第 28 卷第 1 期 温州大学学报·自然科学版 2007 年 2 月
Vol 28, No 1 Journal of Wenzhou University · Natural Sciences Feb, 2007

二元多项式环中理想生成元个数的估计

陆征一，罗 勇

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州 325035）

摘 要：对于两个变量的多项式环中的理想，我们给出了其有限生成基个数的一个最小上界的估计．并由例子说明此估计是最佳的．

关键词：多项式理想；Hilbert 基定理；有限生成基

中图分类号：O174.14 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-0375(2007)01-0001-04

考虑域 K 上的二元多项式环 $K[x,y]$．我们有如下熟知的 Hilbert 基定理：

定理（Hilbert[1]） $K[x,y]$上的每个理想 I 都有有限生成基，即存在 $f_1(x,y),\cdots,f_s(x,y)\in I$，使得 $I=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle$．

Hilbert 基定理中生成基 $f_1,\cdots,f_s$ 的存在性是非算法化确定的，即对于 s 个 f_i 定理只能保证其存在，而 s 是未知的．

一个自然的问题是：能否通过理想 I 中的部分信息，如首项，次数，项数等来给出 S 的一个上界估计？同时构造性地给出这 S 个生成基？

要回答这个问题，我们首先考虑关于二元单项式理想的 Dickson 引理．

引理（Dickson[1]） 记 $I=\left\langle x^{\alpha}y^{\beta}\mid(\alpha,\beta)\in A\subset Z^2_{\geq 0}\right\rangle$ 为单项式理想，则 I 有有限生成基：

$$I=\left\langle x^{\alpha_1}y^{\beta_1},\cdots,x^{\alpha_s}y^{\beta_s}\right\rangle,(\alpha,\beta)\in A.$$

对二元单项式理想 $I=\left\langle x^{\alpha}y^{\beta}\right\rangle$ 的有限生成基，我们记基中元素个数最小为

$$N(I)=\min\left\{s\mid I=\left\langle x^{\alpha_1}y^{\beta_1},\cdots,x^{\alpha_s}y^{\beta_s}\right\rangle\right\}.$$

对任意一个给定的单项式理想 $I=<x^{\alpha}y^{\beta}>$ 记

$$\alpha_s=\min\{\alpha\mid x^{\alpha}y^{\beta}\in I\},\beta_s=\min\{\beta\mid x^{\alpha}y^{\beta}\in I\},$$
$$\alpha_{ss}=\min\{\alpha\mid x^{\alpha}y^{\beta_s}\in I\},\beta_{ss}=\min\{\beta\mid x^{\alpha_s}y^{\beta}\in I\}.$$

收稿日期：2006-06-24

基金项目：国家基础研究规划项目(2004CB318000)，浙江省自然科学基金(M103043)

作者简介：陆征一(1962-)，男，四川成都人，教授，博士，研究方向：微分方程、符号计算

显然，$\alpha_{ss} \geq \alpha_s$ ，$\beta_{ss} \geq \beta_s$． 对于 $I = \left\langle x^{\alpha} y^{\beta} \right\rangle$ 生成基最小个数 $N(I)$ 有如下的结果．

定理 1　存在 $I = \left\langle x^{\alpha} y^{\beta} \right\rangle$ 的一组生成基，其单项式个数为 $N(I)$ 且

$$N(I) \leq \min\{\alpha_{ss} - \alpha_s, \beta_{ss} - \beta_s\} + 1 \tag{1}$$

证明：可直接模仿 Dikson 引理的证明[1,2]给出．

虽然如上结果给出了一个二元单项式生成基个数的最小上界估计，但 $\alpha_s, \beta_s, \alpha_{ss}, \beta_{ss}$ 一般情况下仍是未知的．下面我们给出一个可操作的估计结果，并用具体例子说明其最佳性．

考虑二元单项式理想 $I = \left\langle x^{\alpha} y^{\beta} \right\rangle$．

定理 2　如果存在 $x^{\alpha_1} y^{\beta_1}, x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \in I$, 使得 $\alpha_1 > \alpha_2$，且 $\beta_1 < \beta_2$，则

$$N(I) \leq \min\{\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2\} + \alpha_2 + \beta_1 + 1 \tag{2}$$

证明：用与证明定理 1 完全一样的思考可证．
我们用下面例子说明此估计的最佳性．

例 1　$I = \left\langle \left\{ x^{\alpha} y^{\beta} \middle| \alpha + \beta = 4 \right\} \right\rangle$，则 $I = \left\langle x^4, x^3 y, x^2 y^2, x y^3, y^4 \right\rangle$．

所以，$N(I) = 5$．显然对于任取的 $x^{\alpha_1} y^{\beta_1}, x^{\alpha_2} y^{\beta_2} (\alpha_i + \beta_i = 4)$, (2) 式的右端=5．

例 2　$I = \left\langle x^{\alpha} y^{\beta} \right\rangle (2 \leq \alpha + \beta \leq 4)$

当 $x^{\alpha_1} y^{\beta_1} = x^4, x^{\alpha_2} y^{\beta_2} = y^4$ 时，(2)的右端=5．当 $x^{\alpha_1} y^{\beta_1} = x^2, x^{\alpha_2} y^{\beta_2} = xy$ 时，(2)的右端=3．而显然，$I = \left\langle x^2, xy, y^2 \right\rangle$．故 $N(I) = 3$．

有了关于单项式理想有限生成基个数最小上界的估计，现在考虑 Hilbert 基定理中有限生成基个数 s 的估计．再次考虑 $K[x, y]$ 上的多项式理想 $I = \left\langle f_{\alpha}(x, y) \right\rangle$，则在一给定单项式序下 I 中的所有多项式 f_{α} 的首项 $LT(f_{\alpha})$ 所构成的单项式理想为 $\left\langle LT(I) \right\rangle$．由 Dickson 引理及 Hilbert 基定理的证明，可知：

(i) $\left\langle LT(I) \right\rangle = \left\langle LT(f_1), \ldots, LT(f_s) \right\rangle$,
(ii) $I = \left\langle f_1, \ldots, f_s \right\rangle$.

显然,要给出（ii）中的有限生成基 $f_1, \ldots, f_s$ 的个数估计，只需估计（i）中 s 即可．而由定理 2 容易得到如下结果．

定理 3　如果在给定的单项式序下，理想 $I = \left\langle f_{\alpha}(x, y) \right\rangle$ 中存在两个多项式 $f_1(x, y)$，$f_2(x, y)$，

其首项为 $LT(f_1)=x^{\alpha_1}y^{\beta_1},LT(f_2)=x^{\alpha_2}y^{\beta_2}$，且 $\alpha_1>\alpha_2,\beta_2>\beta_1$，则存在一组有限生成基 f_l, …, f_s 满足 $s\le\min\{\alpha_1-\alpha_2,\beta_2-\beta_1\}+\alpha_2+\beta_1+1$.

由[1]中 *Hilbert* 基定理的证明以及定理 3，我们知道对于理想 $I\subset K[x,y]$ 的 *Groebner* 基，有

定理 4　假设理想 $I\subset K[x,y]$ 中存在 f_1,f_2 使得

$$LT(f_1)=x^{\alpha_1}y^{\beta_1},LT(f_2)=x^{\alpha_2}y^{\beta_2}\quad \alpha_1>\alpha_2,\beta_1<\beta_2\,,$$

则存在 I 的一个 *Groebner* 基 $\{g_1,\cdots,g_2\}$，其个数满足 $t\le\min\{\alpha_1-\alpha_2,\beta_2-\beta_1\}+\alpha_2+\beta_1+1$.

例 3　[1, 2]考虑字典序下的基

$$F=\{f_1,f_2\}=\{x^3-2xy,x^2y-x-2y^2\}\,.$$

如果以 F 出发去构造 *Groebner* 基，则由定理 4 可知，由 *Buchberger* 算法可构造一 *Groebner* 基 $G=\{f_1,f_2,...,f_t\}$ 且

$$t\le\min\{3-2,1-0\}+2+0+1=4 \tag{3}$$

而由[2]中例 2.2.9 可知，按 *Buchberger* 算法依字典序由 F 生成的 *Groebner* 基为

$$F_3=\{x^3-2xy,x^2y-x-2y^2,x^2,-2xy,-x-2y^2,y^3\}\,.$$

显然由(3)可知 F_3 中的有些元素对于 F_3 作为 *Groebner* 基来说是多余的．实际上，从 F_3 中取出最后两个多项式 $-x-2y^2,y^3$，并利用定理 4 可得

$$t\le\min\{1-0,3-0\}+0+0+1=2\,.$$

这正好是 F_3 的极小 *Groebner* 基：$G_{\min}=\left\langle x+2y^2,y^3\right\rangle$ 中元素的个数 2.

例 4　考虑如下 Kolmogorov 系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x(-2-a_0+a_1+a_0x-2a_1x+y+a_1x^2+xy),\\ \dot{y}&=y(2+a_2-x-2a_2y^2).\end{aligned}$$

其中 $a_1>0$，$a_2>0$．显然，(1,1）是该系统的一个平衡点．作变换 $x\mapsto x+1,y\mapsto y+1$．则原系统变为：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(x+1)(x+a_0x+2y+a_1x^2+xy),\\ \dot{y}&=(y+1)(-x-y+a_2y^2).\end{aligned}$$

当 $a_0=0$ 时，(0, 0) 为中心型平衡点，系统的前三个焦点量 L_1，L_2，L_3 分别为

$$
\begin{aligned}
L_1 &= -1+2a_1^2-2a_1+3a_2,\\
L_2 &= 44+546a_1a_2+74a_2^4+176a_1^2a_2^2-182a_1-238a_2+427a_1^2\\
&\quad +451a_2^2-472a_1^3-876a_1^2a_2-392a_2^2a_1-328a_2^3-92a_1^3a_2\\
&\quad -648a_1^4+46a_1a_2^3,\\
L_3 &= -28184-1112353a_1a_2-889784a_2^4+433735a_2^5-5028128a_1^2a_2^2\\
&\quad +499258a_1a_2^4-338976a_1^3a_2^3-588318a_1^2a_2^4+221080a_1\\
&\quad +196690a_2-845118a_1^2-579519a_2^2+4135384a_2^6+2040520a_1^5\\
&\quad +1918142a_1^3+3433278a_1^2a_2+2063089a_2^2a_1+944669a_2^3\\
&\quad +763936a_1^5a_2-21496a_1a_2^5-5270694a_1^3a_2-3163812a_1^4\\
&\quad -1652639a_1a_2^3+3368784a_1^3a_2^2+3081880a_1^2a_2^3+4906820a_1^4a_2\\
&\quad -574420a_1^4a_2^2-79159a_2^6.
\end{aligned}
$$

由定理 4 容易知道，由 $<L_1,L_2,L_3>$ 生成的 $K[a_1,a_2]$ 中的理想的最小 Hilbert 基最多有 3 个元素．利用 Groebner 基算法，我们可以知道 $L_3\notin<L_1,L_2>$，从而 $<L_1,L_2,L_3>\neq<L_1,L_2>$．$L_1,L_2,L_3$ 是理想的生成基，事实上，可以知道 $<L_1,L_2,L_3>=<1>$．

参考文献

[1] Cox D, Little J, O'shea D. Ideals, Variteties, and Algorithms [M]. New York: Spinger-Verlag, 1996. 69-77.

[2] 陆征一, 何碧, 罗勇. 多项式系统的实根分离算法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004. 14-16.

An Estimation of the Number of Generators of an Ideal in a Polynomial Ring with Two Variables

LU Zhengyi, LUO Yong

(College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: In this note, An estimation of the minimal number of the elements in a system of generators for a polynomial ideal in a polynomial ring with two variables is given. An example is constructed to show that it is the optimum estimation in some sense.

Key words: Polynomial ideal; Hilbert basis theorem; Finite generator

（编辑：王一芳）