

# 基于弹性需求的城市间客车开行 频率与票价优化

史峰, 罗端高, 王英姿, 谈贵军

(中南大学 交通运输工程学院, 长沙 410075)

**摘要:** 基于两城市间旅客出行弹性需求, 研究了客运企业客车开行频率与票价的组合决策优化问题。在综合考虑旅客出行时间调整费用、车内拥挤费用、票价支出以及客运企业运营的固定成本、可变成本、线路的建设维护分摊费用、车票收入的基础上, 以旅客和客运企业的系统净收益为目标函数建立了优化模型和求解方法, 并就一组特殊旅客出行时间调整费用函数进行了深入讨论和数值计算分析。研究结果为客运企业客车开行频率和票价的组合决策提供了理论依据。

**关键词:** 交通运输系统工程; 弹性需求; 客车开行频率; 票价; 系统净收益

**中图分类号:** U292.4    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1671-5497(2009)06-1475-05

## Optimization of operating frequency and ticket price of intercity bus with elastic demand

SHI Feng, LUO Duan-gao, WANG Ying-zi, TAN Gui-jun

(School of Traffic and Transportation Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** To deal with the elastic intercity travel demand of the passenger, the optimization of the compined decision-making involving the bus operating frequency and the ticket price of the passenger transport enterprise was studied. Comprehensively considering the passenger travel time adjustment cost, in-bus congestion cost, travel ticket cost, as well as the fied cost, variable cost, and the allocated cost of the road construction and maintenance, an optimization model to maximize the total income of the passengers and the enterprise was established and its solving method was proposed. As an example, the travel time adjustment cost function of a special group of passengers was discussed in detail and numerically analyzed. The suggested optimization provides a theoretical foundation for the combined decision-making on the bus operating frequency and the ticket price.

**Key words:** engineering of communications and transportation system; elastic demand; bus operating frequency; price; system's net-benefit

合理的客车开行方案和票价体系是客运企业运营管理和市场营销的重要内容, 对解决客运营

求与运能之间的矛盾、满足旅客的出行需求, 起到了极为重要的作用。客车开行频率越高、票价越

**收稿日期:** 2008-03-06.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(70771116); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20060533036).

**作者简介:** 史峰(1956-), 男, 教授. 研究方向: 交通运输规划与管理. E-mail: shifeng@csu.edu.cn

**通信作者:** 王英姿(1966-), 女, 博士研究生. 研究方向: 交通运输规划与管理. E-mail: wangyingzicn@163.com

低,旅客在站等待时间越少,车内拥挤程度越小,客流也相应变得越大,但开行频率过高时会造成运能浪费,运营成本过高。反之,客车开行频率越低、票价越高,旅客在站等待时间越长,车内拥挤程度越大,部分旅客会取消出行或转向其他交通方式,造成客源流失,客流也相应变小,虽然企业经营总成本会变小,但总收益也会随之减少。

近年来许多学者对客车开行方案和票价体系进行了研究。文献[1]基于旅客的均衡乘车行为,研究了公交最优发车间隔问题。文献[2]进行了公共与个体竞争交通系统的定价研究。文献[3]研究了随机需求下的客运线路和客车时刻表制定问题。文献[4]研究了出行需求确定的情况下,系统总成本最小的两点间城际列车最优发车间隔问题。文献[5]研究了客运方案时刻表优化问题。文献[6]建立了公交线路发车频率优化模型。文献[7]研究了最佳协调下的公共汽车时刻表设置问题。但他们没有综合考虑客车开行频率、票价与出行需求之间的关系。

作者基于弹性需求研究两城市间高峰时段客车开行频率与票价优化问题,以出行旅客和运营企业的收益为优化目标,构建了两城市间客车开行频率及票价的优化模型,平衡了客车开行频率与票价之间的关系,使客运企业既获得了较好的经济效益,又较好地满足了旅客的出行需求,尽可能地提高社会效益和经济效益。

### 1 客车开行频率与票价优化问题

两个城市之间存在具有与出行费用相关的弹性客运需求,由于城市间客运线路两个方向的运输能力不能够相互调剂,所以客车开行方案只需要按方向分别讨论即可。又因为研究的重点放在客运高峰时段,所以可以认为旅客的期望出行(到达发车站)时间是等间隔的,同时假设线路上所有客车定员相等。相应地,客车开行方案也就自然应该等间隔发车,客车开行方案问题便简化为确定客车开行频率的问题。倘若进一步假设旅客完全掌握客车时间表,必然相应地调整出行时间,以便提前出行赶上前一班车,或推迟出行时间乘坐同一班车,但减少在站等待时间。为区别起见,称旅客的期望出行时间为原始出行时间,调整后的出行时间为实际出行时间。旅客调整出行时间后,可能导致他们产生一些额外的费用,本文将它们统称为出行时间调整费用。基于弹性需求的城

市间客车开行频率与票价优化问题就是:在综合考虑旅客出行时间调整费用、车内拥挤费用、票价支出以及客运企业运营的固定成本、可变成本、线路的建设维护分摊费用、车票收入,谋求系统净收益最大的基础上,求解最优客车开行频率与票价。

为方便叙述起见,记城市间高峰客车服务时段为 $[T_s, T_c]$ , $L = T_c - T_s$ 为客运方案的服务时段长度,在此服务时段内该线路上旅客出行的弹性需求函数为<sup>[8]</sup>

$$N = D(c) = N_0 \exp(-kc)$$

其逆函数为

$$c = D^{-1}(N) = (\ln N_0 - \ln N) / k$$

式中: $c$ 为旅客出行的边际费用; $N_0$ 为该服务时段内城市间旅客的潜在出行需求; $k$ 为出行需求 $N$ 与出行费用 $c$ 的弹性系数。

求解客车开行频率与确定服务时段 $[T_s, T_c]$ 开行的客车数 $n$ 是等价的,客车数 $n$ 和首班车发车时间 $T_1$ 又可以等价地确定客车时刻表 $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ ,其中 $T_i$ 为第 $i$ 班车的发车时间,在不混淆的情况下也同时记 $T_i$ 为第 $i$ 班车。旅客的原始出行时间 $t$ 以密度 $f(t) = N/L$ 均匀分布在服务时段 $[T_s, T_c]$ 内。在原始出行时间 $t \in [T_i, T_{i+1}]$ 出发的旅客,记提前出行时间调整费用为连续函数 $C_E(t - T_i)$ ,推迟出行时间调整费用为连续函数 $C_L(T_{i+1} - t)$ 。

### 2 系统净收益最大化模型

#### 2.1 旅客效用分析

旅客出行的边际费用由出行时间调整费用、车内拥挤费用和车票支出构成。

对于出行时间调整费用,注意到原始出行时间为 $t \in (T_i, T_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n-1$ 的旅客按如下规则选择客车:①若 $C_E(t - T_i) < C_L(T_{i+1} - t)$ ,则旅客选择客车 $T_i$ ;②若 $C_E(t - T_i) > C_L(T_{i+1} - t)$ ,则旅客选择客车 $T_{i+1}$ ;③若 $C_E(t - T_i) = C_L(T_{i+1} - t)$ ,则旅客可随意选择客车 $T_i$ 或 $T_{i+1}$ 。而由于函数 $C_E(x)$ 与 $C_L(x)$ 的连续性,存在 $t_i \in (T_i, T_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n-1$ ,使得:若 $t \in [T_i, t_i)$ ,则 $C_E(t - T_i) < C_L(T_{i+1} - t)$ ;若 $t \in (t_i, T_{i+1}]$ ,则 $C_E(t - T_i) > C_L(T_{i+1} - t)$ ;若 $t = t_i$ ,则 $C_E(t - T_i) = C_L(T_{i+1} - t)$ 。

设存在 $\Delta t$ 使得 $t_1 = T_1 + \Delta t$ ,即 $C_E(t_1 - T_1) = C_L(T_2 - t_1)$ ,也就是

$$C_E(\Delta t) = C_L \left( \frac{L}{n} - \Delta t \right) \quad (1)$$

则对任何  $i=1,2,\dots,n-1, t_i = T_i + \Delta t$  都使得  $C_E(t_i - T_i) = C_L(T_{i+1} - t_i)$ , 这是因为  $C_E(t_i - T_i) = C_E(\Delta t)$  且  $C_L(T_{i+1} - t_i) = C_L(\frac{L}{n} - \Delta t)$ 。

另外,若  $t < T_1$ , 则旅客选择乘坐第一班客车  $T_1$ ; 若  $t > T_n$ , 则旅客选择乘坐最后一班客车  $T_n$ 。

记  $t_0 = T_1 - L/n + \Delta t, t_n = T_n + \Delta t$ 。考虑到所有客车定员相等,使得每一班客车所吸引旅客的时段长度也相等,所以,

$$t_0 = T_s, t_i = T_s + iL/n, i=1,2,\dots,n \quad (2)$$

从上式可以看出:  $t_n = T_s + nL/n = T_s + L = T_e$ 。根据式(2),反过来可以通过以下关系式利用  $t_i$  来求解  $T_i$ ,即

$$T_i = t_i - \Delta t, i=1,2,\dots,n \quad (3)$$

式中:  $\Delta t$  可由式(1)求得。

所以,若给定时刻表  $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ , 则旅客选择客车  $T_i$  的出行时间调整费用

$$H_i = \int_{t_{i-1}}^{T_i} C_L(T_i - t) f(t) dt + \int_{T_i}^{t_i} C_E(t - T_i) f(t) dt$$

作变换  $r = T_i - t$ , 得

$$\int_{t_{i-1}}^{T_i} C_L(T_i - t) f(t) dt = \int_{T_i - t_{i-1}}^0 C_L(r) \frac{N}{L} dr = \int_0^{\frac{L}{n} - \Delta t} C_L(r) \frac{N}{L} dr$$

作变换  $r = t - T_i$ , 得

$$\int_{T_i}^{t_i} C_E(t - T_i) f(t) dt = \int_0^{\Delta t} C_E(r) \frac{N}{L} dr$$

所以

$$H_i = \int_0^{\frac{L}{n} - \Delta t} C_L(r) \frac{N}{L} dr + \int_0^{\Delta t} C_E(r) \frac{N}{L} dr \quad (4)$$

由于  $H_i$  与  $i$  无关,记  $H = H_i$ 。所以旅客总的出行时间调整费用为  $nH$ , 旅客的平均出行时间调整费用为  $nH/N$ 。

对于车内拥挤费用,注意到客车  $T_i$  上的每一个旅客的拥挤费用

$$I_i = \mu \left[ \frac{1}{V} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dt \right]^r = \mu \left[ \frac{1}{V} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{N}{L} dt \right]^r = \mu \left[ \frac{N}{nV} \right]^r \quad (5)$$

式中:  $\mu$  为一个旅客的拥挤费用系数;  $V$  为客车定员。由于  $I_i$  与  $i$  无关,记  $I = I_i$ 。所以,每个旅客的拥挤费用都等于  $I$ 。旅客的拥挤总费用为  $NI$ 。

对于车票支出,记每张车票的票价为  $p$ , 所以全体旅客所支付的总票价为  $Np$ 。

每个旅客出行的边际费用为

$$c = (nH + NI + Np) / N \quad (6)$$

所以,旅客出行的消费者盈余为

$$\int_0^N D^{-1}(w) dw - nH - NI - Np \quad (7)$$

### 2.2 客运企业效益分析

客运企业运营收益由车票收入和固定成本、可变成本、线路建设维护分摊费用构成。记每开行一班次客车的固定成本为  $F$ , 则开行全部客车的固定成本为  $nF$ ; 记为每位乘客支付的可变成本为  $f$ , 则为全部旅客支付的可变成本为  $Nf$ ; 记该服务时段的线路建设维护分摊费用为  $G$ , 则客运企业的运营效益为

$$Np - Nf - nF - G \quad (8)$$

### 2.3 客车开行频率与票价综合优化模型

综上所述,由式(7)、式(8)可得城市间客运企业与出行旅客的系统净收益优化模型(M)为

$$\begin{aligned} \max_{n,p} NB = & \alpha \left[ \int_0^N D^{-1}(w) dw - nH - NI - Np \right] + \\ & (1 - \alpha)(Np - Nf - nF - G) = \\ & \alpha \left\{ \int_0^N D^{-1}(w) dw - n \left[ \int_0^{\frac{L}{n} - \Delta t} C_L(r) \frac{N}{L} dr + \int_0^{\Delta t} C_E(r) \frac{N}{L} dr \right] - N\mu \left[ \frac{N}{nV} \right]^r - Np \right\} + \\ & (1 - \alpha)(NP - Nf - nF - G) \end{aligned}$$

式中:  $\alpha$  为平衡旅客出行收益和客运企业的运营效益的权重因子<sup>[9-10]</sup>。

## 3 一组特殊出行时间调整函数的优化模型求解方法

在具体的优化模型(M)中,提前出行时间调整费用函数  $C_E(x)$  和推迟出行时间调整费用函数  $C_L(x)$  都是给定的,通常采用以下形式<sup>[4,11]</sup>

$$C_E(x) = \beta x^\omega, C_L(x) = \gamma x^\omega \quad (9)$$

式中:  $\omega, \beta, \gamma$  均为大于 0 的常数,一般应该有  $\gamma > \beta$ , 即推迟出行时间调整费用会大于提前出行时间调整费用。

将式(9)代入式(1),可求得

$$\Delta t = \left[ \frac{L}{n} \right] / \left[ 1 + \left[ \frac{\beta}{\gamma} \right]^{1/\omega} \right] \quad (10)$$

由式(10)和式(2)、式(3)可求得带参数  $n$  的  $t_1$ ,

$t_2, \dots, t_{n-1}$  和  $T_1, T_2, \dots, T_n$ 。

将式(10)代入模型(M),可得

$$\begin{aligned} \max_{n,p} NB = & \alpha \left\{ \int_0^N D^{-1}(\omega) d\omega - n \left[ \int_0^{\frac{L}{n} - \Delta t} \gamma x^\omega \frac{N}{L} dx + \int_0^{\Delta t} \beta x^\omega \frac{N}{L} dx \right] - N\mu \left[ \frac{N}{nV} \right]^r - Np \right\} + \\ & (1 - \alpha)(Np - Nf - nF - G) = \\ & \alpha \left\{ \int_0^N D^{-1}(\omega) d\omega - \frac{1}{1 + \omega(\beta^{1/\omega} + \gamma^{1/\omega})^\omega} \left( \frac{L}{n} \right)^\omega - \right. \\ & \left. N\mu \left[ \frac{N}{V} \right]^r n^{-r} - Np \right\} + \\ & (1 - \alpha)(Np - Nf - nF - G) \end{aligned}$$

令  $\frac{\partial NB}{\partial n} = 0$  和  $\frac{\partial NB}{\partial p} = 0$  得

$$\begin{aligned} \frac{\partial NB}{\partial n} = & \alpha \left\{ D^{-1}(N) \frac{\partial N}{\partial n} + \frac{\omega}{1 + \omega(\beta^{1/\omega} + \gamma^{1/\omega})^\omega} \right. \\ & L^\omega n^{-(\omega+1)} N - \frac{\delta}{1 + \omega(\beta^{1/\omega} + \gamma^{1/\omega})^\omega} L^\omega n^{-\omega} \frac{\partial N}{\partial n} + \\ & r\mu \left( \frac{N}{V} \right)^r n^{-(r+1)} N - (r+1)\mu \left( \frac{N}{nV} \right)^r \frac{\partial N}{\partial n} - \\ & \left. p \frac{\partial N}{\partial n} \right\} + (1 - \alpha) \left\{ p \frac{\partial N}{\partial n} - f \frac{\partial N}{\partial n} F \right\} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial NB}{\partial p} = & \alpha \left\{ D^{-1}(N) \frac{\partial N}{\partial p} - \frac{1}{1 + \omega(\beta^{1/\omega} + \gamma^{1/\omega})^\omega} \right. \\ & \left( \frac{L}{n} \right)^\omega \frac{\partial N}{\partial p} - (r+1)\mu \left( \frac{N}{nV} \right)^r \frac{\partial N}{\partial p} - p \frac{\partial N}{\partial p} - N \right\} + \\ & (1 - \alpha) \left\{ N + p \frac{\partial N}{\partial p} - f \frac{\partial N}{\partial p} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

结合式(4)、(5)、(6)、(9)、(10)得

$$\begin{aligned} N = N_0 \exp(-kc) = N_0 \exp \left\{ -k \left[ \frac{1}{1 + \omega} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\beta\gamma}{(\beta^{1/\omega} + \gamma^{1/\omega})^\omega} \left( \frac{L}{n} \right)^\omega + \mu \left( \frac{N}{nV} \right)^r + p \right] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

解方程组式(11)~式(13)得到最优解  $n, p, N$ ,进而由式(2)式(3)式(10)可求出最优发车间隔  $L/n$ ,首班客车的发车时间  $T_1$ 。

### 4 算例分析

两个城市之间旅客出行的高峰时段[7:00, 15:00],服务时长  $L=8$  h。在该时间段内的潜在出行人数  $N=600$  人,弹性系数  $k=0.018$ ,客车辆额定载客能力为  $V=40$  人,出行时间调整费用函数由式(9)给定,取  $\alpha=0.49, \beta=18, \gamma=54, \mu=2, \omega=2, r=2$ 。每开行一班次客车的固定成本  $F=400$  元,为每位乘客支付可变成本  $f=2$  元,分摊

该时段线路建设维护费用  $G=2000$  元。

由上述参数及方程组式(11)~式(13)求得最优解  $n=10, p=13.5, N=434$ ,相应的发车间隔  $L/n=48$  min,首班客车的发车时间  $T_1$  为 7:12,旅客出行的边际费用  $c=18$ ,系统净收益  $NB=11273$  元。

图 1 给出了不同客车开行频率和票价水平的系统净收益的等值线图,可以看出,同一系统净收益值对应着多种客车开行频率和票价组合策略。

对不同的旅客利益与客运企业效益权重的平衡因子  $\alpha$  和出行需求与出行费用的弹性系数进行计算分析表明:随着  $\alpha$  取值的增加,客车开行频率提高,票价降低。随着弹性系数  $k$  的增加,旅客出行量减少,客车开行频率降低,票价降低。

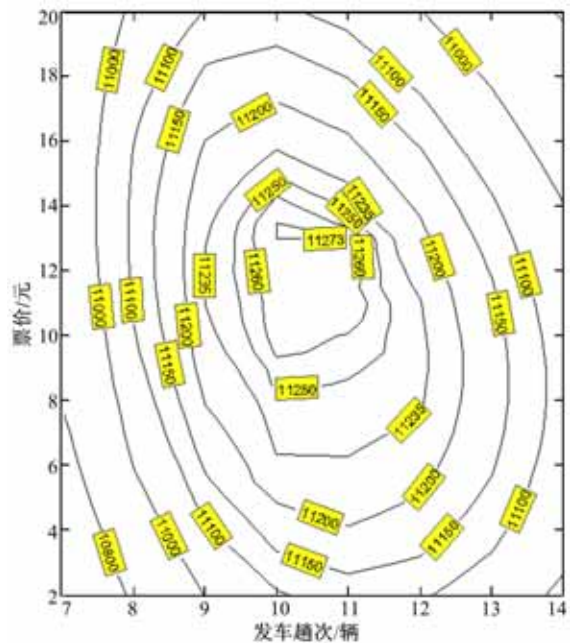


图 1 系统净收益随开行频率和票价的变化情况

Fig. 1 System net-benefit with operating frequency and price

### 5 结束语

基于高峰时段旅客原始出行时间服从均匀分布、旅客根据班车时间表调整实际出行时间的假设,所构建的客运企业和旅客的系统净收益最小化模型可对客车开行频率和票价综合优化。模型中的弹性需求函数、提前出行时间调整费用函数、推迟出行时间调整费用函数、拥挤费用函数、旅客与企业效益的平衡因子等对优化结果都具有重要的影响。另外,由于模型没有就定员做严格约束,应根据计算结果和允许超员的额度调整拥挤费用

函数和平衡因子,以期达到合理的载客率。

#### 参考文献:

- [1] 黄海军,田琼,杨海,等. 高峰期内公交车均衡乘车行为与制度安排[J]. 管理科学学报,2005,8(6):1-9.  
Huang Hai-jun, Tian Qiong, Yang Hai, et al. Equilibrium bus riding behavior in rush hours and system configuration for providing bus services[J]. Journal of Management Sciences in China,2005,8(6):1-9.
- [2] 黄海军,Michael G H B,杨海. 公共与个体竞争交通系统的定价研究[J]. 管理科学学报,1998,1(2):17-23.  
Huang Hai-jun, Michael G H B, Yang Hai. Pricing and modal split in a competitive system of mass transit and highway[J]. Journal of Management Sciences in China,1998,1(2):17-23.
- [3] Yan S Y, Chi C J, Tang C H. Inter-city bus routing and timetable setting under stochastic demands[J]. Transportation Research Part A, 2006, 40(7): 572-586.
- [4] 秦进,史峰. 公交化城际列车时刻表优化[J]. 交通运输工程学报,2005,5(2):89-93.  
Qin Jin, Shi Feng. Timetable optimization for inter-city train of transit type[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering,2005,5(2):89-93.
- [5] Andre P, Robin L. Optimal timetable for public transportation[J]. Transportation Research Part B, 2001,35(8):789-813.
- [6] 陈茜,牛学勤,陈学武,等. 公交线路发车频率优化模型[J]. 公路交通科技,2004,22(2):103-108.  
Chen Qian, Niu Xue-qing, Chen Xue-wu, et al. Bus service frequency optimal model[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2004,22(2):103-108.
- [7] Small K A. The scheduling of consumer activities: work trips[J]. American Economic Review,1982,72(3):467-479.
- [8] 李志纯,黄海军. 弹性需求下的组合出行模型与求解算法[J]. 中国公路学报,2005,18(3):94-98.  
Li Zhi-chun, Huang Hai-jun. Model and solution algorithm with combined travel under elastic demand [J]. China Journal of Highway and Transport,2005,18(3):94-98.
- [9] 边扬,王炜,陆建,等. 城市出租车出行方式分担率预测方法研究[J]. 交通运输系统工程与信息,2006,6(2):95-100.  
Bian Yang, Wang Wei, Lu Jian, et al. A forecasting method for urban taxi traffic mode split rate[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology,2006,6(2):95-100.
- [10] Site P D, Filippi F. Service optimization for bus corridors with short-turn strategies and variable vehicle size[J]. Transportation Research Part A, 1998, 32(1):19-38.
- [11] Ceder A, Golany B, Tal O. Creating bus timetables with maxi-mal synchronization [J]. Transportation Research Part A,2001,35(10):913-928.