基于 AOS 算法的彩色图像测地活动轮廓模型的改进与实现

单安波，高　健，范劲松[†]

（温州大学数学与信息科学学院，浙江温州　325035）

摘　要：测地活动轮廓模型作为一种图像分割方法，具有许多优点，但其数值实现较为复杂. 本文首先讨论了测地活动轮廓模型及其 AOS 算法，其次将该算法应用于彩色图像的轮廓提取，并提出了一个改进的边界检测方法，最后给出了 AOS 算法的一个具体实现. 实验结果表明，改进的边界检测方法与已有的方法相比，在效率上和效果上有较大提高，而结合 AOS 算法后，在算法效率上又有了进一步的提升.

关键词：计算机视觉；彩色图像分割；测地活动轮廓模型；AOS 算法

中图分类号：TP391.41　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-0375(2007)03-0038-10

图像分割是计算机视觉研究领域的基本问题之一. 活动轮廓模型（Active contour models）是20世纪80年代后期发展起来的一种图像分割方法. 早期的活动轮廓模型[1]又称为Snake模型，是一种能量泛函极小化模型，其基本思想是使给定的初始轮廓在模拟的外部能量和内部能量的作用下，向图像目标的边缘靠近，外部能量推动活动轮廓向着边缘运动，内部能量则保持活动轮廓的光滑性，当到达能量最小的平衡位置时，活动轮廓就收敛到所检测目标的边缘. 几何活动轮廓模型（Geometric active contour models）[2]是一种基于曲线演化和几何热流方法的模型，采用水平集（Level set）方法加以实现，相对于传统的Snake模型，其主要优点在于：（1）曲线是按照图像内在的几何性质进行演化，而不依赖于参数的选取；（2）在存在多个图像目标的情况下，能够自然地处理演化过程中的拓扑变化，而无需额外的处理. 测地活动轮廓模型（Geodesic active contour models）[3]来源于Snake模型，又结合了几何活动轮廓模型的优点. 活动轮廓模型方法在图像边缘检测、运动物体跟踪、特别是在医学图像处理上已经得到了大量的应用.

尽管测地活动轮廓模型与Snake模型相比有着许多优点，但在数值实现上，该模型存在高复杂性和低效性的缺点. 由于该模型对应于一个非线性偏微分方程，如果使用简单的显式Euler方法求解，为保证算法的稳定性，需要采用很小的时间步长；如果使用半隐式方法以解除步长的限制，则对普通大小的灰度图像，每次迭代要导致求解数万阶的线性方程组，如果不采取额外的方法加以处理，在计算上将花费巨大的时间和空间代价.

为解决这一问题，已经提出了许多方法. 这些方法一般集中于窄带（Narrow-band）技术和多

收稿日期：2006-12-04

基金项目：温州大学 2006 年度学生科研立项课题(06xk065)

作者简介：单安波，男，浙江杭州人，学士，研究方向：信息与计算科学。† 通讯作者，fjs@wzu.edu.cn

尺度（Multi-scale）等技术上．AOS（Addtive Operator Splitting，加性算子分裂）算法是近来提出的技术，该算法具有高效、稳定、可分解、可并行运算等优点，为此类模型提供了一种有前途的快速算法．文[4]表明该算法较之于显式算法，在效率上可以提高一个数量级．

上述模型及算法通常仅限于解决灰度图像的图像分割问题．对于彩色图像而言，问题更为复杂．由于彩色图像是向量值图像，本质上不存在等高线，因此本质上无法定义所谓的轮廓，现存的彩色图像的各种处理方法，均是灰度图像处理模型在某种意义下的推广．本文针对这一问题提出了一种新的边界检测方法，该方法相对于原有方法，具有速度快、效果好的优点．

本文首先讨论了测地活动轮廓模型及其AOS算法，然后将该算法应用于彩色图像的轮廓提取．由于已有的公开发表的文献一般并不提供算法的具体实现细节，拥有自行开发计算的能力就成为整个研究的基础之一，因此我们也给出了算法的一个具体实现．

1 测地活动轮廓模型和水平集方法

1.1 测地活动轮廓模型

在文[3]中，Caselles等人从Snake泛函出发，提出了能量泛函

$$J(C)=\int_0^1 g(|\nabla I(C(t,q))|)\,|C_q(t,q)|\,dq \tag{1}$$

其中 $C(t,q):[0,+\infty)\times[0,1]\to \mathbf{R}^2$ 是一族分段连续的闭曲线，$I:\Omega\to\mathbf{R}^+$ 是给定的图像，$g:[0,+\infty)\to(0,1]$ 是一个严格单调下降的函数，且当 $r\to\infty$ 时，$g(r)\to 0$．可以证明，这一泛函在一定意义下与Snake泛函是等价的，而且与参数的选取无关，因而是内在的[3]．

变分问题 $\min J(C)$ 对应的 Euler-Lagrange 方程是

$$\frac{\partial C}{\partial t}=(\kappa g-\langle\nabla g,N\rangle)N \tag{2}$$

其中 κ 是曲线 C 的曲率，N 是曲线的单位法向量．

通常还在上述方程的右边再加上一项，成为

$$\frac{\partial C}{\partial t}=(\kappa g-\langle\nabla g,N\rangle+\alpha g)N \tag{3}$$

其中 α 是常数，称为气球力（Balloon force）．加入这一项的优点是使得非凸目标的检测更容易，且收敛的速度更快．（3）式称为具有气球力的测地活动轮廓模型．

1.2 水平集方法

水平集方法的主要思想是，将曲线嵌入高一维的曲面中，将曲线看作是曲面的水平集，利用曲面的演化得到曲线的演化．在演化过程中，曲面的拓扑保持不变，但曲线的拓扑可以改变．设 $u(x):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是一张曲面，使得 $C=\{(x\in\mathbf{R}^2:u(x)=0\}$，即 C 嵌入 u 中作为它的水平集．考虑一般的平面曲线演化问题 $\dfrac{\partial C}{\partial t}=\beta N$．对 $u(x)=0$ 求导，并注意到 $N=-\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$，可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\langle\nabla u,C_t\rangle=-\langle\nabla u,\beta N\rangle=\beta\left\langle\nabla u,\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right\rangle=\beta|\nabla u|$$

特别地，（3）式的水平集形式公式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left((\kappa+\alpha)g+\left\langle\nabla g,\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right\rangle\right)|\nabla u|$$

利用曲率公式$\kappa=\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=g(|\nabla I|)\left(\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)+\alpha\right)|\nabla u|+\langle\nabla g,\nabla u\rangle$$

最后我们得到水平集方法测地活动轮廓模型的偏微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=|\nabla u|\left(\mathrm{div}\left(g(|\nabla I|)\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)+\alpha g(|\nabla I|)\right), & \text{在}(0,+\infty)\times\Omega\text{上}\\ u(0,x)=u_0(x), & \text{在}\Omega\text{上}\end{cases}\tag{4}$$

这里u_0可取为带符号距离函数

$$u_0(x)=\begin{cases}d(x,C_0), & x\text{在}C_0\text{内部}\\ 0, & x\in C_0\\ -d(x,C_0), & x\text{在}C_0\text{外部}\end{cases}\tag{5}$$

其中C_0是初始曲线，$d(x,C_0)$表示点x与C_0的距离.

2 AOS算法

现在讨论（4）式的离散化问题. 先讨论$\alpha=0$的情形.

令时间步长为τ，空间步长统一为$h=1$，为简化记号，所有的象素按行或按列首尾相连排成一列，u在每个点的近似值用u_i^n表示，其中i是空间位置，n是时间位置.

设$u^n=(u_1^n,u_2^n,\cdots,u_N^n)^T$，$N$为图像的宽度与高度的乘积，则得到（4）的迭代格式（$\alpha=0$时）

$$u^{n+1}=u^n+\tau\sum_{l\in\{x,y\}}A_l(u^n)u^{n+1}\tag{6}$$

其中，矩阵$A_l(u^n)=(a_{ijl}(u^n))$，而

$$a_{ijl}(u^n)=\begin{cases}|\nabla u|_i^n\dfrac{2}{\left(\frac{|\nabla u|}{g}\right)_i^n+\left(\frac{|\nabla u|}{g}\right)_j^n}, & j\in N_l(i)\\ -|\nabla u|_i^n\sum\limits_{m\in N_l(i)}\dfrac{2}{\left(\frac{|\nabla u|}{g}\right)_i^n+\left(\frac{|\nabla u|}{g}\right)_m^n}, & j=i\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7}$$

其中 $N_l(i)$ 表示方向 $l\in\{x,y\}$ 上的相邻位置.

将（6）式改写为半隐式迭代格式

$$\left(I-\tau\sum_{l\in\{x,y\}}A_l(u^n)\right)u^{n+1}=u^n \tag{8}$$

该线性方程组的系数矩阵是一个 N 阶的稀疏矩阵，每行至多有 5 个非零元，属于对角占优矩阵，但不是带状矩阵．该矩阵的阶数通常很高（对于分辨率为 256×256 的图像，矩阵的阶数为 65536)．若使用高斯消去法求解，将破坏矩阵的稀疏性，导致巨大的存储和计算开销；若采用迭代法求解，则虽然不需要额外的存储空间，而且收敛性可以得到保证，但随着图像分辨率的提高，矩阵的条件数会增大，从而使迭代法变得很慢.

对（8）式使用 Taylor 展开，我们得到 AOS（Addtive Operator Splitting）算法

$$u^{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{l\in\{x,y\}}(I-2\tau A_l(u^n))^{-1}u^n \tag{9}$$

AOS 算法的主要思想，是将一个关于高维问题的线性方程组的求解问题，拆解成多个关于一维问题的线性方程组的求解问题．（9）式与（8）式相比，仅相差高阶的 $O(\tau^2)$ 项，与整个方程的截断误差同阶，因此（9）式与（8）式具有相同的误差阶数．注意到矩阵 $I-2\tau A_l(u^n)$ 是一个三对角带状矩阵，求解相应的线性方程组有简单高效的 Thomas 算法，具有线性复杂度，因此（9）式的求解是非常高效的．该算法是绝对稳定的，因此可以适当增大时间步长，减少迭代次数，从而提高算法的效率．并且由于该算法的可分解性，还适合于并行计算.

现在处理 $\alpha g|\nabla u|$ 项，因为该项的双曲特性，需要使用迎风格式（Upwind scheme）

$$|\nabla u|_i^n=\begin{cases}|\nabla^- u|_i^n=(\max(D^{-x}u_i^n,0)^2+\min(D^{+x}u_i^n,0)^2+\max(D^{-y}u_i^n,0)^2+\min(D^{+y}u_i^n,0)^2)^{1/2}, \alpha\le 0,\\ |\nabla^+ u|_i^n=(\min(D^{-x}u_i^n,0)^2+\max(D^{+x}u_i^n,0)^2+\min(D^{-y}u_i^n,0)^2+\max(D^{+y}u_i^n,0)^2)^{1/2}, \alpha>0\end{cases} \tag{10}$$

最后我们得到具有气球力的 AOS 迭代方程

$$u^{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{l\in\{x,y\}}(I-2\tau A_l(u^n))^{-1}(u^n+\tau|\nabla^{\pm}u|_i^n\alpha g) \tag{11}$$

3 彩色图像分割

在讨论彩色图像的分割问题之前，首先说明函数g的取法．函数g又称为边缘检测器（Edge detector）或停止函数（Stopping function），是一个单调下降的非负函数．对于灰度图像，通常可取为

$$g(|\nabla I|)=\frac{1}{1+\frac{|\nabla(G_{\sigma}*I)|^{2}}{\lambda^{2}}} \tag{12}$$

其中G_{σ}是标准方差为σ的高斯函数，*是卷积，λ是对比因子．

对于彩色图像而言，问题要复杂得多，由于彩色图像是向量值图像，而向量值函数是不存在等高线的，因此本质上无法定义所谓的轮廓．现有的彩色图像的各种处理方法，均是灰度图像处理模型在某种意义下的推广．根据文[5,6]中建议的方法，首先将2维图像嵌入到一个5维空间中，然后求得其在该5维空间下的诱导度量，将该度量张量的大小作为式（12）中梯度模的推广．在文[5,6]中，新的边缘检测函数取为$g=(1+\mu^{2}/\lambda^{2})^{-1}$，$\mu$为度量张量的最大的特征值

$$\mu=1+\frac{1}{2}\sum_{i}|\nabla u^{i}|^{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sum_{i}|\nabla u^{i}|^{2}\right)^{2}-\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j}|\nabla u^{i}\times\nabla u^{j}|^{2}}$$

其中$u^{1}=R,u^{2}=G,u^{3}=B$，即每个象素的3个色彩分量．

该方法将（12）式中的灰度函数替换成度量张量的最大的特征值．本质上，这是以各色彩分量中梯度最大的一个分量作为整个彩色图像在某点处的轮廓数据．这种简单的处理方法使得我们较为容易地套用已有的灰度图像的模型．然而，对于大量的彩色图像而言，图像的轮廓应该是各个色彩分量综合作用的结果，而不仅仅是某个单一的色彩分量的作用．因此，如果能够直接将停止函数与度量张量的整体相联系，可以预料将会有更好的效果．

为此，我们提出直接将度量张量的模的倒数作为停止函数本身，即

$$g(|\nabla I|)=\frac{1}{\det(g_{ij})} \tag{13}$$

其中g_{ij}即为诱导度量分量

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1+R_{x}^{2}+G_{x}^{2}+B_{x}^{2} & R_{x}R_{y}+G_{x}G_{y}+B_{x}B_{y}\\ R_{x}R_{y}+G_{x}G_{y}+B_{x}B_{y} & 1+R_{y}^{2}+G_{y}^{2}+B_{y}^{2}\end{pmatrix}$$

我们指出，若不考虑卷积和对比因子，当色彩的分量只有一个，即图像成为灰度图像时，（13）式将回到（12）式．因此该方法是已有方法的一个自然推广．

我们的实验结果表明，该方法无论是在迭代次数上还是在分割效果上，都要优于文[5,6]中的方法．

4 算法实现

4.1 迭代方程的实现

因为迭代方程（11）比较复杂，在此将它划分为两部分加以实现．为清晰起见，下面的 C 语言代码中省略了变量定义以及一些枝节部分，只保留了主要部分．

```
void main_loop_gac()
{
    // 建立初始的带符号距离函数 u0
    init_u0(&para, xu);
    turn(xu, yu, h, w);
    // 建立 g(x)
    func_g(&para, px, xg);
    turn(xg, yg, h, w);
    for(int it = 1; it <= total_iter; it++)
    {
        // 算 xu 的中心差分梯度模
        img_grad(xu, xgrad, h, w);
        turn(xgrad, ygrad, h, w);

        // 算 xu 的迎风格式梯度模
        img_upwind(xu, upwind_xu, h, w, balloon);
        turn(upwind_xu, upwind_yu, h, w);
        // 叠加
        for (int i = 0; i < N; i++)
        {
            xu[i] = xu[i] + tau * upwind_xu[i] * balloon * xg[i];
            yu[i] = yu[i] + tau * upwind_yu[i] * balloon * yg[i];
        }
        // 迭代
        iter_gac(xgrad, ygrad, xu, yu, xg, yg, &para, u_out);
        memcpy(xu, u_out, N * sizeof(float));
        turn(xu, yu, h, w);
    }
    // 计算水平集
    levelset(u_out, ls, h, w);
    // 画出轮廓线
    draw_contour(out_bitmap, ls, &para);
}
```

这个函数建立了迭代的主框架．为方便起见，把迭代用到的各个参数统一到结构参数 para 中传递．函数 init_u0()利用距离函数建立初始的 u0，函数 turn( )将数据的排列方式进行行列转置．函数 func_g()按照式**错误！未找到引用源。**计算函数 g(x)，其中 px 是原始图像数据．以上是数据初始化，紧接着进入一个循环，循环的次数是用户给定的．在循环中，首先计算 u 的中心差商梯度模和迎风格式梯度模，然后将气球力项叠加到 u 上，接着进入迭代函数．迭代结束后，结果送入下次循环．迭代函数如下：

```
void iter_gac(float gradu1[], float gradu2[], float u_in1[],
float u_in2[], float xg[], float yg[], Para* pa, float u_out[])
{
    // 计算 x 方向矩阵元素
    aijl_gac(gradu1, xg, pa, alpha, beta, gamma);
    for(i = 0; i < N; i++)
    {
        alpha[i] = 2.0 - 4.0 * tau * alpha[i];
        beta[i] = -4.0 * tau * beta[i];
        gamma[i] = -4.0 * tau * gamma[i];
    }
    // Thomas 算法解三对角矩阵方程
    tridiag(alpha, beta, gamma + 1, u_in1, solution1, temp, N);
    // 计算 y 方向矩阵元素
    aijl_gac(gradu2, yg, pa, alpha, beta, gamma);
    for(i = 0; i < N; i++)
    {
        alpha[i] = 2.0 - 4.0 * tau * alpha[i];
        beta[i] = -4.0 * tau * beta[i];
        gamma[i] = -4.0 * tau * gamma[i];
    }
    // Thomas 算法解三对角矩阵方程
    tridiag(alpha, beta, gamma + 1, u_in2, solution2, temp, N);
    // solution2 转置
    turn(solution2, solution2t, pa->IW, pa->IH);
    // 得到迭代结果
    for(i = 0; i < N; i++)
    {
        u_out[i] = solution1[i] + solution2t[i];
    }
}
```

注意这里将系数矩阵改为 $2I-4\tau A_l(u^n)$，这样后面在求和之后，不必除以 2．还应注意在

求和之前需要将 y 方向的解向量转置为 x 方向的解向量.

4.2 系数矩阵的计算

下面的函数根据（7）式计算矩阵 $A_l(u^n)$ 的元素.

```
void aijl_gac(float grad[], float g[], Para* pa, float x[], float y[], float z[])
{
    p = grad[0] / g[0];
    for(i = 0; i < N; i++)
    {
        q = grad[i + 1] / g[i + 1] + grad[i] / g[i];
        if(fabs(p) < MINFLOAT || fabs(q) < MINFLOAT)
            x[i] = 0.0;
        else
            x[i] = - grad[i] * (2.0 / p + 2.0 / q);
       if(fabs(q) < MINFLOAT)
            y[i] = 0.0;
        else
            y[i] = grad[i] * (2.0 / q);
        if(fabs(p) < MINFLOAT)
            z[i] = 0.0;
        else
            z[i] = grad[i] * (2.0 / p);
        p = q;
    }
}
```

为避免除法运算溢出，事先判断：若分母为 0，将矩阵元素直接置 0．在气球力不存在的情况下，这相当于 $u^{n+1} = u^n$.

4.3 Thomas 算法

该算法又称追赶法，是解三对角方程组的标准算法，见于各种数值分析的教科书，例如可参考文[7]，本文从略．该算法的时间复杂度为 O(n).

5 实验结果

实验 1：图 1 至图 4 演示了采用我们的实现得到的一幅彩色图像的分割过程，该过程是测地活动轮廓模型处理图像分割的一个典型过程，注意曲线在演化过程中能够自然地处理拓扑变化．实验参数：Time Step=5，Balloon Force=-0.3，Contour Color=Red，Total Time= 21.141 s.

图 1 Iterations=50

图 2 Iterations=100

图 3 Iterations=150

图 4 Iterations=300

实验 2：图 5 和图 6 比较了文[5,6]中的方法和我们的方法的效果的不同，其中图 5 使用的是文[5,6]中的方法．可以看出，新方法在迭代次数上远远少于原有方法，而分割效果要好于原有方法．实验参数：Time Step=5，Balloon Force=-0.3，Contour Color=Yellow．

图 5 Iterations=600

图 6 Iterations=125

6 结 论

测地活动轮廓模型既继承了Snake模型曲线演化的基本思想，又能够自然地处理演化过程中的拓扑变化，是一种较好的图像分割方法，但是实现上的复杂性限制了它的应用．AOS算法为解决这一矛盾提出了新的思路，并且，该方法与窄带技术和多尺度技术等其它快速算法并不矛盾，可以结合使用，从而为模型的广泛应用提供了良好的前景．

彩色图像作为向量值图像，本质上不存在等高线，因此本质上无法定义所谓的轮廓．现存的彩色图像的各种处理方法，均是灰度图像处理模型在某种意义下的推广．实验表明，我们提出的

改进的边界检测方法与原有方法相比，在处理上比原有方法更自然，在效率上和效果上有较大提高，而结合 AOS 算法后，在算法效率上又有了进一步的提升．

参考文献

[1] Kass M, Witkin A, Terzopoulos D. Snakes: Active contour models [J]. International Journal of Computer Vision, 1988, 1: 321-331.

[2] Caselles V, Catte F, Coll T, et al. A geometric model for active contours in image processing [J]. Numerische Mathematik, 1993, 66: 1-31.

[3] Caselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours [J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 22: 61-79.

[4] Kuhne G, Weickert J, Beier M, et al. Fast implicit active contour models [C]. In: Van Gool L. Pattern Recognition. Lecture Notes in Computer Science (Vol 2449). Berlin: Springer, 2002. 133-140.

[5] Sochen N, Kimmel R, Malladi R. A general framework for low level vision [J]. IEEE Trans Image Processing, 1998, 7: 310-318.

[6] Goldenberg R, Kimmel R, Rivlin E, et al. Fast Geodesic Active Contours [J]. IEEE Trans Image Processing, 2001, 10: 1467-1475.

[7] 沈建华. 数值计算基础[M], 上海: 同济大学出版社, 1999. 175-178.

An AOS-based Improvement and Implementation for Color Image Geodesic Active Contour Models

SHAN Anbo, GAO Jian, FAN Jinsong

(School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: As an image segmentation method, the geodesic active contour(GAC) model has many advantages. However, it suffers from poor efficiency. We discuss firstly the GAC model and AOS scheme, then apply this scheme to color image segmentation and propose a modified border detective method. Finally we give an implementation of the proposed scheme. Experiments show that the modified scheme can gain much efficiency compared to the widely used schemes.

Key words: Computer vision; Color image segmentation; Geodesic active contour models; AOS scheme

（编辑：赵肖为）