

# Van der Pol-Duffing 振子的混沌及控制

张莉, 俞建宁<sup>†</sup>, 李阳, 彭建奎

(兰州交通大学数理与软件工程学院, 甘肃兰州 730070)

**摘要:** 通过相图、全局分叉图、庞加莱映射图对周期激励 Van der Pol-Duffing 振子的混沌行为进行了分析, 利用两种方法实现了该系统的混沌控制, 将该系统的混沌行为有效地控制到稳定的周期轨道。

**关键词:** 混沌; 混沌控制; 相图; 全局分岔

**中图分类号:** O415.5    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1006-0375(2007)02-0011-04

混沌是大量非线性系统可能出现的现象, 对混沌系统及其控制问题的研究是目前控制科学的一个前沿课题. 周期激励 Van der Pol-Duffing 振子是一种典型的非线性振动系统<sup>[1]</sup>, 有着丰富的动力学行为.

本文针对具有如下形式的 Van der Pol-Duffing 振子进行分析:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = f \cos(\omega t) \quad (1)$$

许多研究表明, 该系统可能存在混沌运动<sup>[2,3]</sup>. 本文通过数值仿真, 运用相图及系统 Poincaré 映射图对其进行直接分析, 证明该系统的确存在混沌行为. 并通过变量反馈控制方法将系统控制到了稳定的周期轨道.

## 1 系统的动力学行为

系统(1)可以写成一阶微分方程组的形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y + \alpha x - \beta x^3 + f \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

在参数  $\mu = 0.1$ ,  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $f = 3$  时, 图1为系统的相图和 Poincaré 映射图, 从图1可以充分看出系统作混沌运动.

系统(2)是一个多参数的动力系统, 随着参数的变化, 系统的稳定性及全局结构也会发生变化. 当参数变动并经过某些临界值时, 系统的定性态 (例如平衡状态或周期运动的数目和稳定性

---

收稿日期: 2006-10-30

基金项目: 甘肃省自然科学基金项目(3ZS051-A25-030, 3ZS-042-B25-049), 兰州交通大学大学生科研基金(DXS-2006-77)

作者简介: 张莉(1982-), 女, 甘肃漳县人, 硕士研究生, 研究方向: 非线性数值分析及混沌控制. <sup>†</sup> 通讯作者, yujn@mail.lzjtu.cn

等)会发生突然变化,即出现分岔现象.图2(a)是系统激振幅度 $f \in [0, 5]$ 时的全局分叉图,从图中可以看到,系统激振幅度 $f$ 取不同的值时,系统的周期轨道与混沌态相交替.图2(b)是系统激振幅度 $f \in [6, 9]$ 之间的放大大局分叉图,系统由倍周期态转为混沌态,又由混沌态转为倍周期态,存在复杂的动力学行为.

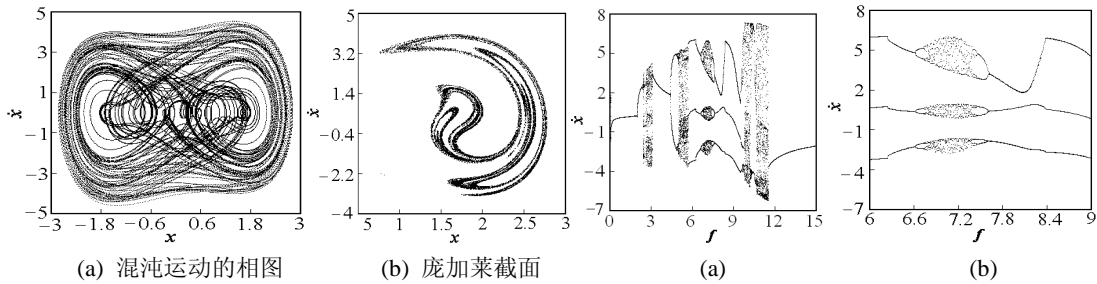


图1 系统的混沌运动

图2 系统以 $f$ 为分叉参数的全局图

Lyapunov 指数能够刻画初态敏感性<sup>[4]</sup>,表示相空间内邻近轨迹的平均指数发散率的数值特征.设 $d_0$ 为2起点之间的初始距离,则它们之间的距离可以表示为 $d(t) = d_0 2^{\lambda t}$ ,其中 $\lambda$ 称为

Lyapunov 指数,则 Lyapunov 指数为: 
$$\lambda = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{k=1}^N \log_2 \frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})}$$
 通过 Lyapunov 指数的符号,

可以对系统进行定性分析,  $\lambda > 0$  为混沌运动,  $\lambda \leq 0$  为周期运动.

对该系统当 $f = 3.0$ 时,系统的 Lyapunov 指数为 $\lambda_1 = -0.9467$ ,  $\lambda_2 = 1.0457$ ,最大李雅普诺夫指数为正,故此时系统具有混沌态.

## 2 系统的混沌控制

### 2.1 变量反馈控制

以上数值研究结果表明,在某些参数下系统处于混沌状态.为了抑制和消除系统的混沌行为,利用变量反馈控制(VFC)方法对系统进行控制.并且小参数变化对系统无影响,原系统的动力学行为可得到保持;对足够大的目标轨道稳定性是全局的.该方法不仅能稳定镶嵌在原系统中的不稳定周期轨道,而且能建立新的周期轨道.

在式(2)所示的系统中,加入一个反馈变量 $k$ ( $k$ 为可调节的反馈系数),得到受控系统方程为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - kx \\ \dot{y} &= \mu(1-x^2)\dot{y} + \alpha x - \beta x^3 + f \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

在原系统中加入反馈项后,即使很小的反馈系数,都可以明显地减弱系统的混沌行为.因此选取适当的 $k$ ,便可抑制系统的混沌行为.通过全局分叉图来确定 $k$ 的选取.图3(a)为系统在反馈变量 $k$ 下的全局分叉图.从图中可以看出,当 $0.07 < k < 0.10$ 时系统在稳定的高周期轨道,随着 $k$ 的不断增大,当 $k > 0.22$ 时,系统处于稳定的一周期轨道,图3(b)、3(c)、3(d)给出了系统在不同反馈变量 $k$ 受控下的相图.

## 2.2 调节激励幅值控制

由上述讨论, 当系统参数取一定值时, 系统处于混沌态. 通过调节激励幅值来对系统的混沌行为进行控制. 给系统加上一个周期激励力:  $f(t) = p \sin(\omega t)$ , 则受控系统为 (4) 式所示:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - p \sin(\omega t) \\ \dot{y} &= \mu(1-x^2)y + \alpha x - \beta x^3 + f \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $p$  为激励力的幅值,  $\omega$  为激励力的频率, 在此选取固定的激励力频率  $\omega = 1$ , 通过调节激励幅值  $p$ , 可以将系统的混沌行为控制到不同的周期轨道. 图 4(a)-4(d) 给出了系统在不同  $p$  ( $p > 0$ ) 值下的全局分叉图及相图. 通常选取  $p$  值均为  $p > 0$  时的控制相图, 图 4(e)-图 4(g) 给出了  $p < 0$  时的全局分叉图及相图, 同样的选取不同的  $p$  值也可以将系统控制到不同的周期轨道. 通过全局分叉图可以很好地找到控制参数的选取.

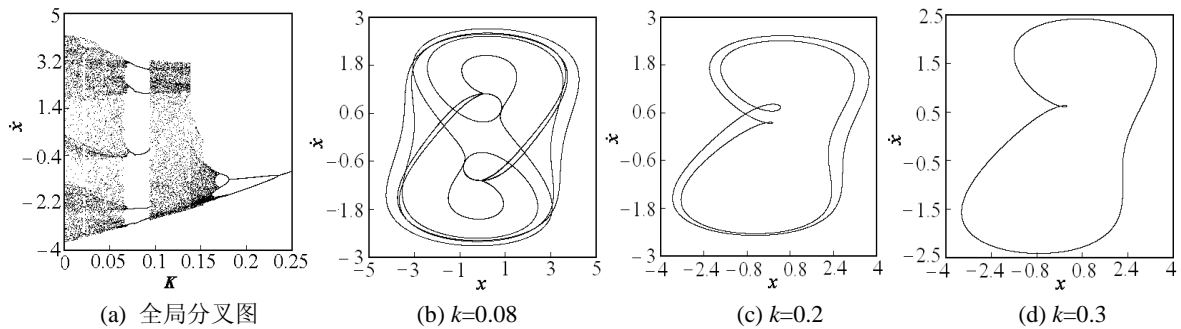


图 3 在反馈变量  $k$  下的全局分叉图及相图

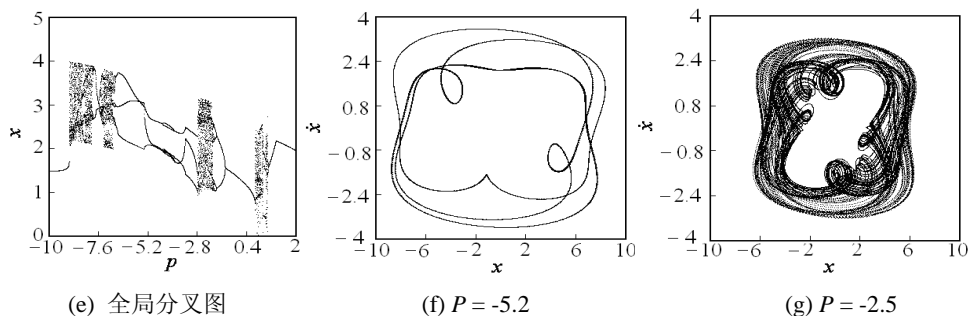
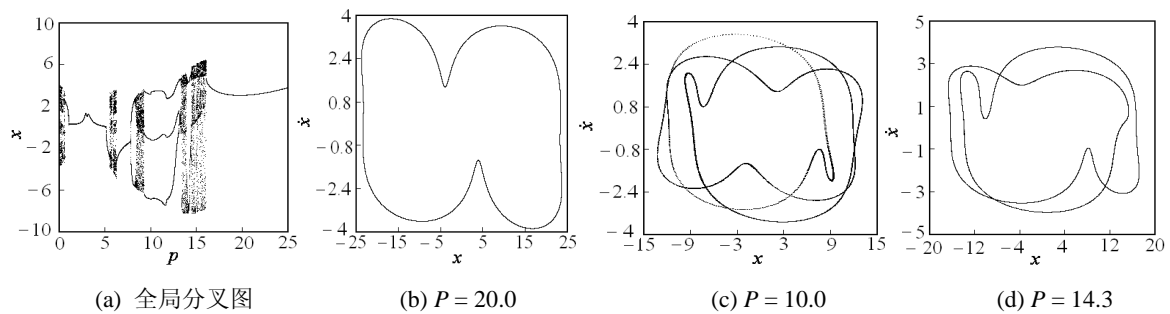


图 4 在激励幅值  $P$  下的全局分叉图及相图

### 3 结 论

利用相图、全局分叉图和庞加莱映射图、Lyapunov指数定性、定量地分析了该系统的混沌行为。通过数值仿真就系统激振幅度 $f$ 对系统的影响进行了分析。

采用的两种控制方法均能将该系统控制到稳定的周期轨道。变量反馈控制方法,对系统的混沌控制有良好的控制效果,且方法简单容易实现,对受控系统无需太多的了解,控制稳定可靠。不同控制方法有不同的优点,可根据需要进行选择。

#### 参考文献

- [1] 许磊, 陆明万, 曹庆杰, 等. Van der Pol-Duffing 方程的非线性动力学分叉特性研究[J]. 应用力学学报, 2002, 19(4): 131-133.
- [2] 张伟, 霍拳忠. 参数激励与强迫激励联合作用下非线性振动系统的分叉[J]. 力学学报, 1991, 23(4): 464-474.
- [3] 余新科, 范娟, 丘水生. 周期激励二阶非自治系统混沌解析预测方法[J]. 华南理工大学学报, 2001, 29(9): 29-31.
- [4] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004. 403-408.

## Chaos Control for the Periodically Excited Van der Pol-Duffing

ZHANG Li, YU Jianning, LI Yang, PENG Jiankui

(School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Transportation University,  
Lanzhou, China 730070)

**Abstract:** By applying phase diagram, global bifurcation diagram, Poincaré mapping diagram, the chaos behaviors which periodically excites Van der Pol-Duffing Oscillator systems are analyzed, and two methods are applied to the control of the chaos behaviors of the system, effectively to a steady periodic orbit.

**Key words:** Chaos; Chaotic control; Phase diagram; Global bifurcation

(编辑: 王一芳)