

基于非正交同位网格下求解 N-S 方程的快速算法

徐涛^{1,2}, 葛长江², 左文杰², 吉野陈萌², 徐天爽²

(1. 吉林大学 汽车动态模拟国家重点实验室, 长春 130022; 2. 吉林大学 机械科学与工程学院, 长春 130022)

摘要: 利用有限体积法在非正交网格上实施了 SIMPLEXT 算法, 该算法显式处理了邻点速度、源项及交叉导数项对速度修正值的影响, 详细地给出了算法的推导过程, 并对斜方腔顶盖驱动流进行了数值模拟。结果表明, 在雷诺数不断增加的情况下, 旋涡的数量也随之增加, 同时意味着随着雷诺数的增大, 惯性力也相对变大, 从而对空腔内流动的作用也相应地增强, 可见 SIMPLEXT 算法有效而准确地模拟了物理现象, 同时能在相对宽的亚松弛因子上得到收敛解, 具有更好的健壮性, 可用于几何形状比较复杂流场的计算。

关键词: 流体力学; SIMPLEXT 算法; 非正交同位网格; 健壮性

中图分类号: O357.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5497(2009)06-1521-06

Fast algorithm for solving N-S equation based on nonorthogonal collocated grids

XU Tao^{1,2}, GE Chang-jiang², ZUO Wen-jie², JIYE Chen-meng², XU Tian-shuang²

(1. State Key Laboratory of Automotive Dynamic Simulation, Jilin University, Changchun 130022, China; 2. Institute of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: A SIMPLEXT algorithm is established based on nonorthogonal collocated grids by using finite volume method. The algorithm explicitly treats the influences of adjacent velocity, source term and cross-derivatives on the velocity correction value. Detail of derivation of the algorithm is given, and numerical simulation of the inclined lid-driven square cavity flow is carried out. Results show that as Reynolds number increases the number of eddy increases, the inertia force also increases that enhances the flow inside the cavity. It is demonstrated that convergent solution can be obtained by the SIMPLEXT algorithm under relatively wide underrelaxation. The robustness of the algorithm is also better and it can be used for the calculation of flow fields with complex boundaries.

Key words: hydromechanics; SIMPLEXT algorithm; nonorthogonal collocated grids; robustness

随着计算流体力学研究工作的深入,在非正交曲线坐标系上的同位网格下求解 N-S 方程的方法上有了很多的研究成果,如 SIMPLE 算法^[1-3]、SIMPLER 算法^[4]、PISO 算法^[5]以及 SIMPLER^[6]算法等,并被广泛应用。在文献[7]

中对于压力的交叉导数项提出了一种部分隐式、部分显式的离散方法,从而建立了完全的压力修正方程,对于网格倾斜比较严重的情形,可以在松弛因子很宽的范围得到收敛的解。而文献[8]对压力修正方程中的压力的交叉导数项作了近似

收稿日期: 2008-08-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(50975121).

作者简介: 徐涛(1955-),女,教授,博士生导师.研究方向:计算力学,结构优化,图像处理. E-mail: xutao@jlu.edu.cn

通信作者: 葛长江(1981-),男,博士研究生.研究方向:计算流体力学中的数值方法. E-mail: mygongbo@gmail.com

处理,得到了改进的 SIMPLEC 算法。

为了提高计算精度,获得更好的收敛性,本文在非正交适体曲线坐标系下,以逆变分量作为计算平面上连续性方程的速度分量,以直角坐标分量作为计算平面上动量方程的速度分量,提出了 SIMPLECT 算法。对于同位网格的界面速度采用文献[9]中的方法,并在速度修正值方面考虑邻点速度、源项及交叉导数项的影响,对斜方腔顶盖驱动流进行了数值模拟,结果表明 SIMPLECT 算法计算效率高,在保证收敛速度的前提下可得到高精度的数值解,并有较好的健壮性。

1 控制方程的离散

对直角坐标系中二维稳态流动问题,其控制方程分别为

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + R(x, y) \quad (1b)$$

式中: u, v, ρ, Γ 分别为水平速度、垂直速度、密度及扩散系数; $R(x, y)$ 为包含压力在内的源项; ϕ 是待求速度分量。通过引入曲线坐标 $\zeta = \zeta(x, y), \eta = \eta(x, y)$ 将式(1b)转换到计算平面(见图 1),得

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V \phi) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma}{J} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right] + R J \quad (2)$$

式中:

$$\begin{cases} \alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \beta = \frac{\partial x \partial x}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial y \partial y}{\partial \zeta \partial \eta} \\ \gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2, J = \frac{\partial x \partial y}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{\partial x \partial y}{\partial \eta \partial \zeta} \\ U = u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta}, V = v \frac{\partial x}{\partial \zeta} - u \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{cases} \quad (3)$$

对式(2)在各个控制容积上积分,同时将压力梯度项从 $R(x, y)$ 中分离出来,且将交叉导数项放到源项中进行显式处理,当 $\phi = u$ 时,可得

$$a_p^u u_p = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb} + d^u + \left[b^u \frac{\partial p}{\partial \zeta} + c^u \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]_p \quad (4)$$

式中:下标 nb 表示邻近节点 E, W, N, S ; $a_p^u = \sum_{nb} a_{nb}^u$; 源项 d^u 为常数;系数 a_{nb}^u 由所采用的离散格式决定; $\frac{\partial p}{\partial \zeta}, \frac{\partial p}{\partial \eta}$ 代表其离散形式; $b^u = -$

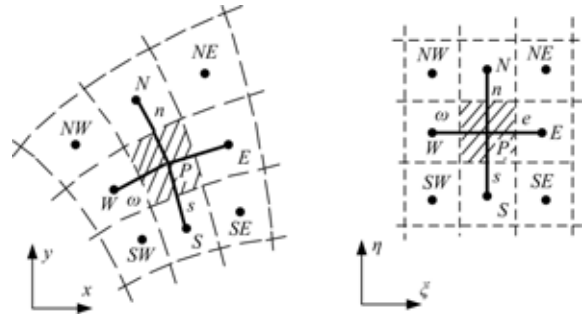


图 1 物理平面与计算平面的坐标变换

Fig. 1 Coordinate transformation of physical plane and calculation plane

$\Delta \zeta \Delta \eta \frac{\partial y}{\partial \eta}; c^u = -\Delta \zeta \Delta \eta \frac{\partial x}{\partial \zeta}$ 。同理当 $\phi = v$ 时,可得

$$a_p^v v_p = \sum_{nb} a_{nb}^v v_{nb} + d^v + \left[b^v \frac{\partial p}{\partial \zeta} + c^v \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]_p \quad (5)$$

类似可得,在计算平面上的连续性方程(1a)的离散形式为

$$(\rho U A)_w^e + (\rho V A)_s^n = 0 \quad (6)$$

2 SIMPLECT 算法推导

由式(4)得

$$u_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb}^u + d^u}{a_p^u} + \left[B^u \frac{\partial p}{\partial \zeta} + C^u \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]_p = \tilde{u}_p + \left[B^u \frac{\partial p}{\partial \zeta} + C^u \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]_p \quad (7)$$

将式(7)代入 U, V 的定义式中,同时考虑邻点速度值,类似式(7)的推导,可得界面速度 U_e 为

$$U_e = \tilde{U}_e + \left[B^u \frac{\partial p}{\partial \zeta} + C^u \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]_e$$

当物理平面上所生成的网格的网格线夹角在 $[45^\circ, 135^\circ]$ 范围内时,可以略去交叉压力梯度项,且又能得到五点格式的压力方程^[10],从而简化 U_e 表达式为

$$U_e = \tilde{U}_e + \left[B^u \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right]_e \quad (8)$$

式中: \tilde{U}_e, B^u 按节点上的值作线性插值可得。

同理可有界面速度 V_e 为

$$V_e = \tilde{V}_e + \left[C^v \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]_e \quad (9)$$

将式(8)、式(9)代入连续性方程的离散形式(6)中有

$$a_p^p p_p = \sum_{nb} a_{nb}^p p_{nb} + b^p \quad (10)$$

式中: $a_e^p = \left[\rho B \frac{\Delta \eta}{\delta \zeta} \right]_e, a_w^p = \left[\rho B \frac{\Delta \eta}{\delta \zeta} \right]_w$

$$a_{nb}^p = \left[\rho C \frac{\Delta \zeta}{\delta \eta} \right]_n, a_n^s = \left[\rho C \frac{\Delta \zeta}{\delta \eta} \right]_s$$

$$a_p^b = a_n^e + a_w^b + a_n^s + a_s^b$$

$$b^p = (\rho \tilde{U} \Delta \eta)_{\omega}^e + (\rho \tilde{V} \Delta \zeta)_{\omega}^s$$

求得的压力记为 p^* , 然后求解动量方程式(4), 求得速度记为 u^* , 即 p^*, u^* 满足方程(11)

$$a_p^u u_p^{**} = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}^{**} + d^u + \left[b^u \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + c^u \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right]_p \quad (11)$$

根据 SIMPLE 算法, 速度修正通过压力修正得到的, 且不考虑速度修正值对源项的影响, 有

$$a_p^u u_p^{**} = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}^{**} + d^u + \left[b^u \frac{\partial p^{**}}{\partial \zeta} + c^u \frac{\partial p^{**}}{\partial \eta} \right]_p \quad (12)$$

式中: $u_p^{**} = u_p^* + u'_p$; $u_{nb}^{**} = u_{nb}^* + u'_{nb}$; $p^{**} = p^* + p'$; u', p' 分别为速度和压力的第一次修正值, 式(12)与式(11)相减得

$$u'_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb}^u u'_{nb}}{a_p^u} + \left[B^u \frac{\partial p'}{\partial \zeta} + C^u \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right]_p$$

这里为简化计算, 忽略邻点速度和交叉导数的影响, 有

$$u'_p = \left[B^u \frac{\partial p'}{\partial \zeta} \right]_p$$

类似地, 界面速度修正值为

$$U'_e = \left[B^u \frac{\partial p'}{\partial \zeta} \right]_e; V'_n = \left[C^v \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right]_n \quad (13)$$

$$U_e^{**} = U_e^* + \left[B^u \frac{\partial p'}{\partial \zeta} \right]_e$$

$$V_n^{**} = V_n^* + \left[C^v \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right]_n$$

代入连续性方程中, 得

$$a_p^b p'_p = \sum_{nb} a_{nb}^b p'_{nb} + b^{b'} \quad (14)$$

这里 $b^{b'} = (\rho U^* \Delta \eta)_{\omega}^e + (\rho V^* \Delta \zeta)_{\omega}^s$

由上述可知, 虽然 u^{**}, p^{**} 满足连续性方程, 但未必满足动量方程, 为此再进行一次修正, 同时考虑邻点速度、交叉导数项及源项的影响

$$a_p^u u_p^{***} = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}^{***} + d^u + \left[b^u \frac{\partial p^{***}}{\partial \zeta} + c^u \frac{\partial p^{***}}{\partial \eta} \right]_p \quad (15)$$

这里 $u_p^{***} = u_p^{**} + u''_p$, $u_{nb}^{***} = u_{nb}^{**} + u''_{nb}$, $p^{***} = p^{**} + p''$, 式(15)与式(12)相减得

$$a_p^u u''_p = \sum_{nb} a_{nb}^u u''_{nb} + \left[b^u \frac{\partial p''}{\partial \zeta} + c^u \frac{\partial p''}{\partial \eta} \right]_p + S^u$$

这里 S^u 是源项中只与速度有关的部分, u''_{nb}, p''

未知, 为简化计算过程, 部分采用显式处理, 用一次修正值代替二次修正值, 同时考虑均匀化, 得

$$u''_p = u'_p + \left[B^u \frac{\partial p''}{\partial \zeta} \right]_p + \left[C^u \frac{\partial p''}{\partial \eta} \right]_p + S^u$$

同理, 有

$$U''_e = U'_e + \left[B^u \frac{\partial p''}{\partial \zeta} \right]_e + \left[C^u \frac{\partial p''}{\partial \eta} \right]_n + S^e \quad (16)$$

同理

$$V''_n = V'_n + \left[B^v \frac{\partial p''}{\partial \zeta} \right]_n + \left[C^v \frac{\partial p''}{\partial \eta} \right]_n + S_n \quad (17)$$

将 U^{***}, V^{***} 代入连续性方程(6)中得

$$a_p^b p''_p = \sum_{nb} a_{nb}^b p''_{nb} + b^{b''} \quad (18)$$

这里

$$b^{b'} = \left[\rho \Delta \eta \left\{ U' + C^u \frac{\partial p'}{\partial \eta} + S \right\} \right]_{\omega}^e + \left[\rho \Delta \zeta \left\{ V' + B^v \frac{\partial p'}{\partial \zeta} + S \right\} \right]_{\omega}^s$$

SIMPLEXT 算法的计算步骤如下:

(1) 假设一个初始速度场或按上一层计算得出的界面流速, 计算动量离散方程的系数;

(2) 由压力 Poisson 方程式(10)解出的压力记为 p^* ;

(3) 计算动量离散方程式, 得 u^*, v^* ;

(4) 按 p' 压力修正方程式(14)更新速度等;

(5) 解 p'' 压力修正方程式(18), 再次更新速度等;

(6) 计算通过源项物性等与速度场耦合的变量, 反之, 应在速度场收敛后再求解;

(7) 利用改进后的速度场重新计算动量离散方程的系数, 并用改进后的压力场作为下一层次迭代计算的初值, 从第(3)步开始重复上述步骤, 直到获得收敛的解。

文中压力修正值 p' 和 p'' 不仅要修正速度, 还要修正压力。流场采用亚松弛, 速度的松弛因子被组织到代数方程中。代数方程组的求解是采用近年计算流体力学问题中广泛引用的 SIP 方法, 它是一种基于矩阵不完全分解技术的求解方法, 具有更高的直接解法的比例, 因而可以获得更快的收敛速度, 适用于求解结构化网格中所形成的代数方程组。在 SIMPLER^[4] 算法中每次外迭代都要进行初始场耦合, 而本文建立的 SIMPLEXT 算法在让压力场和速度场同时满足动量方程和连续性方程时采用了两次修正的方法, 以便能有匹配更好的流场, 不必每次外迭代都要进行初始场耦合, 所以取消了在以后的迭代计算步骤中的前

2步,减少了计算流程。同时由于SIMPLEXT算法是隐式求解控制方程,因此要比PISO算法^[5]有更好的稳定性和准确性。

3 场仿真模拟及计算结果分析

3.1 流场模拟

本文对 α 为 30° 、 45° 顶盖驱动流在不同雷诺数下进行了数值模拟,见图 2。

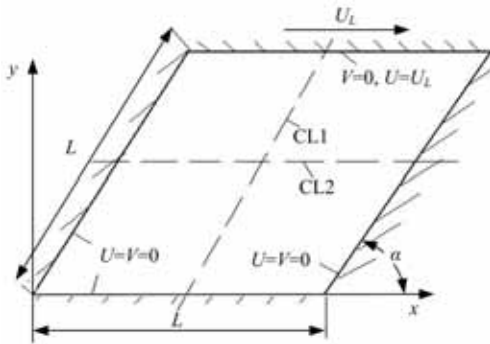


图 2 二维方腔顶盖驱动流

Fig. 2 Lid driven flow in a square cavity

定义雷诺数

$$Re = U_L L / \nu \quad (19)$$

式中: U_L 为顶盖移动速度; L 为方腔的长度; ν 为流动介质的运动黏度。设前两个系数都是常数,利用调整运动黏性系数控制 Re 数,从而得知算例所处的流动情况,进而了解本文方法的适用范围。采用非正交适体网格(40×40 的非均匀网格),对流项采用中心差分格式,并采用延迟修正,扩散项采用中心差分格式。速度和压力的松弛因子分别为 0.7、0.1。收敛条件采用判断余量和规定最大迭代次数的方式,当余量小于 1.0×10^{-4} 时,可结束当前操作,转入下一操作。若无法满足收敛指标,则迭代次数达到所设定的最大次数时,计算结束。计算所用配置 CPU Celeron(R) 2.80 GHz,内存 512 M。程序在 Visual Fortran 软件中调试运行。

3.2 算法的结果分析

图 3 为 SIMPLEXT 算法取不同倾角和雷诺数下的流线图,它们与文献[11]中的基准解一致。从不同雷诺数下流线的分布上,可以清楚地看到在二维顶盖方腔驱动流中对于 $Re=100$ 时,大涡流几乎占据了整个空腔,对于 $Re=1000$ 时,主要的涡流只占据了空腔的 $1/3$,最大的涡流是第二个,而在 $\alpha=45^\circ$ 时,在左下角有个非常小的涡流,强度弱了三阶。同时,随着 Re 数的增大,惯性力

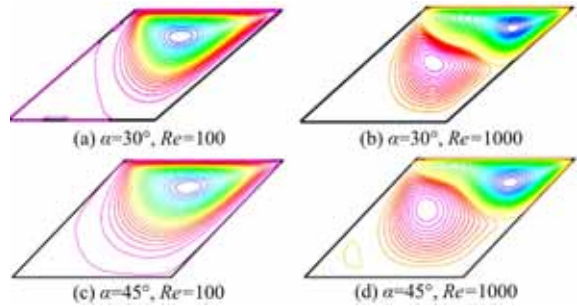
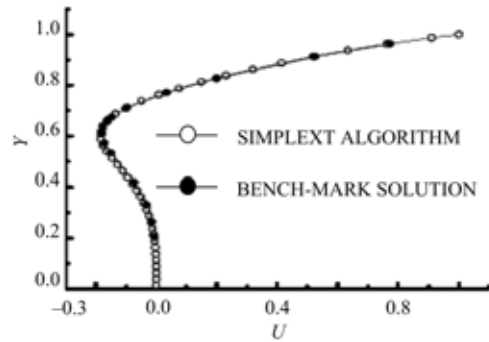


图 3 流线图

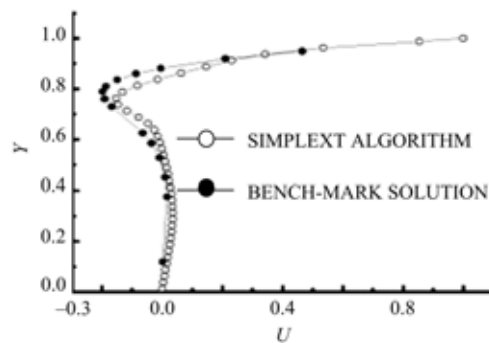
Fig. 3 Streamlines

也相对变大,从而对空腔内流动的作用也相应增强。这同时符合 Re 不断增加的情况下,旋涡的数量也随之增加的规律。

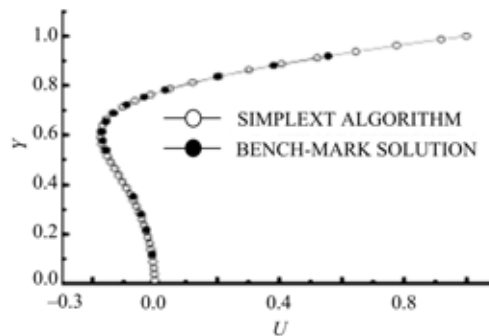
图 4 和图 5 分别给出了 SIMPLEXT 算法在



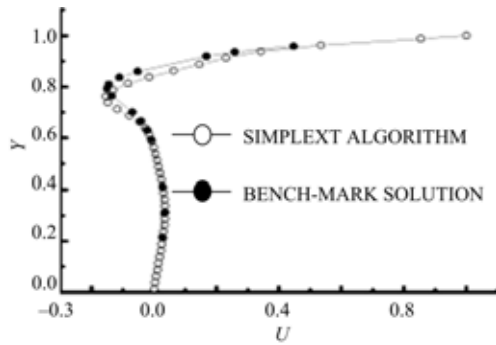
(a) $\alpha=30^\circ, Re=100$



(b) $\alpha=30^\circ, Re=1000$

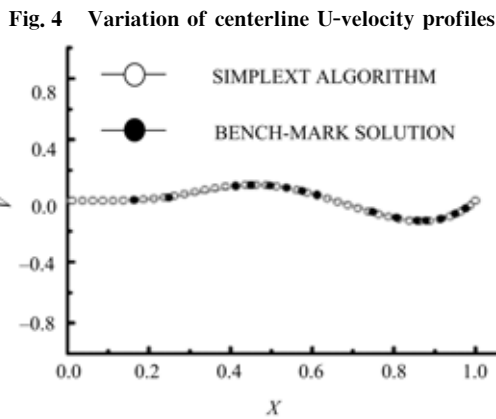


(c) $\alpha=45^\circ, Re=100$

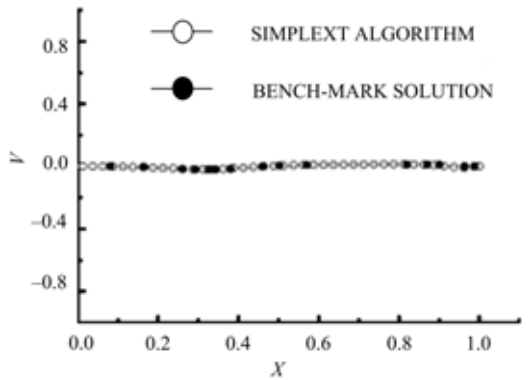


(d) $\alpha=45^\circ, Re=1000$

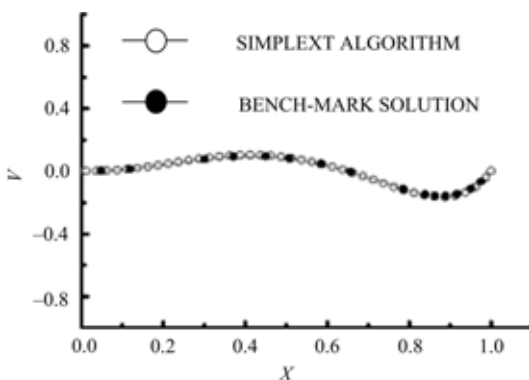
图 4 中心线上 U 分布



(a) $\alpha=30^\circ, Re=100$

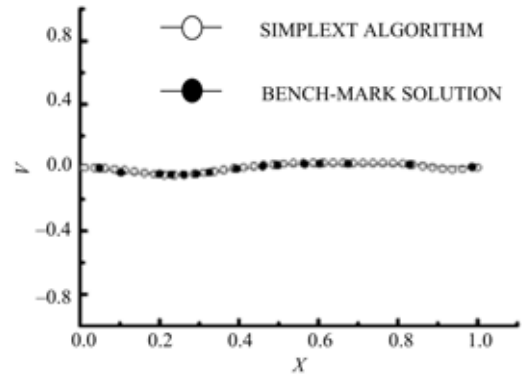


(b) $\alpha=30^\circ, Re=1000$



(c) $\alpha=45^\circ, Re=100$

Fig. 4 Variation of centerline U-velocity profiles



(d) $\alpha=45^\circ, Re=1000$

图 5 中心线上 V 分布

Fig. 5 Variation of centerline V-velocity profiles

不同倾角和雷诺数下二维方腔顶盖驱动流的中线上 U, V 的分布。 U, V 的这些变化趋势以及 U, V 各自的数值大小均与文献[11]中的结果相吻合。

表 1 中 $\alpha_{u, v, p}$ 表示 u, v, p 的亚松弛因子, 在计算时间上本文所提出的 SIMPLEXT 算法与 SIMPLE 算法相差无几, 但是本文方法可在相对宽的亚松弛因子上得到收敛解, 见表 1 中, 当 $\alpha_{u, v, p}=0.7, 0.7, 0.3$ 时 SIMPLE 算法就会发散, 而 SIMPLEXT 算法依然可以收敛, 事实上, SIMPLE 算法在速度亚松弛因子与压力亚松弛因

Table 1 CPU time using different algorithms under different Reynolds Number and underrelaxation factor

算法	亚松弛因子 $\alpha_{u, v, p}$	CPU 时间	
		$Re=100$	$Re=1000$
SIMPLE	0.7, 0.7, 0.1	0.53	1.50
	0.7, 0.7, 0.2	0.43	1.53
	0.7, 0.7, 0.3	—	—
	0.7, 0.7, 0.4	—	—
	0.8, 0.8, 0.1	0.56	1.28
	0.8, 0.8, 0.2	—	—
SIMPLEXT	0.8, 0.8, 0.3	—	—
	0.8, 0.8, 0.4	—	—
	0.7, 0.7, 0.1	0.57	1.80
	0.7, 0.7, 0.2	0.39	1.41
	0.7, 0.7, 0.3	0.40	1.40
	0.7, 0.7, 0.4	0.40	1.34
	0.8, 0.8, 0.1	0.62	1.58
	0.8, 0.8, 0.2	0.42	1.20
0.8, 0.8, 0.3	0.31	0.94	
0.8, 0.8, 0.4	0.23	0.95	

子之和大于 0.9 时就会发散。而本文所构造的算法能在最高达到 1.2 的情况下收敛。且文献[8]中的基准解计算,采用了单方向是本文 8 倍的网格密度的多重网格法计算,由此可见 SIMPLEXT 算法拥有更好的健壮性。

4 结束语

在非正交同位网格下提出了一个 SIMPLEXT 算法来求解不可压流场问题。该算法在速度修正值方面考虑邻点速度、源项及交叉导数项的影响,进行了显式处理,达到了简化计算和程序的目的,并采用多步修正,实现了在每次外迭代前有一个好的初始场。算例表明:在多数情况下, SIMPLEXT 算法都能准确而有效地模拟流场,并得到很好的计算结果,且在相对宽的参数范围内得到收敛解,显示了良好的健壮性。

参考文献:

- [1] 王志东,汪德燿,赖锡军. 非正交同位网格中的 SIMPLE 算法[J]. 河海大学学报:自然科学版, 2003,31(5):509-512.
Wang Zhi-dong, Wang De-guan, Lai Xi-jun. Non-orthogonal collocated grid-based SIMPLE algorithm [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2003,31(5):509-512.
- [2] 赖锡军,汪德燿,傅源方. 非结构同位网格 SIMPLE 类算法收敛性能比较[J]. 空气动力学学报,2004,22(3):289-294.
Lai Xi-jun, Wang De-guan, Fu Yuan-fang. Convergence performance of SIMPLE-like algorithm on unstructured grids [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2004,22(3):289-294.
- [3] 朱松林,王献孚,陆瑞松. 在非交错网格上求解非正交曲线坐标系下 N-S 方程[J]. 计算物理,1998,15(1):95-100.
Zhu Song-lin, Wang Xian-fu, Lu Rui-song. A numerical study for N-S equation in arbitrary curvilinear coordinates with nonstaggered gridsS[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 1998,15(1):95-100.
- [4] Acharya S, Moukalled F H. Improvements to incompressible flow calculation on a nonstaggered curvilinear grid [J]. Numer Heat Transfer, 1989, 15: 131-152.
- [5] Parameswaran S, Srinivasan A. Numerical aerodynamic simulation of steady and transient flows around two-dimensional bluff bodies using the non-staggered grid system[J]. Numerical Heat Transfer, Part A, 1992,21(4):443-461.
- [6] Kobayashi M H, Pereira J C F. Calculation of incompressible laminar flows on a nonstaggered, non-orthogonal grid[J]. Numer Heat Transfer, Part B, 1991,19:343-362.
- [7] Cho M J, Chang M K. New treatment of nonorthogonal terms in the pressure-correction equation[J]. Numer Heat Transfer, Part B, 1994,26:133-145.
- [8] Wang Y, Komori S. On the improvement of the SIMPLE-like method for flows with complex geometry [J]. Springer, 2000,36(1):71-78.
- [9] Rhie C M, Chow W L. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation[J]. AIAA J, 1983,21:1525-1552.
- [10] Peric M. Analysis of pressure velocity coupling on nonorthogonal grids[J]. Numer Heat Transfer, Part B, 1990,17:63-82.
- [11] Demirdzic I, Lilek Z, Peric M. Fluid flow and heat transfer test problems for non-orthogonal grids: bench-mark solutions [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1992,15:329-354.