第 43 卷 第 5 期 山 东 大 学 学 报 (理 学 版) 2008 年 5 月
Vol.43 No.5 Journal of Shandong University(Natural Science) May 2008

文章编号:1671-9352(2008)05-0087-06

二部图中含指定顶点的独立 4-圈

耿建艳[1],颜谨[2],李峰[2]

(1. 山东万杰医学院数学教研室,山东 淄博 255213;
2. 山东大学数学学院,山东 济南 250100)

摘要:G 的一个子图集合称为相互独立的或顶点不相交的,如果它们中的任何两个子图在 G 中没有公共顶点。对于二部图,给出了 k 个含指定顶点的独立 4-圈的最小度条件。

关键词:独立圈;二部图;均衡二部图;点可容纳圈
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

Vertex-disjoint 4-cycle in a bipartite graph

GENG Jian-yan[1], YAN Jin[2], LI Feng[2]

(1. Department of Mathematics, Wanjie Medical College of Shandong, Zibo 255213, Shandong, China;
2. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

Abstract: A set of sub-graphs of G is said to be independent or vertex-disjoint if no two of them have a common vertex in G. It gives the minimum degree condition for a bipartite graph containing k independent 4-cycle, each of which contains a previously specified vertex.

Key words: independent cycles; bipartite graph; balance bipartite graph; vertex admissible cycle

0 引言

本文只考虑简单无向有限图。文中未提到的术语及概念请参考文献[1]。给定图 G,分别用 $V(G)$和 $E(G)$表示图 G 的顶点集和边集,用 $d_G(v)$和 $\delta(G)$分别表示顶点 v 在 G 中的度数和 G 的最小度。对于 $V(G)$的子集 U,$\langle U\rangle$表示由 U 导出的 G 的子图。G 的一个子图集合称为相互独立的或顶点不相交的,如果它们中的任何元素在 G 中没有公共顶点。若存在 $V(G)$的两个不交子集 V_1、V_2,使得 $V(G)=V_1\cup V_2$,且 G 的所有边均有一个端点在 V_1 内,另一个端点在 V_2 内,则称 G 为二部图。记为 $G=(V_1,V_2;E(G))$,简记为 $G=(V_1,V_2)$。如果 $|V_1|=|V_2|$,则称 G 为均衡二部图。并定义 $\sigma_{1,1}(G)=\min\{d_G(x)+d_G(y)\mid x\in V_1,y\in V_2,xy\notin E(G)\}$。

本文主要讨论了二部图中含指定顶点的独立圈问题。如无特殊说明,图 G 均是指均衡二部图。长为 4 的圈称为 4-圈。对于一个二部图来说,4-圈是最小的圈,它在图的圈理论中有着重要的地位。

Hajime Matsumura 在[2]中给出了二部图中含指定边的独立 4-圈的两个度条件:

定理 1[2] 设 $k\geqslant 1,1\leqslant s\leqslant k,n\geqslant 2k$,如果

$$\sigma_{1,1}(G)\geqslant\max\left\{\left\lceil\frac{4n+2s-1}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{2n-1}{3}\right\rceil+2k\right\},$$

收稿日期:2007-12-25
基金项目:山东省中青年科学家科研奖励基金资助项目(2007BS01021)
作者简介:耿建艳(1980-),女,硕士研究生,主要研究方向为图论及其应用. Email:gengjianyan@163.com

那么对任意给定的 k 条独立边 $e_1,e_2,\cdots,e_k$,G 含 k 个独立圈 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 使得 $e_i\in E(C_i)$,$|C_i|\leqslant 6$,且 $\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$ 中至少含有 s 个 4-圈。

定理 2[2]　设 $k\geqslant 1,0\leqslant s\leqslant k,n\geqslant 2k$。如果

$$\delta(G)\geqslant\max\left\{\left\lceil\frac{2n+2k+s}{4}\right\rceil,\left\lceil\frac{2n+4k}{5}\right\rceil\right\},$$

那么对任意给定的 k 条独立边 $e_1,e_2,\cdots,e_k$,G 含 k 个独立圈 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 使得 $e_i\in E(C_i)$,$|C_i|=4(1\leqslant i\leqslant s)$,$|C_i|\leqslant 6(s+1\leqslant i\leqslant k)$。

文献[2]中,作者还分别给出了例子说明定理1和定理2中的度条件是最好的。关于二部图有2-因子含长为4或6的圈覆盖给定边集或点集的结果请见文献[3-6]。

本文主要证明了下面的定理:

定理 3　设 $k\geqslant 2,1\leqslant s\leqslant k,n\geqslant 2k+1$。如果

$$\sigma_{1,1}(G)\geqslant\max\left\{\left\lceil\frac{4n+s+1}{3}\right\rceil,n+k\right\},$$

那么对任给的 k 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$,G 含 k 个独立圈 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 使得:$v_i\in V(C_i)$,$|C_i|\leqslant 6$,且 $\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$ 中至少有 s 个 4-圈。

1　定理3的证明

下面的证明过程中还会用到一个概念 $C[u,v]$。给圈 C 指定一个方向,则 $C[u,v]$ 表示圈 C 上从 u 到 v 的一部分(含 u,v 两点)。$C[u,v)=C[u,v]-\{v\}$,$C(u,v)=C[u,v]-\{u,v\}$。

设 $T=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ 是 G 的一个顶点集合,圈 C 称为 G 的点可容纳圈,如果 $|V(C)\cap T|=1$ 且 $|C|\leqslant 6$。一个独立圈集 $\{C_1,\cdots,C_r\}(r\leqslant k)$ 称为点可容纳的,如果每个 C_i 都是点可容纳的。

证明定理3之前先给出一个引理:

引理 1　设 C 是均衡二部图 G 中的一个圈,$x\in V(C)$,$u\in V(G-C)\cap V_1$,$v\in V(G-C)\cap V_2$。如果 $d_C(u)+d_C(v)\geqslant\frac{|C|}{2}+2$,那么:$\langle V(C)\cup\{v\}\rangle$ 含过 x 且比 C 短的圈,或者存在 $w\in N_C(u)$ 使得 $\langle V(C)\cup\{v\}-\{w\}\rangle$ 含一个过 x 的圈。

证明　假设 $d_C(v)\geqslant 3$。不妨设 $\{a,b,c\}\subset N_C(v)$。则圈 C 可分为3段 $C[a,b],C(b,c],C(c,a)$,且 x 必然属于这3段之一。不失一般性,设 $x\in C[a,b]$,则 $\langle C[a,b]\cup\{v\}\rangle$ 可形成一个过 x 且比 C 短的圈。所以 $d_C(v)\leqslant 2$。因为 $d_C(u)+d_C(v)\geqslant\frac{|C|}{2}+2$,所以有 $d_C(v)=2$,$d_C(u)=\frac{|C|}{2}$。这说明 $N_C(u)=V(C)\cap V_2$。设 $N_C(v)=\{a,b\}$,且 $x\in V(C[b,a])$。任取 $w\in N_C(u)\cap C(a,b)$,则 $\langle V(C)\cup\{v\}-\{w\}\rangle$ 含一个过 x 且与 C 等长的圈。引理1得证。

定理3的证明　设 G 是满足定理3条件但不符合其结论的含极大边的一个均衡二部图。设 $v_i\in V(G)(1\leqslant i\leqslant k)$ 是 G 中任意 k 个顶点。显然,G 不是完全二部图。则在 G 中必然存在两个不相交的点 $x\in V_1$,$y\in V_2$。设 G' 是由 G 加上一条新边 xy 而得到。则 G' 含 k 个点可容纳圈 $\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$,且 $\{C_1,C_2,\cdots,C_k\}$ 中至少有 s 个 4-圈。不失一般性,设 $xy\in E(C_k)$。那么 G 含 $k-1$ 个点可容纳圈 $\{C_1,C_2,\cdots,C_{k-1}\}$,且 $\{C_1,C_2,\cdots,C_{k-1}\}$ 中至少有 $s-1$ 个 4-圈。选择满足上述条件的圈 $\{C_1,C_2,\cdots,C_{k-1}\}$ 使 $\sum_{i=1}^{k-1}|C_i|$ 尽可能小,并设 $v_i\in V(C_i)(1\leqslant i\leqslant k-1)$。

令 $L=\langle\bigcup_{i=1}^{k-1}V(C_i)\rangle$,$M=G-L$,$|M|=2m$。显然 $d_M(v_k)>0$。任取 $v'_k\in N_M(v_k)$,令 $D=M-\{v_k,v'_k\}$,则 $|D|\geqslant 2$。不失一般性,设 $v_k\in V_1$。

根据 $\{C_1,C_2,\cdots,C_{k-1}\}$ 中 4-圈的个数,分两种情况来讨论。

情况 1　$\{C_1,C_2,\cdots,C_{k-1}\}$ 中至少含 s 个 4-圈。

命题 1　$d_D(v_k)>0$,$d_D(v'_k)>0$。

证明　假设 $d_D(v_k)=0$。任取 $z\in V(D)\cap V_2$,则 $d_M(v_k)+d_M(z)\leqslant 1+(m-1)=m$。因为 $\sigma_{1,1}(G)>\max\left\{\left\lceil\frac{4n+s+1}{3}\right\rceil,n+k\right\}$,所以:当 $n\geqslant 3k$ 时,

$$d_L(v_k)+d_L(z)\geqslant\frac{4n+s+1}{3}-m=(n-m)+(k-1)+\frac{n}{3}-k+\frac{4+s}{3}=\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{|C_i|}{2}+1\right)+\frac{n}{3}-k+\frac{4+s}{3}>\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{|C_i|}{2}+1\right)。$$

当 $n\leqslant 3k$ 时,

$$d_L(v_k)+d_L(z)\geqslant(n+k)-m=(n-m)+(k-1)+1>\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{|C_i|}{2}+1\right)。$$

所以一定存在 $C_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$使得:$d_L(v_k)+d_L(z)\geqslant\frac{|C_i|}{2}+2$。根据引理 1,一定存在 $w\in N_{C_i}(v_k)$使得$\langle V(C_i)\cup\{z\}-\{w\}\rangle$含一个过点 v_i 的圈。所以假设不成立,从而 $d_D(v_k)>0$。同理可证,$d_D(v'_k)>0$。命题 1 得证。

任取两点 $z\in N_D(v_k)$,$z'\in N_D(v'_k)$。显然 $zz'\notin E(G)$。下面根据$|D|$的范围分两种情况来讨论。

情况 1.1　$|D|\geqslant 4$。

命题 2　$d_D(z)>0,d_D(z')>0$。

证明　假设 $N_D(z)=\varnothing$。任取 $w\in V(D)\cap V_1-\{z'\}$,则:

$$d_M(z)+d_M(w)\leqslant 1+(m-1)=m。$$

其余证明与命题 1 相似。命题 2 得证。

任取 $w\in N_D(z)$,$w'\in N_D(z')$,令:

$$D_1=N_D(v'_k)\cap N_D(w')-\{z'\},\ D_2=N_D(v_k)\cap N_D(w)-\{z\}。$$

显然,$|D_i|\leqslant m-3$,$i=1,2$。

命题 3　$|D_1|+|D_2|\leqslant m-3$。

证明　假设$|D_1|+|D_2|\geqslant m-2$,则 $D_1\neq\varnothing$,$D_2\neq\varnothing$。否则可以找到满足定理 3 的圈 C_k。任取 $u\in D_2$,$u'\in D_1$。因为 $N_{D_1}(u)=\varnothing$,$N_{D_2}(u')=\varnothing$,所以:

$$d_M(u)+d_M(u')\leqslant(m-|D_1|-1)+(m-|D_2|-1)=2m-(|D_1|+|D_2|)-2\leqslant 2m-(m-2)-2=m。$$

类似于命题 1 的证明可知:一定存在 $C_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$使得:$d_{C_i}(u)+d_{C_i}(u')\geqslant\frac{|C_i|}{2}+2$。根据引理 1,可以通过边的替换找到新的圈 C'_i 而使$|D_1|+|D_2|$减小。命题 3 得证。

令 $S=\{v_k,v'_k,z,z',w,w'\}$,因为$(N_D(v_k)\cup N_D(w))\cap N_D(z')=\varnothing$,$(N_D(v'_k)\cup N_D(w'))\cap N_D(z)=\varnothing$,所以:

$$d_M(S)=2|E(G)\cap\{v_kv'_k,v_kz,v'_kz',z'w',wz\}|+|E(S,M-S)|=10+|E(S,M-S)|\leqslant 10+|M-S|+|D_1|+|D_2|\leqslant 10+2(m-3)+(m-3)=3m+1。$$

于是得到:

$$d_L(S)\geqslant 3(n+k)-(3m+1)=3(n-m)+3(k-1)+2=\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{3}{2}|C_i|+3\right)+2>\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{3}{2}|C_i|+3\right)。$$

这说明一定存在 $C_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$使得:$d_{C_i}(S)\geqslant\frac{3}{2}|C_i|+4$。先假设 $v_i\in V_1$。

(1) 假设 $C_i=v_iv'_iaa'v_i$,则有 $d_{C_i}(S)\geqslant 10$。

若$\{wa',v'_ka,v_iw',z'v_i\}\subset E(G)$,则$\langle S\cup V(C_i)\rangle$包含两个点可容纳圈 $v_kv'_kaa'wzv_k$ 和 $v_iv'_iz'w'v_i$。所以$|E(G)\cap\{wa',v'_ka,v_iw',z'v_i\}|\leqslant 3$。同理可证 $|E(G)\cap\{w'a,v_ka',v'_iw,zv_i\}|\leqslant 3$。于是$\{v_kv'_i,v'_kv_i,za,z'a'\}\subset E(G)$,这样又可以在$\langle S\cup V(C_i)\rangle$中找到两个点可容纳圈:$v_kv'_kz'a'wzv_k$ 和 $v_iv'_iaw'v_i$。

（2）假设 $C_i=v_iv'_ia'bb'av_i$，则有 $d_{C_i}(S)\geqslant 13$。

由 $|L|$ 的极小性知，对任意 $x\in S-\{v_k\}$ 都有：$d_{C_i}(x)\leqslant 2$。所以 $d_{C_i}(S)=13$。从而对任意 $x\in S-\{v_k\}$ 都有：$d_{C_i}(x)=2$，且 $d_{C_i}(v_k)=3$。则 $\left(N_{C_i}(v_k)\cap N_{C_i}(z')\right)\cap\{a,b\}\neq\varnothing$。不妨设 $a\in\left(N_{C_i}(v_k)\cap N_{C_i}(z')\right)$，则 $v_kv'_kz'av_k$ 是一个比 C_i 短的点可容纳圈。

因为上述证明中所找到的新的点可容纳圈中，点 v_i 和 v'_i 都属于同一个圈，所以由 v_i 和 v'_i 的对称性，对于 $v_i\in V_2$ 的情况也得到了证明。

情况 1.2 $|D|=2$。

命题 4 存在 4-圈 $C_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 使得：$d_{C_i}(z)=d_{C_i}(z')=2$。

证明 因为 $d_M(z)=d_M(z')=1$，所以：

$$d_L(z)+d_L(z')\geqslant(n+k)-2=(n-2)+(k-1)+1>\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{|C_i|}{2}+1\right)。$$

这说明一定存在 $C_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 使得：$d_{C_i}(\{z,z'\})\geqslant\frac{|C_i|}{2}+2$。另一方面，又由 $|L|$ 的极小性知，$d_{C_i}(\{z,z'\})\leqslant 4$。所以 $|C_i|=4$，且 $d_{C_i}(z)=d_{C_i}(z')=2$。从而证明了命题 4。

不失一般性，设 $d_{C_1}(z)=d_{C_1}(z')=2$，且 $C_1=v_1v'_1ww'v_1$。令 $L'=L-C_1$，$M'=G-L'$，$S=\{v_k,v'_k,z',z,w,w'\}$。因为 M' 中不存在两个分别过 v_k，v_1 的点可容纳圈，所以 v_kw'，v'_kw，$z'z\notin E(G)$，故 $d_G(S)\geqslant 3(n+k)=3n+3k$。由 $|L|$ 的极小性知，对任意的 $x\in S$，$d_{M'}(x)\leqslant 3$。所以 $d_{M'}(S)\leqslant 18$。从而：

$$d_{L'}(S)>3n+3k-18=(2n-8)+(5k-10)+(n-2k)>\sum_{i=2}^{k-1}(|C_i|+5)。$$

这说明一定存在 $C_i(2\leqslant i\leqslant k-1)$ 使得：$d_{C_i}(S)\geqslant|C_i|+6$。

（1）如果 $C_i=v_iv'_ia'av_i$，则 $d_{C_i}(S)\geqslant 10$。

先假设 $v_1\in V_1$，$v_i\in V_1$。

首先设 $d_{C_i}(\{v'_k,z,w'\})=6$。若 $d_{C_i}(v_k)=0$，则必有 $d_{C_i}(\{z',w\})=4$，从而可以找到 3 个点可容纳圈：$v_kv'_ka'zv_k$，$v_1v'_1ww'v_1$ 和 $v_iv'_iz'av_i$。如果 $v_ka\in E(G)$，那么可找到 3 个点可容纳圈：$v_kv'_ka'av_k$，$v_1v'_1z'w'v_1$ 和 $v_iv'_iwzv_i$。所以 $v_ka\notin E(G)$，从而有 $d_{C_i}(\{z',w\})\geqslant 3$。由 z' 与 w 的对称性，不妨设 $d_{C_i}(w)=2$，于是又可找到 3 个点可容纳圈：$v_kv'_ka'zv_k$，$v_iv'_iwav_i$ 和 $v_1v'_1z'w'v_1$。

如果 $d_{C_i}(\{v_k,z',w\})=6$，则 $d_{C_i}(\{v'_k,z,w'\})\geqslant 4$，如果 $d_{C_i}(v'_k)\leqslant 1$，由 w' 和 z 的对称性，不妨设 $d_{C_i}(w')=2$，于是可以找到 3 个点可容纳圈：$v_kv'_kz'av_k$，$v_iv'_ia'w'v_i$ 和 $v_1v'_1wzv_1$。所以 $d_{C_i}(v'_k)=2$，于是可以找到 3 个点可容纳圈：v_kzwav_k，$v_iv'_ia'v'_kv_i$ 和 $v_1v'_1z'w'v_1$。

因为上面所找到的点可容纳圈中，点 v_1 和 v'_1 都包含于同一个圈中，点 v_i 和 v'_i 也都包含于同一个圈中，所以 v_1 和 v'_1 具有对称性，v_i 和 v'_i 也具有对称性，所以不管 v_1 和 v_i 属于二部图中的哪一分支，都可以得到要证的结论。

下面假设 $d_{C_i}(\{v_k,z',w\})=d_{C_i}(\{v'_k,z,w'\})=5$。显然 $\left(N_{C_i}(v_k)\cap N_{C_i}(z')\right)\neq\varnothing$。不失一般性，设 $v'_i\in\left(N_{C_i}(v_k)\cap N_{C_i}(z')\right)$。又由 w' 与 z 的对称性，不妨设 $d_{C_i}(z)=2$，于是可以找到 3 个点可容纳圈：$v_1v'_1ww'v_1$，$v_kv'_kz'v'_iv_k$，$v_iza'av_i$。

因为上面所找到的点可容纳圈中，点 v_1 和 v'_1 都包含于同一个圈中，所以 v_1 和 v'_1 具有对称性，所以对于 $v_1\in V_2$，$v_i\in V_1$ 的情况也得到了证明。下面假设 $v_1\in V_1$，$v_i\in V_2$。

如果 $v_kv_i\in E(G)$。又设 $v'_ka\in E(G)$，由 w' 和 z 的对称性，不妨设 $d_{C_i}(z)=2$，于是可以找到 3 个点可容纳圈：$v_kv'_kazv_k$，$v_iv'_ia'z'v_i$ 和 $v_1v'_1ww'v_1$。若 $v'_ka\notin E(G)$，则 $v'_kv'_i\in E(G)$，同样可以找到 3 个点可容纳圈。所以 $v_kv'_i\notin E(G)$。假设 $v'_ka\in E(G)$，那么可以找到点可容纳圈：$v_kv'_kazv_k$，$v_iv'_ia'z'v_i$ 和 $v_1v'_1w'wv_1$。所以

$v'_k a \notin E(G)$,从而 $v_k v_i \in E(G)$,这样同样可以得到 3 个点可容纳圈。

下设 $v_1 \in V_2$, $v_i \in V_2$。

如果 $v_k a' \in E(G)$,不妨设 $d_{C_i}(z') = 2$。又知 $d_{C_i}(v'_k) \geqslant 1$,不妨设 $v'_k v'_i \in E(G)$。由 w 和 z 的对称性,不妨设 $d_{C_i}(w) = 2$,于是$\langle V(C_1) \cup V(C_i) \cup S \rangle$包含 3 个点可容纳圈:$v_k v'_k z' a' v_k$, $v_i v'_i w a v_i$ 和 $v_1 v'_1 z w' v_1$。所以 $v_k a' \notin E(G)$,从而 $v_k v_i \in E(G)$。因为 $d_{C_i}(\{w, v'_k, z\}) = 5$,所以 $N_{C_i}(v'_k) \cap N_{C_i}(z) \neq \emptyset$。不妨设$\{v'_k v'_i, z v'_i\} \subset E(G)$,则可找到 3 个点可容纳圈:$v_k v'_k v'_i z v_k$, $v_i a a' z' v_i$ 和 $v_1 v'_1 w w' v_1$。

(2) 如果 $C_i = v_i v'_i a' a b b' v_i$,且 $d_{C_i}(S) \geqslant 12$。

先设 $v_1 \in V_1$, $v_i \in V_1$,对于其它情况可类似地证明。

显然 $d_{C_i}(\{v_k, v'_k, z', z\}) \geqslant 12 - d_{C_i}(\{w, w'\}) \geqslant 12 - 6 = 6$。如果 $z v_i \in E(G)$,那么$|E(G) \cap \{za', zb\}| = 0$,否则可以找到过点 v_i 且比 C_i 短的点可容纳圈。同理,若 $v_k v_i \in E(G)$,则$|E(G) \cap \{v'_k a', v'_k b\}| = 0$。同时,如果存在 $x \in \{a', b\}$使得$\{v'_k x, zx\} \subset E(G)$,那么可以找到过 v_k 且比 C_i 短的点可容纳圈:$v_k v'_k x z v_k$。所以 $d_{C_i}(\{v'_k, z\}) \leqslant 3$,且此不等式取等号时有两种可能:$\{v'_k v_i, za', zb\} \subset E(G)$或$\{v'_k a', v'_k b, z v_i\} \subset E(G)$。所以 $d_{C_i}(\{v_k, z'\}) \geqslant 3$。若存在 $y \in \{v'_i, a, b'\}$,使得$\{v_k y, z' y\} \subset E(G)$,则可找到比 C_i 短的点可容纳圈:$v_k y z' v'_k v_k$。所以 $d_{C_i}(\{v_k, z'\}) = d_{C_i}(\{v'_k, z\}) = 3$。不失一般性,设$\{v'_k a', v'_k b, z v_i\} \subset E(G)$。显然,$d_{C_i}(z') \leqslant 2$ 且 $d_{C_i}(v_k) \leqslant 2$,否则可找到比 C_i 短的点可容纳圈。假设 $v_k v'_i \notin E(G)$。若$\{v_k a, v_k b'\} \subset E(G)$,则圈 $v_k a b b' v_k$ 比 C_i 短。不妨设 $v_k a \in E(G)$,则$\{z' v'_i, z' b'\} \subset E(G)$,那么圈 $v_i v'_i z' b' v_i$ 也比 C_i 短。所以 $v_k v'_i \in E(G)$,从而可以找到比 C_i 短的点可容纳圈:$v_k v'_k a' v'_i v_k$。

这样就完成了情况 1 的证明。

情况 2　$\{C_1, \cdots, C_{k-1}\}$中恰好有 $s-1$ 个 4-圈。

假设$|C_i| = 4(1 \leqslant i \leqslant s-1)$,$|C_i| = 6(s \leqslant i \leqslant k-1)$。这样就有:$|L| = 4(s-1) + 6(k-s) = 6k - 2s - 4$,$|M| = 2m = 2n - 6k + 2s + 4$。显然,$d_M(v_k) > 0$。任取 $v'_k \in N_M(v_k)$。

命题 5　$d_M(v_k) \geqslant \dfrac{n-3k+s+5}{3}$,$d_M(v'_k) \geqslant \dfrac{n-3k+s+5}{3}$。

证明　假设 $d_M(v_k) \leqslant \dfrac{n-3k+s+4}{3}$。因为 $m = n-3k+s+2$,所以:

$$m - d_M(v_k) \geqslant (n-3k+s+2) - \frac{n-3k+s+4}{3} = \frac{2n-6k+2s+2}{3} = \frac{2m-2}{3} > 0。$$

从而 $V(D) \cap V_2 - N_G(v_k) \neq \emptyset$。任取 $z \in V(D) \cap V_2 - N_G(v_k)$,则有:

$$d_M(v_k) + d_M(z) \leqslant \frac{n-3k+s+5}{3} + (m-1) = \frac{n-3k+s+2}{3} + m。$$

故

$$d_L(v_k) + d_L(z) \geqslant \frac{4n+s+1}{3} - \frac{n-3k+s+2}{3} - m = n + k - \frac{1}{3} - m =$$

$$(n-m) + (k-1) + \frac{2}{3} > \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{|C_i|}{2} + 1\right)。$$

所以一定存在 $C_i(1 \leqslant i \leqslant k-1)$使得:$d_{C_i}(\{v_k, z\}) \geqslant \dfrac{|C_i|}{2} + 2$。根据引理 1,可以通过顶点的替换而使 $d_M(v_k)$增大。

同理可证,$d_M(v'_k) \geqslant \dfrac{n-3k+s+5}{3}$。这样就完成了命题 5 的证明。

任取 $z \in N_M(v_k)$, $z' \in N_M(v'_k)$。

命题 6　存在 $C_i(1 \leqslant i \leqslant k-1)$,使得$|C_i| = 4$,且 $d_{C_i}(\{z, z'\}) = 4$。

证明　由命题 5 知

$$d_M(z)+d_M(z')\leqslant(m-d_M(v'_k)+1)+(m-d_M(v_k)+1)\leqslant 2m-\frac{2(n-3k+s+5)}{3}+2=$$
$$2m-\frac{2n-6k+2s+4}{3}=\frac{4m}{3}。$$

从而
$$d_L(z)+d_L(z')\geqslant\frac{4n+s+1}{3}-\frac{4m}{3}=\frac{2}{3}(2n-2m)+\frac{s+1}{3}=\frac{2}{3}(6k-2s-4)+\frac{s+1}{3}=$$
$$(4k-s-3)+\frac{2}{3}=3(s-1)+4(k-s)+\frac{2}{3}=$$
$$\sum_{i=1}^{s-1}(\frac{|C_i|}{2}+1)+\sum_{i=s}^{k-1}(\frac{|C_i|}{2}+1)。$$

这说明一定存在 $C_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$,使得 $d_{C_i}(z)+d_{C_i}(z')\geqslant\frac{|C_i|}{2}+2$。另一方面,由$|L|$的极小性知,$d_{C_i}(\{z,z'\})\leqslant 4$。所以$|C_i|=4$,且 $d_{C_i}(z)=d_{C_i}(z')=2$。这样就完成了命题6的证明。

不失一般性,设 $d_{C_1}(\{z,z'\})=4$,且 $C_1=v_1v'_1w'wv_1$。令 $L'=L-C_1$, $M'=G-L'$, $S=\{v_k,v'_k,z,z',w,w'\}$, $D'=M'-S-\{v_1,v'_1\}$。

命题7 存在 $C_i(2\leqslant i\leqslant k-1)$,使得 $d_{C_i}(S)\geqslant|C_i|+6$。

证明 因为 $d_{M'}(S)\leqslant 18+2|D'|=18+2(2n-6k+2s)=4n-12k+4s+18$。所以:

$$d_{L'}(S)>3\times\frac{4n+s+1}{3}-(4n-12k+4s+18)=12k-3s-17=(11k-2s-18)+(k-s+1)>11k-2s-18。$$

另一方面,

$$\sum_{i=2}^{k-1}(|C_i|+5)=|L'|+5(k-2)=(6k-2s-8)+5k-10=11k-2s-18。$$

所以,$d_{L'}(S)>\sum_{i=2}^{k-1}(|C_i+5|)$。这说明一定存在 $C_i(2\leqslant i\leqslant k-1)$,使得 $d_{C_i}(S)\geqslant|C_i|+6$。

剩余部分的证明与情况1.2的证明类似,这里不再赘述。

至此完成了定理3的证明。

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with application[M]. London: Macmillan, 1976.
[2] Hajime Matsumura. Vertex-disjiont 4-cycles containing specified edges in bipartite graph[J]. Discrete Math, 2005, 297:78-90.
[3] WANG H. Proof of a conjecture on cycles in a bipartite graph[J]. J. Graph Theory, 1999, 31:333-343.
[4] YAN J, LIU G Z. On 2-factors with prescribed properties in a bipartite graph[J]. Acta Mathematica Sinica, 2006, 22(4):1115-1120.
[5] YAN J, LIU G Z. On 2-factors with quadrilaterals containing specified vertices of a bipartite graph[J]. Ars Combin, 2007, 82:133-144.
[6] YAN J, LIU G Z. Vertex-disjoint quadrilaterals containing specified edges in a bipartite graph[J/OL]. [2007-11-30]. http://www.springerlink.com/content/v2p5x361j4520627/fulltext.pdf.

(编辑:李晓红)