

# 车辆作用下的公路简支梁桥测试频率

程永春,谭国金,刘寒冰,刘福寿

(吉林大学 交通学院,长春 130022)

**摘要:**应用达朗伯(D'Alembert)原理和欧拉-柏努利梁(Euler-Bernoulli)假设,建立了多个车辆-桥梁系统相互作用的理论模型。利用模态分析方法,使车辆-桥梁系统方程解耦,基于广义坐标的自由振动理论,对用广义坐标矩阵形式表示的解耦后的运动方程用固有振动理论求解,从而得出多个车辆作用下的桥梁有载频率。对于中小跨径的公路桥梁,往往采用单个车辆激振桥梁,激振后停于桥上,因此推导出了单个车辆作用下的桥梁有载频率解析表达式。讨论了车辆的位置、弹簧刚度、簧上质量、簧下质量和桥梁有载频率与桥梁固有频率差值之间的关系。

**关键词:**道路工程;桥梁频率;车辆-桥梁系统;模态分析方法;方程解耦;固有振动理论

**中图分类号:**U411 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5497(2009)06-1492-05

## Test frequencies freely supported beam of highway bridge under effect of vehicles

CHENG Yong-chun, TAN Guo-jin, LIU Han-bing, LIU Fu-shou

(College of Transportation, Jilin University, Changchun 130022, China)

**Abstract:** A theoretical model was established for the interaction of the multiple-vehicle and bridge system using the D'Alembert principle and the hypothesis of Euler-Bernoulli beam. The motion equation of the vehicle-bridge system was decoupled by the modal analysis method. The decoupled motion equation expressed in the matrix form of the generalized coordinates was solved by the eigenvibration theory to get the frequencies of the bridge loaded by vehicles. For the highway bridges with small or medium span, their vibrations were excited usually by a single vehicle, and the vehicle will stay on the bridge after excitation, so analytical expressions of the frequencies of the bridge under the action of a single vehicle were derived. The effects of the location of vehicle, the stiffness of its suspension spring, the mass above and under the spring on the difference between the loaded frequencies and the eigenfrequencies of the bridge were discussed.

**Key words:** road engineering; bridge frequency; vehicle-bridge system; modal analysis method; decoupling of equation; eigenvibration theory

停在桥梁上的车辆与桥梁组成车-桥耦合振动体系共同振动。在桥梁的动力试验中,测试到

的桥梁频率实际上是以桥梁振动为主要振动形式的车-桥系统的振动频率,工程上常把车-桥系统

**收稿日期:**2008-12-03.

**基金项目:**“863”国家高技术研究发展计划项目(2009AA11Z104);吉林省交通厅项目(2008-1-1);吉林大学创新团队项目.

**作者简介:**程永春(1961-),男,教授,博士生导师.研究方向:道路工程材料试验与理论. E-mail:chengyc@jlu.edu.cn

**通信作者:**刘寒冰(1957-),男,教授,博士生导师.研究方向:道桥结构的动态设计理论及应用. E-mail:ttggjj@163.com

的桥梁测试频率称为桥梁有载频率。

近年来,基于实测自振特性对桥梁进行状态评估是一个热门研究问题。有时车辆作用下的桥梁有载频率与固有频率之间的差值要比桥梁自身损伤引起的固有频率变化量大,由于把车辆作为激励源的动态检测中(如跳车试验)和桥梁实时监测过程中桥梁上必须有车辆存在,因此往往导致桥梁状态评估结果精度不高<sup>[1]</sup>。

由结构振动理论可知,车辆的作用位置、车辆的振动特性(如弹簧刚度、簧下质量等)为导致桥梁实测频率与固有频率产生误差的根本原因。1997年 Farrar 等和 2003年 Kim 等通过对实际桥梁进行了动力测试,得出了通行车辆作用下,桥梁的实测频率与固有频率存在较大误差的结论<sup>[2-3]</sup>。试验揭示了在选定车辆类型的情况下,多个车辆的作用位置改变桥梁有载频率的现象,并没有给出相应的理论计算方法。

考虑到车辆作用下桥梁有载频率与固有频率存在较大误差,很多研究者分别把车辆简化为不同的质量分布形式,并对此问题进行了研究<sup>[4-6]</sup>。研究成果对桥梁在附加质量情况下的有载频率变化规律研究起到了推动作用,但由于把车辆简化为移动质量模型,无法考虑车辆自身振动特性对桥梁有载频率的影响。为此,石家庄铁道学院的苏木标教授建立了车-桥系统的振动方程,以铁路简支梁桥为例,对车-桥系统的自振特性进行了研究<sup>[7]</sup>。任剑莹对连续梁桥竖向有载频率进行了推导,并采用有限元方法进行了计算<sup>[8]</sup>。De Roeck 等采用有限元方法计算出在车辆作用下的桥梁动力响应,从动力响应中分析出桥梁在车辆作用下的有载频率<sup>[9]</sup>。上述研究为采用有限元方法建立车-桥系统的相互作用模型,分析了通行车辆作用下桥梁有载频率的变化规律,但对需检测或监测的桥梁都建立动态有限元模型,将会大大增加检测工作量,不利于工程人员掌握应用。

本文基于模态分析和自由振动等理论,把车辆作用下桥梁有载频率的求解变为求解一个矩阵特征值的过程,并且计算精度较高,形成矩阵的过程简单,便于实际工程应用。

## 1 理论模型的建立

### 1.1 多个车辆-桥梁系统运动方程的建立

设简支梁为欧拉-伯努利梁,忽略桥梁和车辆的阻尼,多个车辆-桥梁的相互作用模型见图 1。

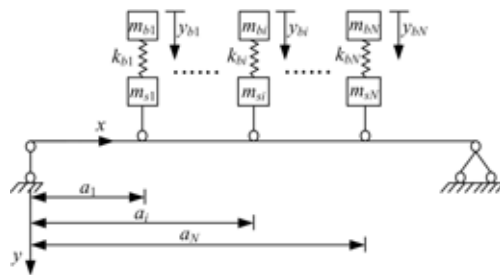


图 1 车-桥相互作用模型

Fig. 1 Model of vehicle-bridge interaction

在此车辆-桥梁的相互作用系统中,  $m$  为桥梁单位长度的质量,  $E$  为桥梁的弹性模量,  $I$  为桥梁截面的抗弯惯性矩,  $y(x, t)$  为桥梁的位移,  $m_{bi}$  为第  $i$  个车辆的簧上质量,  $y_{bi}$  为第  $i$  个车辆簧上质量的位移,  $m_{si}$  为第  $i$  个车辆的簧下质量,  $a_i$  为第  $i$  个车辆距梁端的距离。  $k_{bi}$  为第  $i$  个车辆的弹簧刚度。

应用达朗伯(D'Alembert)原理,可建立由  $N$  个车辆作用下的桥梁竖向运动方程

$$m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = p \quad (1)$$

式中:  $p = \sum_{i=1}^N \delta(x - a_i) [(m_{bi} + m_{si})g - m_{bi}\ddot{y}_{bi} - m_{si}\ddot{y}(x, t)\delta(x - a_i)]$

$$\delta(x - a_i) = \begin{cases} 1, & x = a_i \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

同样,应用达朗伯原理,建立第  $i$  个车辆的运动方程如下

$$-m_{bi}\ddot{y}_{bi} - k_{bi}[y_{bi} - \ddot{y}(x, t)\delta(x - a_i)] = 0 \quad (2)$$

利用模态分析方法,对桥梁运动方程式(1)进行解耦,令

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{NN} q_i(t)\phi_i(x) \quad (3)$$

式中:  $\phi_i(x)$  为桥梁的第  $i$  阶振型函数;  $q_i(t)$  为对应的第  $i$  阶广义(模态)坐标。把式(3)代入式(1)中,两边同乘  $\phi_n(x)$ ,并从 0 到  $l$  进行积分运算,利用振型的正交性,可得

$$s_n \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 s_n q_n(t) = - \sum_{i=1}^N \phi_n(x = a_i) m_{bi} \ddot{y}_{bi} - \sum_{i=1}^m \phi_n^2(x = a_i) m_{si} \ddot{q}_n(t) + c_{n0} + c_{nl} \ddot{q}_n(t) \quad (4)$$

式中:  $c_{nl} = \int_0^l -m_{si} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1, k \neq n}^{NN} \phi_n(x) [\phi_k(x)\delta(x - a_i)] \delta(x - a_i) dx$

$$c_{n0} = \sum_{i=1}^N \phi_n(x = a_i) (m_{bi} + m_{si}) g$$

$$s_n = \int_0^l m \phi_n^2(x) dx = \frac{ml}{2}$$

$\omega_n$  为桥梁的第  $n$  阶角频率。

同样利用模态分析的方法,对车辆运动方程式(2)进行解耦。由式(4)可知,解耦后的桥梁运动方程为单自由度系统运动方程,由于  $N$  个车辆和桥梁共同运动,与桥梁  $n$  阶振动相对应,车-桥系统将有  $N+1$  阶振动形式,因此车-桥系统中的单个自由度的车辆将会拥有  $N+1$  阶不同的振动形式。设  $y_{bi,n}(t)$  为第  $i$  个车辆与桥梁  $n$  阶振动形式相对应的第  $n$  阶振动,则式(2)可表示为

$$m_{bi} \ddot{y}_{bi,n}(t) + k_{bi} y_{bi,n}(t) - k_{bi} q_n(t) \phi_n(x=a_i) - c_{n2,i} \dot{q}_n(t) = 0 \quad (5)$$

式中:  $c_{n2,i} = k_{bi} \sum_{i=1, i \neq n}^{NN} q_i(t) \phi_i(x=a_i)$ 。

### 1.2 多个车辆作用下桥梁频率的求解

前文已导出用广义坐标表示的桥梁和车辆的运动方程,即式(4)、式(5)。在此用广义坐标的矩阵形式表示车辆-桥梁系统的广义自由振动方程。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} - \{c_{n1}\} \ddot{q}_n(t) - \{c_{n2}\} \dot{q}_n(t) - \{c_0\} = 0 \quad (6)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ 0 & m_{b1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{bN} \end{bmatrix}$$

式中:  $A_1 = S_n \sum_{i=1}^N \phi_n^2(x=a_i) m_{si}$ ;

$$A_2 = \phi_n(x=a_1) m_{b1};$$

$$A_n = \phi_n(x=a_N) m_{bN}.$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \omega_n^2 s_n & 0 & \cdots & 0 \\ -k_{b1} \phi_n(x=a_1) & k_{b1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{bN} \phi_n(x=a_N) & 0 & \cdots & k_{bN} \end{bmatrix};$$

$$\{c_{n1}\} = [c_{n1} \ 0 \ \cdots \ 0]^T;$$

$$\{c_{n2}\} = [0 \ c_{n2,1} \ \cdots \ c_{n2,N}]^T;$$

$$\{c_0\} = [c_{n0} \ 0 \ \cdots \ 0]^T;$$

$$\{u\} = [q_n \ y_{b1} \ \cdots \ y_{bN}]^T.$$

根据车辆和桥梁的振动特性,认为车辆和桥梁都为简谐振动,则有

$$\{u\} = [q_n \ y_{b1} \ \cdots \ y_{bN}]^T = [Q_n \ X_{b1} \ \cdots \ X_{bN}]^T \sin \omega_n t \quad (7)$$

式中:  $Q_n$ 、 $X_{bi}$  分别为广义坐标  $q_n$ 、 $y_{bi}$  的振幅;  $\omega_n$  为车辆作用下,车-桥系统的振动频率。

分析式(6)可知,式(6)为组装后的车-桥系统

广义自由振动方程。 $\{c_n\}$  为桥梁不同阶振型之间的耦合项,由结构动力学可知,高阶振型对低阶的耦合作用不大,低阶振型对高阶的耦合作用较大,而在桥梁动力测试中,往往需要测试的是低阶振型,所以可以认为解耦后的桥梁振动方程只以某阶振动形式振动,其他阶振动形式对其没有影响,则可令  $\{c_{n1}\} = 0$  和  $\{c_{n2}\} = 0$ 。若  $\{c_0\} = 0$ , 则认为桥梁以车辆重力作用下产生的静力位移为振动平衡位置,认为此位移较小,可以忽略,即有  $\{c_0\} = 0$ 。

式(6)中,若忽略桥梁不同阶振型之间的耦合和车辆重力作用下产生的较小静力位移的影响,即令  $\{c_{n1}\} = 0$  和  $\{c_{n2}\} = 0$ ,  $\{c_0\} = 0$ 。求解振动频率  $\omega_n$  最直接的方法是把式(7)代入车-桥系统的广义自由振动方程式(6)中,代入后的方程可写为

$$[M]^{-1}[K]\{u\} = \omega_n^2 \{u\} \quad (8)$$

由式(8)可知:①矩阵  $[M]^{-1}[K]$  的  $N+1$  个特征值便为与桥梁  $n$  阶频率对应的车-桥系统  $N+1$  个振动频率;②通过振动理论可知,求解出的  $N+1$  个振动频率有  $N$  个为以车辆振动为主的振动,即有  $N$  个振动频率会接近于单自由度车辆的振动频率;③其中有 1 个振动频率为在通行车辆作用下桥梁的第  $n$  阶有载频率。因此只要知道车辆的振动特性,便可很容易确定出在车辆作用下桥梁的第  $n$  阶有载频率。

### 1.3 单个车辆作用下桥梁频率的求解

当单个车辆作用时,  $[M]^{-1}[K]$  的求解退化为以下方程根的求解

$$B_0 \omega_n^4 + B_1 \omega_n^2 + B_2 = 0 \quad (9)$$

求解式(9)可得

$$\begin{cases} \omega_{n1} = \sqrt{\frac{-B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4B_0B_2}}{2B_0}} \\ \omega_{n2} = \sqrt{\frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4B_0B_2}}{2B_0}} \end{cases}$$

式中:  $B_0 = [s_n + \phi_n^2(x=a_1) m_s] m_b$ ,

$$B_1 = -[(s_n + \phi_n^2(x=a_1) m_s) k_{b1} +$$

$$\omega_n^2 s_b m_{b1} + m_{b1} \phi_n^2(x=a_1)],$$

$$B_2 = \omega_n^2 s_n k_{b1}$$

$\omega_{n1}$ 、 $\omega_{n2}$  为对应桥梁第  $n$  阶振动的两个频率,其中一个接近于单个车辆自由振动频率,另一个则为在车辆作用下的桥梁第  $n$  阶有载频率。

## 2 数值算例及结果分析

桥梁横截面如图 2 所示,桥梁密度为 3101

$\text{kg/m}^3$ , 桥梁长度  $l=20\text{ m}$ , 弹性模量  $E=2.85\times 10^{10}\text{ Pa}$ 。车辆参数的初始值为  $m_s=5000\text{ kg}$ 、 $m_b=1000\text{ kg}$ 、 $k_b=1\times 10^5\text{ N/m}$ ; 讨论单个车辆作用下, 车辆弹簧刚度、簧上质量、簧下质量对桥梁有载频率的影响时, 令  $a_1=10\text{ m}$ 。讨论 2 个车辆作用下, 簧下质量对桥梁有载频率的影响时, 令  $a_1=7\text{ m}$ 、 $a_2=13\text{ m}$ 。并把桥梁的有载频率与固有频率之间的差值简称为桥梁频率变化值。

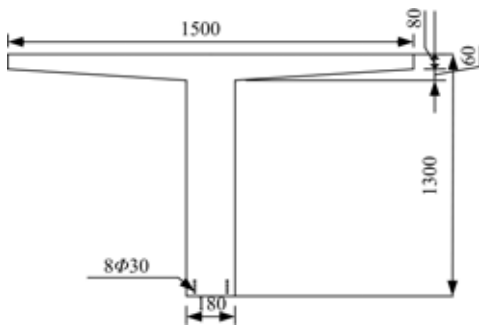


图 2 钢筋混凝土梁横截面图(单位 mm)

Fig. 2 Transverse section of reinforced concrete beam (mm)

2.1 车辆位置的影响

当单个车辆作用时, 令车辆的位置分别为  $a_1=0, 1, \dots, 20\text{ m}$ , 得出车辆作用下桥梁频率的变化值(如图 3、图 4 所示)。由图 3、图 4 可知, 车辆位置的改变, 对桥梁的频率变化值有较大影响; 当车辆作用于简支梁的某阶振型值最大位置时, 桥梁的频率变化值最大, 而作用于某阶振型的节点时, 此阶桥梁的频率变化值为零。

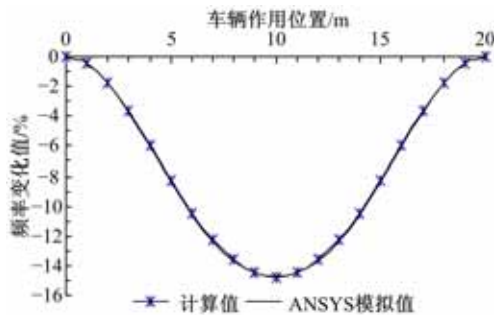


图 3 汽车位置与一阶桥梁频率变化值的关系

Fig. 3 Change value of the 1st frequency of bridge with the change of vehicle position

2.2 车辆弹簧刚度的影响

单个车辆作用时, 令车辆弹簧刚度  $k_b$  为变量, 得出车辆弹簧刚度与桥梁频率变化值的关系(见图 5)。由图 5 可知, 车辆弹簧刚度在一定范围内变化时, 对桥梁频率变化值的影响不大; 当车

辆弹簧刚度增大到一定程度时, 随着弹簧刚度的增大, 桥梁有载频率比固有频率要大, 因为弹簧刚度增大了车-桥系统的整体刚度。

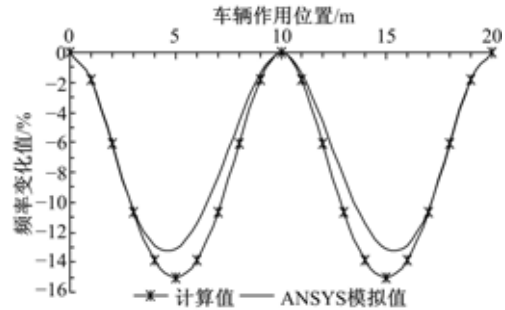


图 4 汽车位置与二阶桥梁频率变化值的关系

Fig. 4 Change value of 2nd frequency of bridge with change of vehicle position

2.3 簧上质量的影响

单个车辆作用时, 令车辆的簧上质量  $m_b$  为变量, 得出车辆簧上质量与桥梁频率变化值的关系(见图 6)。综合图 3、图 6 可知, 车辆簧上质量改变时, 桥梁频率变化值几乎不发生变化。

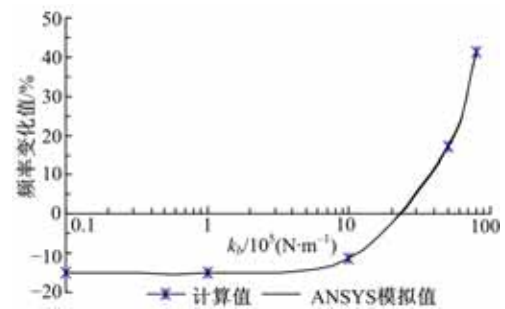


图 5 弹簧刚度与一阶桥梁频率变化值的关系

Fig. 5 Change value of 1st frequency of bridge with change of spring stiffness

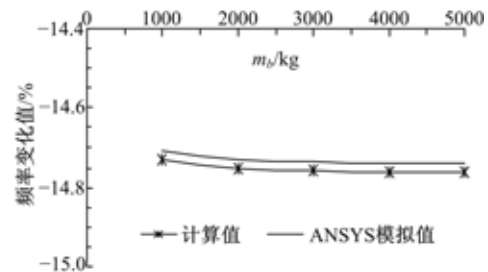


图 6 簧上质量与一阶桥梁频率变化值的关系

Fig. 6 Change value of 1st frequency of bridge with change of mass above spring

2.4 簧下质量的影响

令车辆的簧下质量  $m_s$  为变量, 得出车辆簧下质量与桥梁频率变化值的关系(单个车辆作用见图 7(a), 2 辆车作用见图 7(b))。由图 7 可知,

车辆簧下质量对桥梁频率变化值的影响很大,并且随着车辆簧下质量的增加,桥梁有载频率呈直线下降趋势。

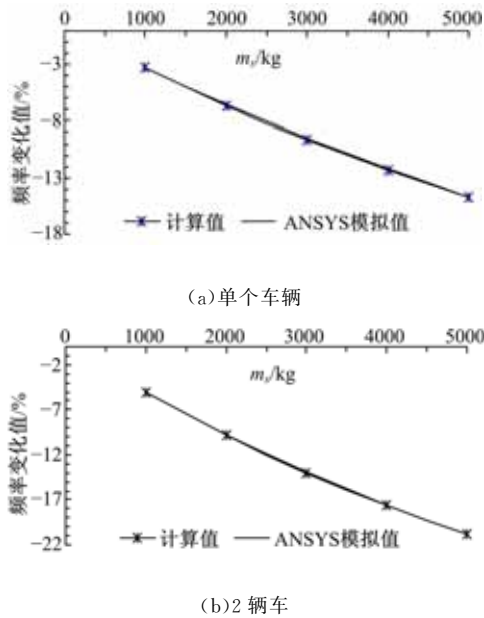


图7 车辆簧下质量与一阶桥梁频率变化值的关系

Fig.7 Change value of 1st frequency with change of mass under spring under effect of vehicle

### 3 结 论

建立了多个车辆-简支梁桥系统相互作用的理论模型,利用模态分析方法和自由振动理论,求解出车辆作用下的桥梁有载频率。讨论了车辆作用下,车辆的位置、弹簧刚度、簧上质量、簧下质量对桥梁频率变化值(桥梁的有载频率与固有频率之间的差值)的影响规律。在简支梁桥的动力测试中,为桥梁频率的精确获取提供了理论指导。数值算例结果表明:

(1) 车辆位置的改变,对桥梁的频率变化值有较大影响;当车辆作用于简支梁的某阶振型值最大位置时,桥梁的频率变化值最大,而作用于某阶振型的节点时,此阶桥梁的频率变化值为零。

(2) 车辆弹簧刚度在一定范围内变化时,对桥梁频率变化值的影响不大;当车辆弹簧刚度增大到一定程度时,随着弹簧刚度的增大,桥梁有载频率比固有频率要大,因为弹簧刚度增大了车-桥系统的整体刚度。

(3) 车辆簧上质量改变时,桥梁频率变化值几乎不发生变化。

(4) 车辆簧下质量对桥梁频率变化值的影响很大,并且随着车辆簧下质量的增加,桥梁有载频

率呈直线下降趋势。

### 参考文献:

[1] 程永春,谭国金,刘寒冰,等. 基于特征解统计特性的桥梁损伤识别[J]. 吉林大学学报:工学版,2008,38(4):812-816.  
Cheng Yong-chun, Tan Guo-jin, Liu Han-bing, et al. Damage identification of bridge structure based on statistical properties of eigen-solution[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2008, 38(4): 812-816.

[2] Farrar C R, Doebling S W, Cornwell P J, et al. Variability of modal parameters measured on the alamosa canyon bridge[C]// In: Proceedings of the 1997 15th International Modal Analysis Conference, 1997: 257-263.

[3] Kim C Y, Jung D S, Kim N S, et al. Effect of vehicle weight on natural frequencies of bridges measured from traffic-induced vibration[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2003, 2(1): 109-115.

[4] 应怀樵,郭亚. 移动荷载在简支梁上不同位置有载频率的研究[C]// 现代振动与噪声技术,北京,2002: 84-88.

[5] 唐贺强,沈锐利. 简支梁桥有载频率分析[J]. 西南交通大学学报,2004,39(5):628-632.  
Tang He-qiang, Shen Rui-li. Analysis of loaded frequency of simply-supported beam bridge[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2004, 39(5): 628-632.

[6] Frýba L. Dynamics of Railway Bridges[M]. London: Co-published with Thomas Telford Ltd, 1992.

[7] 苏木标,梁振辉. 对车-桥系统自振特性的初探[J]. 石家庄铁道学院学报,1993,6(3):49-58.  
Su Mu-biao, Liang Zhen-hui. A study of the free vibration characteristics of VBS[J]. Journal of Shijiazhuang Railway Institute, 1993, 6(3): 49-58.

[8] 任剑莹,苏木标,李文平,等. 铁路连续梁桥竖向有载自振频率研究[J]. 铁道学报,2005,27(5):111-116.  
Ren Jian-ying, Su Mu-biao, Li Wen-ping, et al. Study on vertical loaded free frequencies of railway continuous bridges[J]. Journal of the China Railway Society, 2005, 27(5): 111-116.

[9] De Roeck G, Maeck J, Michiels T, et al. Traffic-induced shifts in modal properties of bridges[C]// In: Proceedings of SPIE-The International Society for Optical Engineering, 2002: 630-636.