 0$,如果 $V,W\in{}_M\mathscr{X}((\mathrm{add}\widehat{\ }M)_n)$和$\mathrm{Ext}_A^1(M,U)=0$,则 $U\in{}_M\mathscr{X}((\mathrm{add}\widehat{\ }M)_n)$。

引理 1.2[3] 设 $\mathscr{Y}\subseteq A$-mod 有自正交的相对生成子 M 且在扩张,有限直和和直和项下封闭的。设 $X\in A$-mod 且有正合列 $0\to X\to N_m\to\cdots\to N_1\to Z\to 0$ 对某个整数 $m\geqslant 1$ 和 Z,其中 $N_i\in Y((\mathrm{add}\widehat{\ }M)_n)$。则

(1) 存在正合列 $0\to U_m\to V_m\to X\to 0$ 满足 $U_m\in\mathscr{Y}((\mathrm{add}\widehat{\ }M)_{n-1})$和 V_m 使得 $0\to V_m\to M_m\to\cdots\to M_1\to Z\to 0$,其中 $M_i\in\mathrm{add}\ M$,任意 $1\leqslant i\leqslant m$。

(2) 而且,如果 $Z\in\mathscr{Y}((\mathrm{add}\widehat{\ }M)_{n+1})$,则存在正合列 $0\to U\to V\to X\to 0$ 满足 $U\in\mathscr{Y}$(对应$(\mathrm{add}\widehat{\ }M)_{n-1}$)和 $V\in(\mathrm{add}\check{\ }M)_m$。

(3) 存在正合列 $0\to X\to U\to V\to 0$ 满足 $U\in\mathscr{Y}((\mathrm{add}\widehat{\ }M)_n)$和 V 使得 $0\to V\to M_{m-1}\to\cdots\to M_1\to Z\to 0$,其中任意 $1\leqslant i\leqslant m-1$,$M_i\in\mathrm{add}\ M$。而且,如果 $Z\in\mathscr{Y}((\mathrm{add}\widehat{\ }M)_{n+1})$,则 V 可取到$(\mathrm{add}\check{\ }M)_{m-1}$中。

2 主要结果

定义 2.1[3] 设 C 是自正交左A-模。左 A-模 T 称为 C-倾斜模,如果满足下列条件:(1) $\mathrm{Ext}_A^i(T,T)=0$;(2) $T\in\mathrm{add}\widehat{\ }C$;(3) $C\in\mathrm{add}\check{\ }T$。

定义 2.2 设 C 是自正交左A-模。左 A-模 T 称为 W-C-倾斜模,如果满足下列条件:(1) $\mathrm{Ext}_A^i(T,T)=0$;(2) $T\in{}_C\mathscr{X}$;(3) $C\in\mathscr{X}_T$。

注 2.1 C-倾斜模一定是 W-C-倾斜模;当 $C=A$ 时,W-C-倾斜模就是 Wakamatsu-倾斜模。

引理 2.1 设 C 是自正交模,${}_C\mathscr{X}$有相对内射余生成子 I。

(1) 设 $0\to C\to W\to C_1\to 0$ 是 A-mod 中正合列,$X\in{}_C\mathscr{X}$。如果$\mathrm{Ext}_A^1(C_1,X)=0$,则 $X\in\mathrm{gen}\ W$。

(2) 设 $0\to I_1\to T\to I\to 0$ 是 A-mod 中正合列,$Y\in{}_C\mathscr{X}$。如果$\mathrm{Ext}_A^1(Y,I_1)=0$,则 $Y\in\mathrm{cogen}\ T$。

证明 证明类似[5, Lemma 2.1],所以在此省略。

定理 2.1 设∞-$\mathrm{pres}(T)=T^{\perp}\cap{}_C\mathscr{X}$。如果${}_C\mathscr{X}$有相对内射余生成子,则 T 是 W-C-倾斜模。

证明 设 I 是${}_C\mathscr{X}$的极小相对内射余生成子。因为 $T\in\infty$-$\mathrm{pres}(T)$和∞-$\mathrm{pres}(T)=T^{\perp}\cap{}_C\mathscr{X}$,所以$\mathrm{Ext}_A^i(T,T)=0$和 $T\in{}_C\mathscr{X}$。

只需证 $C\in\mathscr{X}_T$。因为 $I\in T^{\perp}\cap{}_C\mathscr{X}$,所以 $I\in\infty$-$\mathrm{pres}(T)$,从而有正合列

$$\cdots\to T_1\xrightarrow{f_1}T_0\xrightarrow{f_0}I\to 0,$$

其中每个 $T_i\in\mathrm{add}\ T$。令 $K_i=\mathrm{Ker}\ f_{i-1}$,$\forall\ i\geqslant 1$。由此可得每个 $K_i\in\infty$-$\mathrm{pres}(T)$,即 $K_i\in T^{\perp}\cap{}_C\mathscr{X}$。特别地,$\mathrm{Ext}_A^1(C,K_1)=0$,由引理 2.1,得 $C\in\mathrm{cogen}\ T$。从而有正合列

$$0\to C\to T_0\to C_1\to 0,\qquad (*_0)$$

其中 $C\to T_0$ 是 C 的极小左 add T-逼近。由此可知 $C_1\in{}^{\perp}T$。注意到 $K_2\in T^{\perp}\cap{}_C\mathscr{X}$。用函子 $\mathrm{Hom}_A(C_1,-)$和 $\mathrm{Hom}_A(-,K_2)$分别作用正合列 $0\to K_2\to T_1\to K_1\to 0$ 和正合列$(*_0)$,由维数转移,得到

$$\mathrm{Ext}_A^1(C_1,K_1)\cong\mathrm{Ext}_A^2(C_1,K_2)\cong\mathrm{Ext}_A^1(C,K_2)=0,$$

由引理 2.1 知 $C_1\in \mathrm{cogen}\ T$。从而有正合列

$$0\to C_1\to T_1\to C_2\to 0, \qquad (*_1)$$

其中 $C_1\to T_1$ 是 C_1 的极小左 add T-逼近,$C_2\in {}^{\perp}T$。对 C_2 重复 C_1 的过程,如此继续下去,得到无限多的正合列($*_i$)。将这些正合列连接在一起,得到正合列

$$0\to C\to T_0\to T_1\to\cdots,$$

即 $C\in \mathscr{X}_T$。

定理 2.2　设 C 是自正交模,$T\in {}_C\mathscr{X}$ 且 $\infty\text{-pres}(T)\subseteq C^{\perp}$。则 $\infty\text{-pres}(T)\subseteq {}_C\mathscr{X}$。

证明　任意取 $M\in\infty\text{-pres}(T)$。从而有正合列

$$0\to M_1\to T_0\to M\to 0, \qquad (\#_0)$$

其中 $T_0\in \mathrm{add}\ T$,$M_1\in\infty\text{-pres}(T)$。因为 $T\in {}_C\mathscr{X}$,所以对正合列($\#_0$)和 $\mathscr{Y}={}_C\mathscr{X}$ 用引理 1.2,得到正合列 $0\to U_0\to V_0\to M_1\to 0$,对某个 $U_0\in {}_C\mathscr{X}$ 和 V_0 满足正合列

$$0\to V_0\to C_0\to M\to 0, \qquad (\#^0)$$

其中 $C_0\in \mathrm{add}\ C$。因为 $U_0\in C^{\perp}$ 和 $M_1\in\infty\text{-pres}(T)\subseteq C^{\perp}$,所以 $V_0\in C^{\perp}$。考虑下列 pullback 图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & M_2 & = & M_2 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & U_0 & \to & X & \to & T_1 & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & U_0 & \to & V_0 & \to & M_1 & \to & 0, \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

其中 $T_1\in \mathrm{add}\ T$,$M_2\in\infty\text{-pres}(T)$。注意到 $U_0\in {}_C\mathscr{X}$ 和 $T_1\in {}_C\mathscr{X}$。由 ${}_C\mathscr{X}$ 关于扩张封闭,从而 $X\in {}_C\mathscr{X}$。对正合列

$$0\to M_2\to X\to V_0\to 0 \qquad (\#_1)$$

重复($\#_0$)的过程,如此继续下去,得到无限多的正合列($\#^i$)。再将它们连在一起得到

$$\cdots\to C_1\xrightarrow{f_1} C_0\xrightarrow{f_0} M\to 0,$$

其中任意 $i\geqslant 0$,$C_i\in \mathrm{add}\ C$,$\mathrm{Ker}\ f_i\in C^{\perp}$。因此 $M\in {}_C\mathscr{X}$。

下面给出满足 $\dim_{\mathrm{add}\,C}(T)<\infty$ 的 W-C-倾斜模 T 是 C-倾斜模的一个充分条件。

定理 2.3　设 T 是 W-C-倾斜模且 $T\in \mathrm{a\hat{d}d}\ C$。

(1) 如果 $\sup\{\dim_{\mathrm{add}\,C}(M)\mid M\in \mathrm{a\hat{d}d}\ C\}=n<\infty$,则 T 是 C-倾斜模。

(2) 如果 $\mathrm{id}_A C<\infty$,则 T 是 C-倾斜模。

证明　(1) 因为 $C\in \mathscr{X}_T$,所以有正合列

$$0\to C\xrightarrow{f_0} T_0\xrightarrow{f_1} T_1\to\cdots,$$

其中任意 $i\geqslant 0$,$T_i\in \mathrm{add}\ T$,$K_i=\mathrm{Coker} f_i\in {}^{\perp}T$。由维数转移得

$$\mathrm{Ext}_A^1(K_n,K_{n-1})\cong \mathrm{Ext}_A^2(K_n,K_{n-2})\cong\cdots\cong \mathrm{Ext}_A^{n+1}(K_n,C),$$

因为 $T\in \mathrm{a\hat{d}d}\ C$,由引理 1.1(4)得 $K_i\in \mathrm{a\hat{d}d}\ C$。由题设知道 $K_i\in(\mathrm{a\hat{d}d}\ C)_n$,所以由引理 1.1(3)得 $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(K_n,C)=0$,从而 $\mathrm{Ext}_A^1(K_n,K_{n-1})=0$。因此正合列

$$0\to K_{n-1}\to T_n\to K_n\to 0$$

可裂,得 $K_n\in \mathrm{add}\ T$,从而 $C\in \mathrm{a\check{d}d}\ T$。所以 T 是 C-倾斜模。

(2) 证明类似(1)。

下面给出一个是 W-C-倾斜模但不是 C-倾斜模的左 A-模。

例 2.1 设 A 是由下面箭图和关系给出的 Artin 代数:

箭图: $1\cdot \leftrightarrows 2\cdot \to 3\cdot \to 4\cdot \leftrightarrows 5\cdot$ 关系: $(\mathrm{rad}\,A)^2=0$。

A 的 Auslander-Reiten 箭图如下:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & & & \\
 & & & 2 \arrow[ur] & & 1 \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
 & & & & & & \begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & 2 \\
 & & & \begin{smallmatrix}5\\4\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & 3 \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & \\
5 \arrow[dr] & & 4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}35\\4\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & \begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & 5 & & &
\end{tikzcd}$$
。

其中这些模都是用 Loewy series 来表示。注意到不可分解模 2 和 5 出现了两次。

取 $C=\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix}\oplus 3\oplus\begin{smallmatrix}35\\4\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}$, $T=D(A_A)=\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}35\\4\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}$,则 T 是 W-C-倾斜模,但不是 C-倾斜模。

参考文献:

[1] WAKAMATSU T. On modules with trivial self-extensions[J]. J Algebra, 1988, 114:106-114.
[2] MIYASHITA Y. Tilting modules associated with a series of idempotent ideals[J]. J Algebra, 2001, 238:485-501.
[3] WEI Jiaqun, XI Changchang. A characterization of the tilting pair[J]. J Algebra, 2007, 317:376-391.
[4] WEI Jiaqun, XI Changchang. Auslander-Reiten correspondence for tilting pairs[J]. J Pure Applied Algebra, 2008, 212:411-422.
[5] HAPPEL D, UNGER L. Complements and the generalized Nakayama conjecture[J]. CMS Conf Proc, 1998, 24:293-310.

(编辑:李晓红)