

# 基于 LMI 的范数有界不确定采样系统的输出反馈鲁棒镇定

姚 郁, 刘富春, 贺风华

(哈尔滨工业大学 控制与仿真中心, 哈尔滨 150080)

**摘要:** 将采样控制系统转化为等价的跳变系统, 设计目标为对所有容许的参数不确定性设计一个输出反馈采样控制器, 使得闭环系统渐近稳定。以线性矩阵不等式的形式给出了鲁棒镇定问题可解的充分条件, 并由可行解构造输出反馈采样控制器的参数矩阵。对短周期飞行器动态模型的仿真结果验证了所提方法的有效性和正确性。

**关键词:** 自动控制技术; 采样系统; 鲁棒镇定; 输出反馈; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP273    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1671-5497(2009)06-1568-05

## LMI-based output feedback robust stabilization for sampled-data systems with norm-bounded uncertainties

YAO Yu, LIU Fu-chun, HE Feng-hua

(Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China)

**Abstract:** An equivalent jump system model of sampled-data control system is derived. Attention is focused on the design of an output feedback sampled-data controller which guarantees the asymptotical stability of the closed-loop system for all admissible parametric uncertainties. Sufficient conditions for the solvability of the stabilization problem are presented in terms of linear matrix inequalities and the parameter matrices of the desired output feedback sampled-data controller can be constructed through feasible solution. Simulation of an aircraft short-period dynamic model is given to demonstrate the effectiveness and correctness of the proposed method.

**Key words:** automatic control technology; sampled-data system; robust stabilization; output feedback; linear matrix inequality (LMI)

传统的数字控制器设计方法主要有: ①模拟设计方法, 即针对连续被控对象设计连续控制器, 然后再采取某种离散化方法得到数字控制器, 该方法只有当采样周期趋近于零时系统性能才能得到完全恢复; ②离散化方法, 即将系统离散化设计成离散控制器, 该方法没有考虑采样周期之间系统的行为特性, 是一种近似的方法, 当要考虑系统

的连续摄动和连续扰动抑制时该方法有一定的局限性。针对传统的数字控制设计方法的不足, 以提升技术(Lifting Technique)<sup>[1-3]</sup>为代表的现代直接设计方法得到众多学者的关注。最近, 文献[4]指出提升技术在提升前后虽然  $H_\infty$  范数相同, 但频率响应不同, 所以不适合于加权  $H_\infty$  设计。与提升法同时发展起来的跳变系统方法是一种更

收稿日期: 2008-02-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674043).

作者简介: 姚郁(1963-), 男, 教授, 博士生导师. 研究方向: 非线性系统, 计算机控制. E-mail: yaoyu@hit.edu.cn

为直接的设计方法<sup>[5]</sup>。值得指出的是,上面所提文献在采用跳变系统方法研究采样系统的滤波与控制时,都是基于微分 Riccati 方程(或微分 Riccati 不等式)设计控制器,但微分 Riccati 方程的求解很困难,不便于实际使用。

## 1 问题描述

考虑如下状态空间模型描述的参数不确定采样控制系统

$$\begin{cases} (\Sigma_1) \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + Bu(t), \\ x(0) = 0, t \in [0, T] \\ y(ih) = Cx(ih), ih \in (0, T) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$  是系统的状态向量; $u(t) \in \mathbf{R}^m$  是控制输入向量; $y(ih) \in \mathbf{R}^r$  是系统输出的采样值, $i$  为正整数, $h > 0$  是系统的采样周期; $A, B$  和  $C$  为描述名义采样系统的适维实矩阵; $\Delta A(t)$  为描述参数不确定的实值矩阵函数,具有如下形式

$$\Delta A(t) = M F(t) N \quad (2)$$

式中: $M \in \mathbf{R}^{n \times i}$  和  $N \in \mathbf{R}^{i \times n}$  为已知实矩阵; $F(t) \in \mathbf{R}^{i \times j}$  是元素为 Lebesgue 可测的未知矩阵函数,且满足

$$F^T(t) F(t) \leq I, \forall t \quad (3)$$

本文要设计的输出反馈采样控制器的输入为每个采样周期得到的采样输出值, $y(ih)$ , $i=0,1,2,\dots$ ,控制器的输出经过零阶保持器得到连续控制信号,因此,考虑如下的动态输出反馈控制器结构

$$\begin{bmatrix} \zeta(i^+) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K(i) & B_K(i) \\ C_K(i) & D_K(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(i) \\ y(i) \end{bmatrix},$$

$$ih < t \leq (i+1)h \quad (4)$$

式中: $\zeta \in \mathbf{R}^n$  为控制器的状态向量; $A_K(i)$ , $B_K(i)$ , $C_K(i)$  和  $D_K(i)$  为要设计的输出反馈控制器参数矩阵。

下面将采样控制系统转换为等价的具有有限离散跳变的跳变系统。因为原采样控制系统的状态是连续的,即  $x(i^+) = x(i)$ ,系统  $\Sigma_1$  可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + Bu(t), x(0) = 0, \\ ih < t < (i+1)h \\ x(ih^+) = x(ih) \\ y(ih) = Cx(ih), ih \in (0, T) \end{cases} \quad (5)$$

定义一个新的状态变量  $\xi(\cdot) = [x^T(\cdot) u^T(\cdot) \zeta^T(\cdot)]^T$ 。由式(4)和式(5)可以得到如下的闭环系统模型

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = (A_c + \Delta A_c(t))\zeta(t), \zeta(0) = 0, \\ ih < t < (i+1)h \\ \zeta(ih^+) = A_d \zeta(ih) \end{cases} \quad (6)$$

式中:

$$A_c = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \Delta A_c = M_c F(t) N_c; M_c = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$N_c = [N \ 0 \ 0]; A_d = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ D_K(i)C & 0 & C_K(i) \\ B_K(i)C & 0 & A_K(i) \end{bmatrix}$$

值得注意的是,跳变系统(6)的状态是左连续的,但右边在时间  $t = ih$  的时候可能是不连续的,它包含连续状态和离散状态,可基于 Lyapunov 稳定性定理来研究跳变系统的稳定问题。本文的设计目的是:要设计一个输出反馈采样控制器(4),使得闭环系统(6)渐近稳定。

**引理 1** 若存在对称正定矩阵  $P(t), P(i^+)$ ,  
 $P(i)$  使如下的矩阵不等式成立

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + (A_c + \Delta A_c(t))^T P(t) + \\ P(t)(A_c + \Delta A_c(t)) < 0, ih < t \leq (i+1)h \end{aligned} \quad (7)$$

$$A_d^T P(i^+) A_d - P(i) < 0, i = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

那么,跳变系统(6)是渐近稳定的。

**证明** 为跳变系统(6)定义如下形式的 Lyapunov 函数

$$V(t) = \begin{cases} \zeta^T(t) P(t) \zeta(t), ih < t \leq (i+1)h \\ \zeta^T(t) P(t) \zeta(t), t = ih, ih^+ \end{cases}$$

(1) 连续部分。对跳变系统(6)中的连续部分,在区间  $ih < t \leq (i+1)h$  中, 定义一个 Lyapunov 函数  $V = \zeta^T(t) P(t) \zeta(t)$ , 对时间求微分,得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \dot{\zeta}^T(t) P(t) \zeta(t) + \zeta^T(t) \dot{P}(t) \zeta(t) + \\ & \zeta^T(t) (A_c + \Delta A_c(t))^T P(t) \zeta(t) + \\ & \zeta^T(t) \dot{P}(t) \zeta(t) + \\ & \zeta^T(t) P(t) (A_c + \Delta A_c(t)) \zeta(t) = \\ & \zeta^T(t) \left[ \dot{P}(t) + (A_c + \Delta A_c(t))^T P(t) + \right. \\ & \left. P(t)(A_c + \Delta A_c(t)) \right] \zeta(t) \end{aligned}$$

根据 Lyapunov 稳定性理论得到系统稳定的充分条件是存在时变对称矩阵  $P(t) > 0$  满足式(7)的动态 Riccati 不等式。

(2) 离散部分。Lyapunov 函数  $t = ih, ih^+$  处求差分,得

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{V}(ih) &= \mathbf{V}(ih^+) - \mathbf{V}(ih) = \\ \zeta^T(ih^+) \mathbf{P}(ih^+) \zeta(ih^+) - \zeta^T(ih) \mathbf{P}(ih) \zeta(ih) &= \\ \zeta^T(ih) [\mathbf{A}_d^T \mathbf{P}(ih^+) \mathbf{A}_d - \mathbf{P}(ih)] \zeta(ih)\end{aligned}$$

根据离散 Lyapunov 稳定定理得到跳变系统的离散部分是渐近稳定的。引理 1 得证。

## 2 主要结果

### 2.1 名义采样系统的输出反馈镇定控制器设计

首先考虑有限时域名义采样系统的输出反馈镇定问题。考虑如下闭环系统模型：

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= \mathbf{A} \zeta(t), \zeta(0) = 0, ih < t \leq (i+1)h \\ \zeta(ih^+) &= \mathbf{A}_d \zeta(ih)\end{aligned}\quad (9)$$

**定理 1** 若在每个采样区间  $ih < t \leq (i+1)h$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, N-1$  中, 存在如下形式的对称正定矩阵

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(i+1^+) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^+( \cdot ) & * & * \\ \mathbf{P}_{12}^+( \cdot )^T & \mathbf{P}_{22}^+( \cdot ) & * \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_{33}^+( \cdot ) \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}(i+1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}( \cdot ) & * & * \\ \mathbf{P}_{12}( \cdot )^T & \mathbf{P}_{22}( \cdot ) & * \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_{33}( \cdot ) \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}(i+1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11}( \cdot ) & * & * \\ \mathbf{W}_{12}( \cdot )^T & \mathbf{W}_{22}( \cdot ) & * \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_{33}( \cdot ) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

和输出反馈控制器参数矩阵  $\mathbf{A}_K(i)$ ,  $\mathbf{B}_K(i)$ ,  $\mathbf{C}_K(i)$ ,  $\mathbf{D}_K(i)$ , 且满足如下的 LMI 条件

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}(i+1) & * & * \\ \Omega_{12}^T(i+1) & \Omega_{22}(i+1) & * \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_{33}(i+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}(i+1) & * & * \\ \Phi_{12}^T(i+1) & \Phi_{22}(i+1) & * \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_{33}(i+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11}(i+1) & * \\ \Pi_{12}^T(i+1) & \Pi_{22}(i+1^+) \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

式中：

$$\begin{aligned}\Omega_{11}(i+1) &= \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{11}( \cdot ) + \mathbf{P}_{11}( \cdot ) \mathbf{A} + \mathbf{W}_{11}( \cdot ) - \\ h[\mathbf{W}_{11}( \cdot ) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{W}_{11}( \cdot )]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{12}^T(i+1) &= \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{11}( \cdot ) + \mathbf{P}_{12}^T( \cdot ) \mathbf{A} + \mathbf{W}_{12}^T( \cdot ) - \\ h[\mathbf{W}_{12}^T( \cdot ) \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{W}_{12}( \cdot )]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{22}(i+1) &= \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{12}( \cdot ) + \mathbf{P}_{12}^T( \cdot ) \mathbf{B} + \mathbf{W}_{22}( \cdot ) - \\ h[\mathbf{W}_{12}^T( \cdot ) \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{W}_{12}( \cdot )]\end{aligned}$$

$$\Phi_{11}(i+1) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{11}( \cdot ) + \mathbf{P}_{11}( \cdot ) \mathbf{A} + \mathbf{W}_{11}( \cdot )$$

$$\Phi_{12}^T(i+1) = \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{11}( \cdot ) + \mathbf{P}_{12}^T( \cdot ) \mathbf{A} + \mathbf{W}_{12}^T( \cdot )$$

$$\begin{aligned}\Phi_{22}(i+1) &= \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{12}( \cdot ) + \mathbf{P}_{12}^T( \cdot ) \mathbf{B} + \mathbf{W}_{22}( \cdot ) \\ \Pi_{11}(i+1) &= -\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}( \cdot ) & * & * \\ \mathbf{P}_{12}( \cdot )^T & \mathbf{P}_{22}( \cdot ) & * \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_{33}( \cdot ) \end{bmatrix} \\ \Pi_{22}(i+1^+) &= -\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^+( \cdot ) & * & * \\ \mathbf{P}_{12}^+( \cdot )^T & \mathbf{P}_{22}^+( \cdot ) & * \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_{33}^+( \cdot ) \end{bmatrix}^{-1} \\ \Pi_{12}^T(i+1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_K(i) \mathbf{C} & 0 & \mathbf{C}_K(i) \\ \mathbf{B}_K(i) \mathbf{C} & 0 & \mathbf{A}_K(i) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

那么, 闭环采样控制系统(9)是渐近稳定的。

**证明** 首先, 定义 Lyapunov 函数

$$\mathbf{V}(t) = \begin{cases} \zeta^T(t) \mathbf{P}(t) \zeta(t), ih < t \leq (i+1)h \\ \zeta^T(t) \mathbf{P}(t) \zeta(t), t = ih, ih^+ \end{cases}$$

其中  $i=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。由引理 1 可知, 闭环采样系统连续部分渐近稳定的充分条件是

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{A}_c^T + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(c) \mathbf{P}(t) \mathbf{A}_c &< 0 \\ ih < t \leq (i+1)h\end{aligned}\quad (13)$$

注意到 Riccati 微分不等式(13)的求解方式是在每个采样时间的断点处反向求解, 时变矩阵  $\mathbf{P}(t)$  将导致 LMI 求解困难, 为了解决这个问题, 在区间  $ih < t \leq (i+1)h$  中将  $\mathbf{P}(t)$  定义为式(14)形式, 这样  $\mathbf{P}(t)$  就成为一个分段连续的线性矩阵函数:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(i+1) + (t - (i+1)h) \mathbf{W}(i+1) \quad (14)$$

式(14)包含了起始点  $\mathbf{P}((i+1)h)$  和终止点  $\mathbf{P}(ih^+)$ 。将式(14)代入到式(13)中, 得

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}_c^T \mathbf{P}(i+1) + \mathbf{P}(i+1) \mathbf{A}_c + \mathbf{W}(i+1)] + \\ (t - (i+1)h)[\mathbf{A}_c^T \mathbf{W}(i+1) + \mathbf{W}(i+1) \mathbf{A}_c] &< 0\end{aligned}$$

由于  $\mathbf{P}(t)$  是关于端点的凸组合形式, 只需在端点检验式(13)是否成立即可。即在采样区间  $ih < t \leq (i+1)h$  中, 在  $t = (i-1)h$  处检验  $\mathbf{P}((i+1)h)$  和  $t = ih^+$  处检验  $\mathbf{P}(ih^+)$  是否满足式(13)。因此得到如下的两个 LMI

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}_c^T \mathbf{P}(i+1) + \mathbf{P}(i+1) \mathbf{A}_c + \mathbf{W}(i+1)] - \\ h[\mathbf{A}_c^T \mathbf{W}(i+1) + \mathbf{W}(i+1) \mathbf{A}_c] &< 0\end{aligned}\quad (15)$$

$$\mathbf{A}_c^T \mathbf{P}(i+1) + \mathbf{P}(i+1) \mathbf{A}_c + \mathbf{W}(i+1) < 0 \quad (16)$$

将定理中定义的正定矩阵  $\mathbf{P}(i+1)$  和  $\mathbf{W}(i+1)$  代入到式(15)和式(16)中即可得到定理中的 LMI(10)和 LMI(11)。

**离散部分:** 在闭环采样控制系统的离散跳变方程中, 针对每个跳变点定义一个 Lyapunov 函数

$$\mathbf{V}(i+1) = \zeta^T(i+1) \mathbf{P}(i+1) \zeta(i+1)$$

计算时间差分, 得

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{V} = & \zeta^T(i+1^+) \mathbf{P}(i+1^+) \zeta(i+1^+) - \\ & \zeta^T(i+1) \mathbf{P}(i+1) \zeta(i+1) = \\ & \zeta^T(i+1) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^T \mathbf{P}(i+1^+) \mathbf{A}_d \\ -\mathbf{P}(i+1) \end{bmatrix} \zeta(i+1)\end{aligned}$$

由离散 Lyapunov 稳定性定理可得

$$\mathbf{A}_d^T \mathbf{P}(i+1^+) \mathbf{A}_d - \mathbf{P}(i+1) < 0,$$

进一步应用 Schur 补引理得到如下 LMI

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}(i+1) & \mathbf{A}_d^T \\ \mathbf{A}_d & -\mathbf{P}(i+1^+)^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

定理 1 得证。

**注 1** 定理 1 中要求在有限时域的每个采样区间必须存在一个对称正定矩阵,为了使矩阵不等式系统能利用 Matlab LMI Toolbox 求解,必须给定一个终点初始值  $\mathbf{P}(N^+)$ 。

### 算法 1 给出定理 1 的计算步骤

Step 1 给定有限时域  $0 < t \leq (N-1)h$  和采样周期  $h$ ,设定  $i=N-1$  逆向求解;

Step 2 给定一个终点初始值  $\mathbf{P}(N^+)$ ,利用 LMI(10)~(12)求解  $\mathbf{P}(i+1)$ 、 $\mathbf{W}(i+1)$ 、 $\mathbf{A}_k(i)$ 、 $\mathbf{B}_k(i)$ 、 $\mathbf{C}_k(i)$  和  $\mathbf{D}_k(i)$ ;

Step 3 利用式(14)计算下一个计算区间的终点值  $\mathbf{P}(ih^+)$ ,即

$$\mathbf{P}(ih^+) = \mathbf{P}(i+1) - h\mathbf{W}(i+1)$$

Step 4 若  $i \neq 0$ ,设定  $i=i-1$ ,循环执行 Step2 和 Step3,否则结束。

## 2.2 参数不确定采样系统输出反馈镇定控制器设计

考虑参数不确定情况下的闭环采样控制系统(6),给出本文的第 2 个定理。

**定理 2** 若在每个采样区  $ih < t \leq (i+1)h$ ,  $i=0,1,2,\dots,N-1$  中,存在如定理 1 中定义的矩阵  $\mathbf{W}(i+1)$  和对称正定矩阵  $\mathbf{P}(i+1^+)$ 、 $\mathbf{P}(i+1)$ ,标量  $\epsilon_1(i+1) > 0$  和  $\epsilon_2(i+1) > 0$ ,输出反馈控制器参数矩阵  $\mathbf{A}_k(i)$ 、 $\mathbf{B}_k(i)$ 、 $\mathbf{C}_k(i)$ 、 $\mathbf{D}_k(i)$ ,且满足如下的 LMI 条件

$$\begin{bmatrix} \Omega_1(i+1) & * & * & * \\ \Omega_2(i+1) & \Omega_{22}(i+1) & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_{33}(i+1) & 0 \\ \Psi_{41}(i+1) & \Psi_{42}(i+1) & 0 & -\epsilon_2(i+1)\mathbf{L} \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(i+1) & * & * & * \\ \Phi_2(i+1) & \Phi_{22}(i+1) & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_{33}(i+1) & 0 \\ \mathbf{M}^T \mathbf{P}_{11}(\cdot) & \mathbf{M}^T \mathbf{P}_{12}(\cdot) & 0 & -\epsilon_1(i+1)\mathbf{L} \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11}(i+1) & * \\ \Pi_{12}^T(i+1) & \Pi_{22}(i+1^+) \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

式中:

$$\Omega_{11}(i+1) =$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{11}(\cdot) + \mathbf{P}_{11}(\cdot) \mathbf{A} + \mathbf{W}_{11}(\cdot) -$$

$$h[\mathbf{W}_{11}(\cdot) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{W}_{11}(\cdot)] +$$

$$\epsilon_1(i+1) \mathbf{N}^T \mathbf{N}$$

$$\Phi_{11}(i+1) =$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{11}(\cdot) + \mathbf{P}_{11}(\cdot) \mathbf{A} +$$

$$\mathbf{W}_{11}(\cdot) + \epsilon_2(i+1) \mathbf{N}^T \mathbf{N};$$

$$\Psi_{41}(i+1) = \mathbf{M}^T [\mathbf{P}_{11}(\cdot) - h\mathbf{W}_{11}(\cdot)];$$

$$\Psi_{42}(i+1) = \mathbf{M}^T [\mathbf{P}_{12}(\cdot) - h\mathbf{W}_{12}(\cdot)];$$

其余矩阵的定义同定理 1 中的定义。那么,闭环采样控制系统(6)是渐近稳定的。

**证明** 类似定理 1 的证明思路,应用引理 2<sup>[7]</sup>和 Schur 补引理可以证明定理 2,由于篇幅所限,此处略。

**注 2** 定理 2 的算法和定理 1 类似,只是由于不确定性的引入,在每个采样区间,算法 1 中的 Step2 还要求存在标量  $\epsilon_1(i+1) > 0$ , $\epsilon_2(i+1) > 0$ 。

## 3 仿真算例

考虑某飞行器的短周期动态模型<sup>[8]</sup>

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & 1 & Z_\delta \\ M_a & M_q & M_\delta \\ 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ q \\ \delta_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\tau \end{bmatrix} \delta_e \quad (20)$$

名义飞行条件:高度为 10 668 m(35 000 英尺),马赫数  $Ma=1.5$ ,状态矩阵中的参数值<sup>[8]</sup>  $Z_a=-0.5162 \text{ s}^{-1}$ , $Z_\delta=0.363 \text{ s}^{-1}$ , $M_a=-18.59 \text{ s}^{-2}$ , $M_q=-1.225 \text{ s}^{-2}$ , $M_\delta=-21.73 \text{ s}^{-2}$ , $\tau=1/14 \text{ s}$ 。

假设  $Z_a$ , $M_a$ , $M_q$  在建模时存在参数不确定性,即在名义值附近存在建模误差,表示为  $Z_a=-0.5162(1+d_1)$ , $M_a=-18.59(1+d_2)$ , $M_q=-1.225(1+d_3)$ ,其中  $d_1$ , $d_2$ , $d_3$  为不确定参数,得到输出反馈采样控制器设计所需的一些矩阵如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5162 & 1 & 0.363 \\ -18.95 & -1.225 & -21.73 \\ 0 & 0 & -0.0714 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -0.5162 & 0 & 0 \\ -18.59 & 0 & 0 \\ 0 & -1.225 & 0 \end{bmatrix}$$

输出  $y(ih) = Cx(ih)$ , 由于三个状态均可测, 选  $C = I$ 。选择采样周期  $h = 0.04$  s, 仿真时间为 8 s, 在有限区间  $ih < t \leq (i+1)h, i=0, 1, 2, \dots, 200$  内, 根据算法 1, 利用 Matlab 的 LMI Toolbox 求解式(17)~式(19), 得到有限时域输出反馈采样控制器。选定终点值  $P(200^+) = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ 。得到的最后结果为

$$\begin{aligned} A_K(0) &= \begin{bmatrix} 0.2071 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2071 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2071 \end{bmatrix}; \\ B_K(0) &= \begin{bmatrix} 0.2961 & -0.4040 & 0.1331 \\ -0.4040 & 2.8998 & -3.1225 \\ 0.1331 & -3.1225 & 3.9294 \end{bmatrix}; \\ C_K(0) &= [10.3548 \quad 10.3548 \quad 10.3548]; \\ D_K(0) &= [1.2573 \quad -31.2939 \quad 46.9472]. \end{aligned}$$

假定系统初始状态  $x(0) = [2 \quad 0 \quad 0]^T$ , 采样控制器的初始状态  $\zeta(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ 。图 1、图 2 给出了系统的状态响应和控制量。从图 1、图 2 可以看出系统是稳定的, 验证了本文所提方法的有效性。图 3 给出了每个采样区间计算得到的  $P(i+1)$  的最小特征值, 可见, 每个采样区间的  $P(i+1)$  都是正定的, 从而保证了系统的渐近稳定。

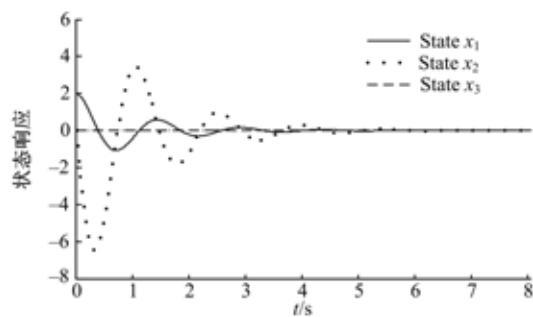


图 1 状态响应曲线

Fig. 1 Response of states

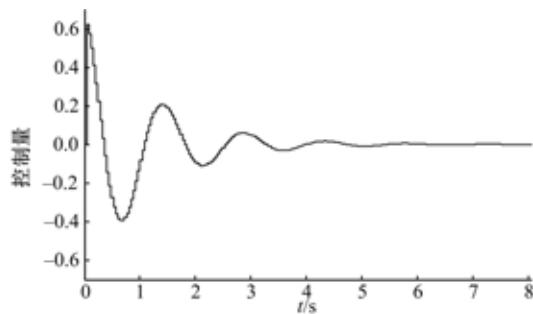
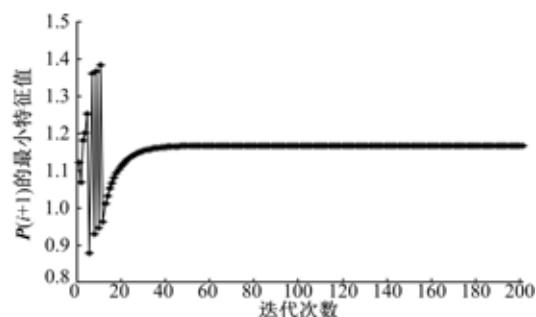


图 2 控制信号

Fig. 2 Control actuation

图 3 矩阵  $P(i+1)$  的最小特征值Fig. 3 The minimum eigenvalues of matrices  $P(i+1)$ 

## 4 结束语

将参数不确定采样控制系统等价地转换为具有有限离散跳变的线性系统, 基于线性矩阵不等式技术, 研究了输出反馈鲁棒镇定问题。所提方法很容易扩展到控制矩阵和输出矩阵具有不确定性的情形, 基于跳变系统描述的方法研究采样系统的输出反馈  $H_\infty$  控制和时滞采样系统的控制问题是今后的研究方向之一。

## 参考文献:

- [1] Chen T W, Francis B A. Optimal Sampled-data Control Systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [2] Bamieh B A, Pearson J B. A general framework for linear periodic systems with application to  $H_\infty$  sampled-data control[J]. IEEE Trans Automat Control, 1992, 37(4): 418-435.
- [3] Toivonen H T. Sampled-data control of continuous-time system with an  $H_\infty$  optimality criterion[J]. Automatica, 1992, 28(1): 45-54.
- [4] 王广雄, 刘彦文, 何朕. 采样系统的  $H_\infty$  混合灵敏度设计[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(3): 351-354.  
Wang Guang-xiong, Liu Yan-wen, He Zhen.  $H_\infty$  mixed sensitivity design for sampled-data systems [J]. Journal of Control Theory and Applications, 2006, 23(3): 351-354.
- [5] Ichikawa A, Katayama H. Linear Time Varying Systems and Sampled-data Systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [6] Xie L. Output feedback  $H_\infty$  control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J Control, 1996, 63(4): 741-750.
- [7] Stoica A. Small gain for linear jump systems with applications to sampled-data systems[C]// Proceedings of European Control Conference, Porto: EUCA, 2001: 3265-3269.